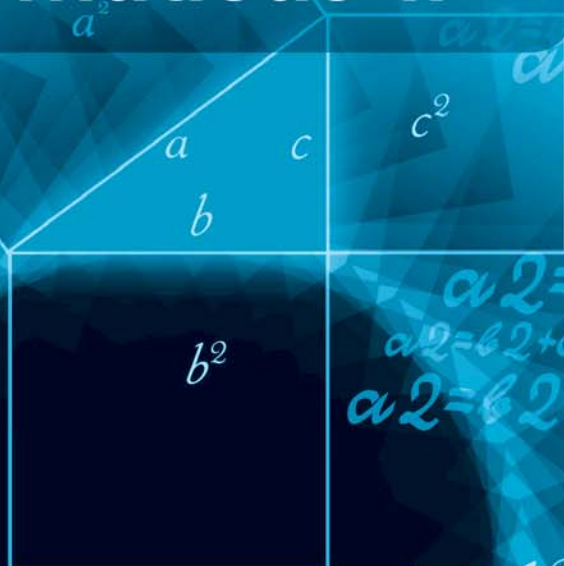


Guía didáctica para

Matemáticas II



$$a^2 = b^2 + c^2$$

Guía didáctica para

Matemáticas II

Dirección y realización del proyecto

LCC. Gabriel Barragán Casares

**Director General del Colegio de Bachilleres
del Estado de Yucatán**

Planeación y coordinación

Lic. Alejandro Salazar Ortega

Director Académico

Metodología y estrategia didáctica

Lic. Lorenzo Escalante Pérez

Jefe del Departamento de Servicios Académicos

Consejo de revisión, corrección y lectura técnico-académica

Lic. Lorenzo Escalante Pérez

LF. Alfredo Javier Puerto Góngora

LHF. Francisco Villanueva Couoh

Coordinador de la asignatura

Lic. Miguel Alcocer Espadas

Colaboradores

Lic. Ponciano Rejón Moo

Lic. Alberth Jesús Herguera Loría

Lic. Alvaro Rudy Menchú Zea

Lic. Manuel Omar Tutzin Sulú

Lic. Elmer Faustino Zapata Canché

Lic. Ileana Verónica Ramírez Collí

1ª Edición

Enero 2011

Impreso en México

DERECHOS RESERVADOS

Queda prohibida la reproducción o transmisión total o parcial del texto de la presente obra, bajo cualquier forma electrónica o mecánica, incluyendo fotocopiado, almacenamiento en cualquier sistema de recuperación de información o grabado sin el consentimiento previo y por escrito del editor.

LA REFORMA INTEGRAL DE LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

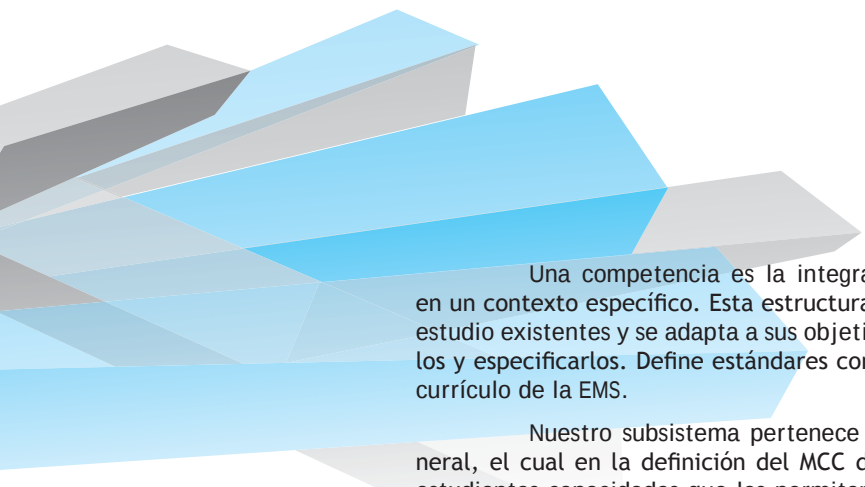
La Educación Media Superior (EMS) en México enfrenta desafíos que podrán ser atendidos sólo si este nivel educativo se desarrolla con una identidad definida que permita a sus distintos actores avanzar ordenadamente hacia los objetivos propuestos. Es importante saber que la EMS en el país está compuesta por una serie de subsistemas que operan de manera independiente, sin correspondencia a un panorama general articulado y sin que exista suficiente comunicación entre ellos. El reto es encontrar los objetivos comunes de esos subsistemas para potenciar sus alcances y de esta manera lograr entre todos reglas claras de operación. Es importante para el desarrollo de la EMS, que ustedes docentes y estudiantes conozcan los ejes que la regulan, como opera y los retos que enfrenta en la actualidad para asumir a partir de dicho conocimiento una actitud diferente que nos permita coadyuvar en este esfuerzo.

Los diferentes subsistemas de la EMS han realizado cambios en sus estructuras los cuales pretendieron dar la pertinencia, eficacia y calidad necesarias para que la población a la que atiende (jóvenes entre los 15 y 21 años aproximadamente) adquiriera conocimientos y habilidades que les permitan desarrollarse de manera satisfactoria, ya sea en sus estudios superiores o en el trabajo y, de manera más general, en la vida. En esta misma línea, no se debe perder de vista el contexto social de la EMS: de ella egresan individuos en edad de ejercer sus derechos y obligaciones como ciudadanos, y como tales deben reunir, en adición a los conocimientos y habilidades que definirán su desarrollo personal, una serie de actitudes y valores que tengan un impacto positivo en su comunidad y en el país en su conjunto.

Es en este contexto que las autoridades educativas del país, han propuesto la Reforma Integral de la Educación Media Superior (RIEMS), cuyos objetivos consisten en dar identidad, calidad, equidad y pertinencia a la EMS, a través de mecanismos que permitan articular los diferentes actores de la misma en un Sistema Nacional de Bachillerato dentro del cual se pueda garantizar además de lo anterior, tránsito de estudiantes, intercambio de experiencias de aprendizaje y la certificación de los mismos.

Lo anterior será posible a partir del denominado Marco Curricular Común (MCC) de la RIEMS, el cual se desarrolla considerando el modelo de competencias, y que incluye: Competencias Genéricas, Competencias Disciplinarias (básicas y extendidas) y Competencias Profesionales (básicas y extendidas). Esta estructura permite observar de manera clara, los componentes comunes entre los diversos subsistemas, así como aquellos que son propios de cada uno y que por consiguiente, los hace distintos. Lo anterior muestra como la RIEMS respeta la diversidad del nivel educativo del país, pero hace posible el Sistema Nacional del Bachillerato, conformado por las distintas instituciones y subsistemas que operan en nuestro país.

Bachillerato Universitario	Bachillerato General	Bachilleratos Tecnológicos
Competencias Genéricas		
Competencias Disciplinarias Básicas		
Competencias Disciplinarias extendidas		
Competencias Profesionales Básicas		
Competencias Profesionales Extendidas		Profesionales



Una competencia es la integración de habilidades, conocimientos y actitudes en un contexto específico. Esta estructura reordena y enriquece los planes y programas de estudio existentes y se adapta a sus objetivos; no busca reemplazarlos, sino complementarlos y especificarlos. Define estándares compartidos que hacen más flexible y pertinente el currículo de la EMS.

Nuestro subsistema pertenece al conjunto de los que ofrecen bachillerato general, el cual en la definición del MCC de la reforma integral, deberá desarrollar en los estudiantes capacidades que les permitan adquirir competencias genéricas, competencias disciplinares básicas y extendidas, además de competencias profesionales básicas.

Las competencias genéricas son las que todos los bachilleres deben estar en capacidad de desempeñar; las que les permiten comprender el mundo e influir en él; les capacitan para continuar aprendiendo de forma autónoma a lo largo de sus vidas, y para desarrollar relaciones armónicas con quienes les rodean, así como participar eficazmente en los ámbitos social, profesional y político. Dada su importancia, dichas competencias se identifican también como competencias clave y constituyen el perfil del egresado del Sistema Nacional de Bachillerato. A continuación se listan las once competencias genéricas, agrupadas en sus categorías correspondientes:

Se autodetermina y cuida de sí

1. Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.
2. Es sensible al arte y participa en la apreciación e interpretación de sus expresiones en distintos géneros.
3. Elige y practica estilos de vida saludables.

Se expresa y comunica

4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.

Piensa crítica y reflexivamente

5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.
6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.

Aprende de forma autónoma

7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.

Trabaja en forma colaborativa

8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.

Participa con responsabilidad en la sociedad

9. Participa con una conciencia cívica y ética en la vida de su comunidad, región, México y el mundo.
10. Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales.
11. Contribuye al desarrollo sustentable de manera crítica, con acciones responsables.

Las competencias disciplinares son las nociones que expresan conocimientos, habilidades y actitudes que consideran los mínimos necesarios de cada campo disciplinar para que los estudiantes se desarrollen de manera eficaz en diferentes contextos y situaciones a lo largo de la vida. Las competencias disciplinares pueden ser básicas o extendidas.

Las competencias disciplinares básicas procuran expresar las capacidades que todos los estudiantes deben adquirir, independientemente del plan y programas de estudio que cursen y la trayectoria académica o laboral que elijan al terminar sus estudios de bachillerato. Las competencias disciplinares básicas dan sustento a la formación de los estudiantes en las competencias genéricas que integran el perfil de egreso de la EMS y pueden aplicarse en distintos enfoques educativos, contenidos y estructuras curriculares; se organizan en los campos disciplinares siguientes: Matemáticas, Ciencias Experimentales (Física, Química, Biología y Ecología), Ciencias Sociales y Humanidades (Historia, Sociología, Política, Economía, Administración, Lógica, Ética, Filosofía y Estética) y Comunicación (Lectura y Expresión oral y escrita, Literatura, Lengua extranjera e Informática).

Para la asignatura Introducción a las ciencias sociales se tienen las siguientes competencias disciplinares básicas:

PROPÓSITO

De forma específica, MATEMÁTICAS 2 propiciará el desarrollo de la creatividad y el pensamiento lógico y crítico entre los estudiantes, mediante procesos de razonamiento, argumentación y estructuración de ideas que conlleven el despliegue de distintos conocimientos, habilidades, actitudes y valores, en la resolución de problemas éticos fundamentales que en sus aplicaciones trasciendan el ámbito escolar así como ubicar al estudiante en los valores propios, los de la democracia y los derechos humanos con el fin de encontrar en nuestro país una razón de ser de su propia identidad, multiculturalidad y su papel en un mundo globalizado, todo esto mediante el reconocimiento de la Ética como una rama de la Filosofía.

ESTRATEGIA DIDÁCTICA

Para contribuir al desarrollo de las sesiones de aprendizaje en el aula, se estableció una estrategia que permita integrar los elementos del programa de la asignatura, con los materiales de apoyo y la actividad de docentes y estudiantes.

Se le denomina estrategia en el sentido de su flexibilidad, ya que no pretende ser un algoritmo que el docente deba seguir al pie de la letra, si no que debe adaptarlo a las características propias del contexto en el que se desarrollan las sesiones de aprendizaje.

La estrategia consta de siete pasos o etapas, mismas que deberán conocerse en las primeras sesiones, para un mejor desarrollo de las mismas. Los pasos se listan y describen a continuación:

- Dinamización.
- Contextualización.
- Problematicación.
- Desarrollo de saberes: conocimientos, habilidades, actitudes y valores.
- Síntesis de resultados de aprendizaje.
- Actividad integradora.
- Tarea significativa.
- Evaluación de la competencia a través de un portafolio de evidencias de aprendizaje.

DINAMIZACIÓN

En el proceso de construcción del aprendizaje, es indispensable para el facilitador tener evidencia de los aprendizajes previos que el alumno ha adquirido y considerar que es a par-

tir de los mismos que se desarrollarán los nuevos.

CONTEXTUALIZACIÓN

En el desarrollo de competencias se hace necesario el aprendizaje contextual, es decir, presentar elementos a través de escenarios que le sean significativos a los estudiantes. La contextualización deberá realizarse al inicio de cada bloque en los que se organizan los contenidos en los programas de estudio.

PROBLEMATIZACIÓN

En el modelo de competencias que la RIEMS establece, el contenido toma un significado primordial al acercarnos a él, a través, de su aplicación en la vida cotidiana, por tanto la problematización debe estar presente a lo largo de toda la estrategia en el aula.

DESARROLLO DE SABERES: CONOCIMIENTOS, HABILIDADES, ACTITUDES Y VALORES

Etapas en la cual el facilitador a partir de la Base Orientadora de la Acción (BOA), facilita el quehacer del estudiante en la adquisición de competencias. En esta etapa de la estrategia, estudiantes y docentes deben estar pendientes del proceso de asimilación. Galperin lo describe como un proceso de etapas y no como un fenómeno inmediato.

Las distintas etapas del proceso de asimilación que el alumno experimenta para desarrollar el aprendizaje son: la etapa de motivación la cual debe fomentarse y mantenerse durante todo el curso, recordemos que si un alumno no está motivado, difícilmente aprenderá. La segunda etapa de este proceso es la formación de la BOA, esta incluye la forma que el facilitador utiliza para que el alumno desarrolle una competencia. La RIEMS sugiere la creatividad como método o forma de enseñanza para cumplir tales fines.

La BOA puede llevarse a cabo de varias formas, cubriendo tres aspectos importantes, la orientación al alumno, que como ya dijimos debe estar precedida por una buena carga de motivación, dicha orientación puede ser de dos tipos, completa en la que el maestro le proporciona al alumno todos los aspectos de un contenido, e incompleta en la cual se dejan ciertos aspectos de un contenido para que el alumno pueda descubrir o investigar por sí mismo. La generalidad es otro aspecto importante en la constitución del BOA, esta puede ser concreta o generalizada, es decir, el docente puede mostrar hechos concretos relativos a algún contenido o puede abarcar el mismo contenido pero por medio de hechos generales, que tengan alguna relación con el concepto que se expone al alumno.

El modo de obtención, es el último de los aspectos que incluye la BOA. Este se presenta de dos formas pre-elaborada e independiente. En el primero, el alumno llega a obtener el aprendizaje de manera conjunta con el facilitador y en la segunda los alumnos adquieren el conocimiento en forma independiente.

SÍNTESIS DE RESULTADOS DE APRENDIZAJE

Actividad que permite integrar los aprendizajes del estudiante a través de evidencias de conocimiento, desempeño, producto y actitud de manera que el docente cuente con estrategias para la evaluación formativa logrando involucrar al estudiante en procesos de coevaluación.

ACTIVIDAD INTEGRADORA

Al término de cada bloque en los que se organizan las unidades de competencia en cada asignatura, el facilitador y los estudiantes ante la evidencia recopilada en la etapa anterior, pueden establecer estrategias que permitan mayor grado de claridad en la recolección de evidencias e incluso que los aprendizajes sean reafirmados por los estudiantes.

TAREA SIGNIFICATIVA

Al finalizar cada bloque se encuentra una oportunidad de relacionar los saberes con la vida cotidiana del estudiante y se hace referencia a las situaciones en las cuales éstos resultarán útiles prácticamente al estudiante.

EVALUACIÓN DE LA COMPETENCIA

Para llevar a cabo la evaluación sumativa de las competencias que se indican en los programas de estudio, se contempla esta etapa la cual debe verse como parte del proceso, es decir, no debe en ningún momento separarse de la formativa. La mejor forma de lograr esta unidad será integrando un portafolio de evidencias de aprendizaje.



Simbología

Desarrollando competencias	
	Conocimientos
	Habilidades
	Actitudes y valores
Secciones	
	Activando saberes
	Ampliando el horizonte
	Evaluando lo aprendido
	Tarea significativa

Contenido

Bloque I. Utiliza triángulos: Ángulos y relaciones métricas	1
Sesión A: Clasifica los ángulos por su medida y posición de sus lados	4
Conceptos básicos: punto, línea, segmento y plano	5
Ángulos	7
Sesión B: Parejas de Ángulos	13
Clasificación por la posición de sus lados	14
Sesión C: Define y clasifica los triángulos por la medida de sus lados y ángulos	28
Triángulos y su clasificación	29
Propiedades de los triángulos	34
Rúbrica para la evaluación de bloque	44
Bloque II. Comprende la congruencia de triángulos	47
Sesión A: Noción intuitiva del concepto de congruencia	51
Congruencia	56
Sesión B: Criterios de congruencia de triángulos	57
Bloque III. Resuelve problemas de semejanza de triángulos y teorema de Pitágoras	71
Sesión A: Segmentos proporcionales y Teorema de Tales	75
Teorema de Tales aplicado a triángulos	78
Sesión B: Semejanza de triángulos	80
Concepto de semejanza	82
Semejanza de triángulos	83
Criterios de semejanza	83
Ejemplo 1	85
Ejemplo 2	86
Sesión C: Teorema de Pitágoras	87
Teorema de Pitágoras	88
Proporcionalidad en un triángulo rectángulo	93
Sesión A: Clasificación de los polígonos	109
Definición de polígono	110
Clasificación de los polígonos	110
Sesión B: Reconoce las propiedades y elementos de los polígonos	113
Elementos de un polígono regular	115



MATEMÁTICAS II

Diagonales en un polígono regular	116
Ángulos en un polígono regular	121
Suma de los ángulos que se forman en un polígono	124
Ejemplos	124
Bloque V. Emplea la circunferencia	135
Sesión A: Elementos de la circunferencia y círculo	139
Circunferencia y círculo	140
Propiedades de los segmentos	143
Sesión B: Ángulos en la circunferencia	148
Ángulos en la circunferencia	150
Bloque VI. Relaciones trigonométricas para resolver triángulos rectángulos	167
Sesión A: Unidades de medición de ángulos	172
Medida angular	174
Medida circular	176
Sesión B: Funciones trigonométricas	178
Funciones trigonométricas de un ángulo agudo	180
De razones a funciones	186
Sesión C: Resolución de triángulos rectángulos y sus aplicaciones	188
Bloque VII. Resuelve Trigonometría II	199
Sesión A: Funciones trigonométricas de ángulos en general	203
Funciones trigonométricas para ángulos en general	204
Sesión B: Gráfica de las funciones trigonométricas	218
Gráfica de las funciones trigonométricas	219
Bloque VIII. Aplica la ley de los senos y cosenos	227
Sesión A: Ley de Senos y Cosenos.	231
La ley de los Senos	233
La ley de los cosenos	239

Bloque I. Utiliza triángulos: Ángulos y relaciones métricas

Atributos de las competencias genéricas:

- 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
- 5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
- 5.4 Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez.
- 5.6 Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para procesar e interpretar información.
- 6.1 Elige las fuentes de información más relevantes para un propósito específico y discrimina entre ellas de acuerdo a su relevancia y confiabilidad.
- 7.1 Define metas y da seguimiento a sus procesos de construcción de conocimientos.
- 8.1 Propone manera de solucionar un problema y desarrolla un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.
- 8.2 Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.
- 8.3 Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.

Competencias disciplinares básicas

- 1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
- 2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
- 3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
- 4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
- 5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
- 6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
- 7. Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia.
- 8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.



Dinamización y motivación



Contextualización

Si das un vistazo a tu alrededor encontrarás una serie de figuras geométricas dentro del salón, en la mesa del profesor, en las esquinas del salón, en la forma del techo y de las ventanas, el pizarrón es un rectángulo, el piso está recubierto por mosaicos de cerámica, en fin, sería muy largo especificar todos los elementos que se encuentran en el salón con características geométricas, ya que son prácticamente todas. La pregunta que surge en este contexto es ¿cómo se calculo el tamaño del pizarrón? o la cantidad de mosaicos que se utilizó para recubrir el piso, o las dimensiones que deben poseer la mesa y las sillas de los alumnos, o los ángulos de inclinación que deben tener los techos para que escurra el agua de la lluvia. La respuesta está asociada con la aritmética, el álgebra y la geometría.

Antes de iniciar el desarrollo de los saberes que marca el contenido de nuestro programa de estudios, es importante que resuelvas los siguientes ejercicios y problemas, que plantean situaciones que implican identificar conocimientos previos sobre álgebra, los cuales son imprescindibles que sepas para poder entender, comprender y aplicar los nuevos saberes (saber-conocimientos, saber hacer-habilidades y saber ser-valores y actitudes) del bloque I de la asignatura de matemáticas II.

- Un canal se limpia en 28 días empleando 60 hombres, ¿cuántos hombres se necesitan para limpiarlo en 12 días?
a) 26 b) 120 c) 25 d) 140
- Un automóvil recorre 130 Km. con 14 litros de gasolina ¿Cuántos kilómetros puede recorrer con 45 litros?
a) 390 b) 418 c) 415 d) 420
- La suma de dos números es 540 y la diferencia de ambos números es 32. Hallar los números.
a) 258 y 282 b) 274 y 266 c) 254 y 286 d) 250 y 290
- Encuentra la solución del siguiente sistema de ecuaciones:
$$\begin{aligned} x - 2y &= 10 \\ 2x + 3y &= -8 \end{aligned}$$

a) 258 y 282 b) 274 y 266 c) 254 y 286 d) 250 y 290
- Los ángulos son complementarios y el ángulo menor es 20° menos que el ángulo mayor. ¿Cuánto mide cada uno?
a) mayor 30° y menor 60° b) mayor 100° y menor 80° c) mayor 55° y menor 35° d) mayor 120° y menor 60°

Autoevaluación

Cada inciso corresponde a la resolución de las situaciones planteadas.

	Pregunta de reflexión	Falso	Verdadero	Argumentación
a)	El ejercicio resuelto corresponde a una proporción directa			
b)	El ejercicio resuelto corresponde a una proporción inversa			

c)	Este ejercicio sólo se puede resolver aritméticamente.			
d)	La solución del sistema se puede verificar sustituyendo los valores de las raíces encontradas.			
e)	Los ángulos complementarios son dos ángulos que al sumarse dan 180°			

Análisis de la actividad

Calificación: 1 punto por cada respuesta correcta. 1 punto por una argumentación pertinente.	Subraya el puntaje alcanzado.	Significado de los resultados para iniciar el desarrollo de los contenidos del Bloque I del programa.
Estratégico	9-10	Identifica, comprende y aplica las propiedades de los números empleando expresiones algebraicas en operaciones básicas, e inclusive distingue ángulos complementarios de los suplementarios.
Autónomo	7-8	Identifica conceptos y estructura procesos de manera elemental.
Básico	5-6	Tiene nociones sobre algunos conceptos y operaciones básicas.
Inicial-receptivo	2-4	Tiene nociones débiles sobre algunos conceptos y operaciones básicas.
Nivel pre-formal	0-1	No logra identificar operaciones y conceptos básicos.

A partir de los resultados obtenidos en la actividad desarrollada, estamos en condiciones de establecer los objetivos y metas a alcanzar, de acuerdo a las unidades de competencia establecidas, para ello se proponen los siguientes niveles de aprovechamiento, los cuales serán determinados mediante la autoevaluación, coevaluación y la heteroevaluación a lo largo del bloque I, y a través de las actividades propuestas en las sesiones que abarcan los contenidos del programa de Matemáticas II.

Autoevaluación

Nivel estratégico: Resuelvo problemas utilizando la imaginación espacial para visualizar distintos tipos de ángulos y triángulos en objetos y figuras, aplicando las propiedades de los ángulos y empleando modelos aritméticos, algebraicos y gráficos en forma razonada.	100%
--	------



Nivel autónomo: Aplicó las propiedades de los ángulos y triángulos para la resolución de ejercicios y problemas.	80%
Nivel resolutivo: Interpreto las propiedades de los ángulos de cualquier triángulo, como son la suma de ángulos interiores y exteriores.	60%
Nivel inicial-receptivo: Utilizo la imaginación espacial para visualizar distintos tipos de ángulos y triángulos en objetos y figuras, realizando inferencias y deducciones sobre las figuras y construcciones que se me presentan.	30%
Nivel pre-formal: Distingo, defino y clasifico los tipos de ángulos y triángulos a partir de la información contenida en gráficos.	10%

Es muy importante trabajar en equipo cuando así sea requerido, socializando los resultados obtenidos en las actividades desarrolladas. Deberás entregar los productos solicitados en cada una de las actividades sugeridas. Algo muy importante para no olvidar, es respetar la participación de los compañeros y el tiempo establecido para las sesiones.

Sesión A: Clasifica los ángulos por su medida y posición de sus lados



Desarrollo de saberes

Del saber:

- Clasifico los ángulos por la medida que contienen.
- Clasifico los ángulos por la posición de sus lados en: opuestos por el vértice y adyacentes.

Del saber hacer:

- Distingo los tipos de ángulos a partir de la información contenida en gráficos.
- Realizo inferencias y deducciones sobre las figuras y construcciones que se me presentan.
- Aplico propiedades de ángulos para la resolución de problemas.
- Utilizo la imaginación espacial para visualizar distintos tipos de ángulos en objetos y figuras.

Del saber ser:

- Aprecio la utilidad de los diferentes ángulos para modelar situaciones geométricas.
- Muestro disposición a utilizar las propiedades de los ángulos en la resolución de problemas.
- Aporto puntos de vista personales con apertura y considero los de otras personas.

Conceptos básicos: punto, línea, segmento y plano

En física y en química seguramente ya habrás escuchado el concepto de átomo, definido como el elemento más pequeño del que se compone la materia (la materia como la realidad de todo lo que nos rodea), el cual, al integrarse a otros átomos dan lugar a las moléculas, tal vez el caso más conocido de esta interacción sean las moléculas del agua identificadas como H_2O .

Pues bien, al igual que en física y en química, en matemáticas también hay un elemento del cual se parte para entender las formas geométricas que nos rodean, y será nuestro punto de partida para definir otros conceptos de geometría, estamos hablando del PUNTO.

Como mencioné antes, los objetos que nos rodean podemos representarlos empleándolos como puntos, líneas y superficies; por ejemplo: la punta de una aguja, la posición que ocupas en un espacio determinado, el borde de una mesa, la fuerza con la que se desplazan objetos, una pantalla de proyección, la superficie de juego en el fútbol, etcétera.

Estos elementos son los que sirven de base a la Geometría, es decir, fundamentan sus principios, los cuales utilizamos arbitrariamente por intuición.

Punto

Este concepto es difícil de definir, aunque fácil de intuir; no tiene longitud, anchura ni espesor, pero lo podemos representar como la marca de la punta de una aguja en la tela o la huella de un lapicero en una hoja de papel. Considéralo un elemento clave para definiciones de otros conceptos que veremos un poco más adelante, se identifica con una letra mayúscula colocada a un costado por lo general.



Figura 1.1

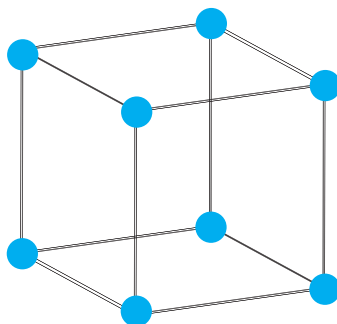


Figura 1.2



Línea

Posee longitud pero carece de anchura y espesor. Está formada por una sucesión infinita de puntos. Cuando los puntos están alineados o son colineales, la línea recibe el nombre de RECTA.

Representaciones de líneas las podemos encontrar en el horizonte, que se forma con la unión del mar y el cielo visto a la distancia desde una playa. De una manera más práctica, podríamos ilustrar esta idea pintando puntos en la pizarra unos a continuación de otros siguiendo un mismo sentido, vistos de cerca te podrás percatar que son puntos, pero a la distancia estos puntos se unen formando una línea.



Figura 1.3



Figura 1.4 La línea es vista con regularidad en nuestra vida cotidiana.

Semirrecta

Es parcialmente una recta, considerada como un conjunto de puntos unos a continuación de otros en una misma dirección, que cuenta con un punto de partida llamado origen, pero que del otro extremo no conoce límite o tiende hacia infinito, su notación está indicada por dos letras mayúsculas, una que representa el origen y otra por donde pasa. Ejemplo:

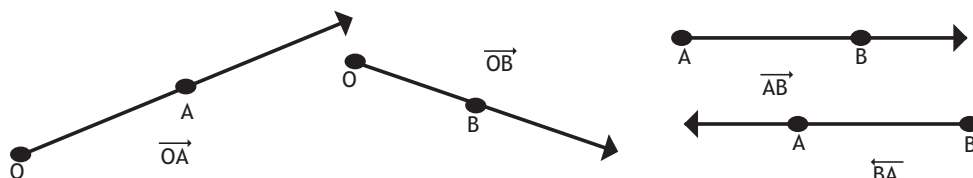


Figura 1.5

Segmento de recta

Es el conjunto de puntos que pertenecen a una línea recta, ubicados entre otros dos llamados extremos del segmento. Se designa por las letras mayúsculas que representan a estos puntos o por una letra minúscula. Así, el siguiente segmento se puede nombrar como: "a" o bien como segmento CD.

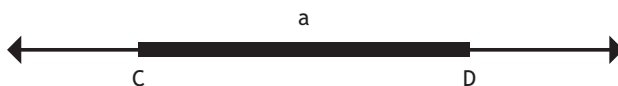


Figura 1.6

Plano

Un plano tiene longitud y anchura pero no espesor. Por lo general, se representa por una letra minúscula y puedes visualizarlo como una pared, la superficie de una mesa o el mismo piso.



Figura 1.7

Cabe señalar, que las representaciones gráficas que utilizemos nos proporcionan solamente una idea para representar nuestra realidad.

Hoy en día la utilización de estos elementos para representar la realidad a través de simuladores elaborados por programas de informática y apoyados en el diseño gráfico, son fuente de una increíble imaginación que no conoce límites, y de lo cual somos testigos a través de los medios de comunicación y de los juegos o películas, que se valen de ellos para presentar información o escenas de una realidad virtual.

Estamos en el comienzo de un mundo de posibilidades de aplicación práctica de los conocimientos, que serán desarrollados a lo largo de la asignatura de matemáticas II, y que son la base de futuros saberes a alcanzar en estudios superiores, lo nuestro es crear los cimientos a partir de conocimientos y aplicaciones básicas.

Ángulos



Problematización

En la presente sesión se pretende desarrollar saberes que se refieren a ángulos. ¿Qué son? ¿Para qué sirven? ¿Por qué el hombre los definió y se ha ocupado de estudiarlos? ¿Qué situaciones nos permiten resolver?

Responde a cada pregunta desarrollando un trabajo de investigación, elaborando a partir de ella un organizador mental para registrar tus respuestas. Observa de qué forma el hecho de ordenar tus ideas y clasificarlas, te ayuda a conceptualizar mejor. El facilitador te orientará sobre la mejor manera de presentar los resultados de tu trabajo.



Contextualización

Los ángulos son una herramienta necesaria en diversas situaciones, que van desde cálculos de corte científico, para saber la dirección de una nave que debe escapar de la atmósfera terrestre, hasta la forma en la que deben colocarse las butacas y la pantalla en una sala de cine, para que la visibilidad de los asistentes sea la adecuada, o el ángulo que debe tomar una bola de billar para lograr un tiro efectivo.





Desarrollo de saberes

Definición de un ángulo

Tomemos dos trazos a manera de semirrectas, de tal manera que ambas tengan como punto de partida el mismo origen al que indicaremos con la letra A, y las semirrectas pasaran por un punto cada uno indicado con las letras B y C, como a continuación se describe gráficamente:

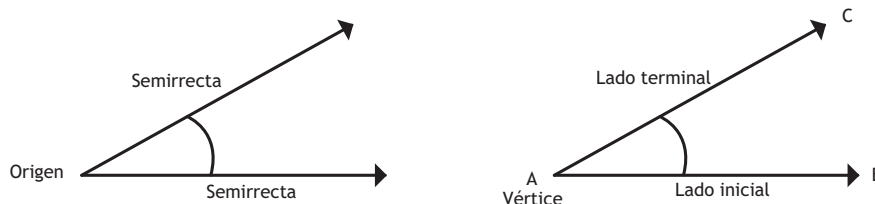


Figura 1.8 Definición de ángulo.

Si describimos la imagen, *ángulo* se define como una figura plana y abierta formada por dos semirrectas que parten de un mismo origen.

Ampliando la definición, podemos decir que el origen o punto de partida de las semirrectas se llama vértice, y las semirrectas se denominan lados del ángulo.

Existen diferentes formas para nombrar un ángulo: Indicando la letra de su vértice, señalando la letra en su interior y usando las tres letras que conforman el ángulo (es importante mencionar que la letra que aparece en medio siempre indicará el vértice), como se muestra en la siguiente figura:

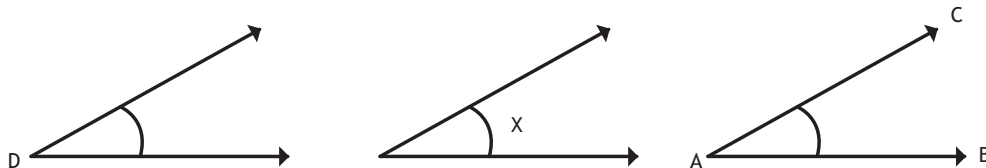


Figura 1.9



Dinamización y motivación

Considerando la forma de las figuras anteriores, a tu juicio ¿qué propiedades de los ángulos serán objeto de estudio en esta sesión?, es decir, que aspectos de un ángulo son importantes saber para aplicarlos en la solución de situaciones de la vida cotidiana, como por ejemplo en la construcción de puentes, pasos a desnivel o en la forma de algunos techos y fachadas de edificios, por citar algunos casos. O bien, ubicándonos en el lugar de los antiguos egipcios que construyeron la gran pirámide, qué conocimientos debieron tener para darle la forma que todos conocemos de este monumento.



Desarrollo de saberes

Propiedades de los ángulos

Las propiedades más importantes de un ángulo son su medida y el sentido en el que se toman o se construyen.

Medición de ángulos

El sistema sexagesimal es el más empleado para medir ángulos, utiliza grados ($^{\circ}$), minutos ($'$) y segundos ($''$) para ello:

$1^\circ = 60'$ (un grado equivale a 60 minutos) y $1' = 60''$ (un minuto equivale a 60 segundos)

Esta modalidad para medir ángulos toma como referente a la circunferencia, la cual es dividida en 360 partes iguales denominadas grados, estos a su vez se dividen en 60 partes que reciben el nombre de minutos, y los minutos al igual que sucede con la lectura de las horas, también se dividen en 60 partes llamadas segundos, sólo que a diferencia de como se lee la hora en un reloj, **los ángulos se miden y trazan en sentido contrario a las manecillas del reloj**.

En este punto te pediría que consultaras libros, medios electrónicos o alguna otra fuente de información que te permita desarrollar las ideas básicas de la medición de ángulos bajo dicho sistema, y otros poco conocidos. Selecciona una fuente que vayas a referir y justifica tu selección. Si compartes tu trabajo ayudarás a tus compañeros a entender otras formas de medir ángulos; todos necesitamos de todos para comprender mejor los nuevos saberes.

Sugerimos tengas a la mano tu libreta u hojas en blanco, regla, compas y un semi-círculo para que con tu facilitador incursionen en la práctica de trazos para medir ángulos. A continuación ahondaremos en un tema que te ayudará a entender dónde podemos ubicar los trazos realizados, es decir, cómo se pueden clasificar los ángulos.

Es pertinente señalar que el concepto de ángulos negativos se considera porque su realidad se manifiesta en un sentido negativo o en el mismo sentido que las manecillas del reloj, este concepto será ampliado más adelante.

Clasificación de los ángulos por sus medidas

Retomando la idea anterior, además de la medida, el sentido de construcción del ángulo es otra característica fundamental. En las siguientes figuras se mostrarán los desplazamientos del lado terminal o final con respecto al lado inicial, para identificar hacia dónde se dirige la amplitud del ángulo, que como ya sabemos se genera en sentido contrario a las manecillas del reloj, de esta manera tenemos la primera característica, que nos permitirá conocer una primera clasificación de los ángulos de acuerdo a su medida o magnitud. Por su medida los ángulos se clasifican en:

Ángulo agudo. - Es el ángulo que mide más de 0° pero menos de 90° .

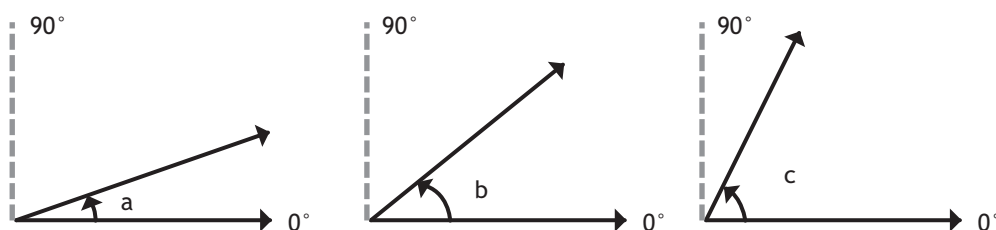


Figura 1.10 Ángulos agudos.

Ángulo Recto. - Es el ángulo que mide exactamente 90° . Se simboliza con un pequeño cuadro en el interior del ángulo.

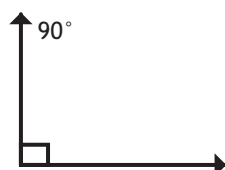


Figura 1.11 Ángulo recto.

Angulo Obtuso. - Es el ángulo que mide más de 90° pero menos de 180°

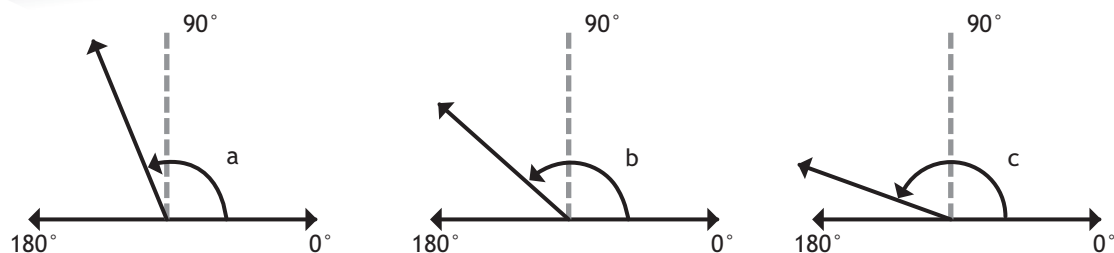


Figura 1.12 Ángulos Obtusos.

Angulo llano, rectilíneo, extendido, plano o de lados colineales. - Es el ángulo que mide exactamente 180° .

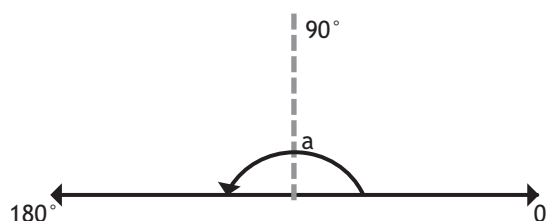


Figura 1.13 Ángulo llano.

Angulo entrante o cóncavo. - Es el ángulo que mide más de 180° pero menos de 360° .

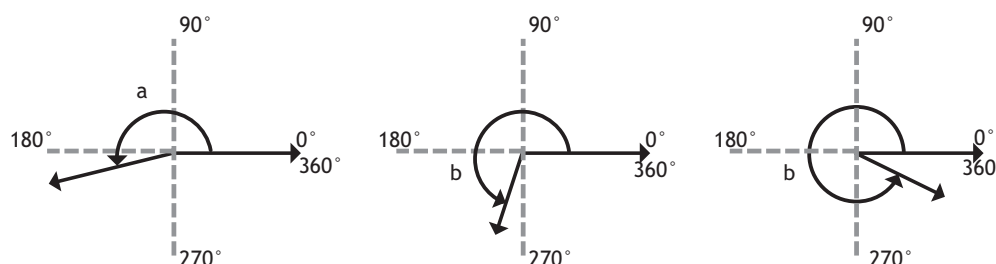


Figura 1.14 Ángulos entrantes o cóncavos.

Angulo perigonal. - Es el ángulo que mide exactamente 360° .

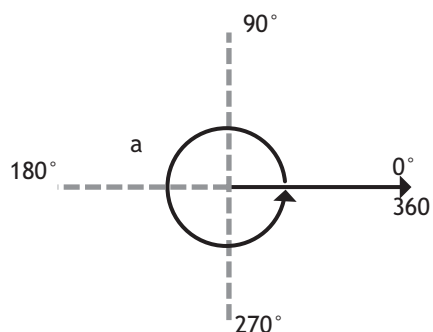


Figura 1.15 Ángulo perigonal.

Como seguramente te habrás dado cuenta los únicos ángulos que reciben un nombre concreto por su exactitud en la medida que poseen son los ángulos: recto (90°), llanos o rectilíneos (180°) y perígono (360°). Los demás oscilan entre ciertas medidas, parámetros o límites.

Considero pertinente introducir una definición sobre ciertos tipos de ángulos, que te serán de mucha utilidad práctica para la comprensión de situaciones de la vida cotidiana, y son: **Ángulo de elevación** y **Ángulo de depresión**.

Bien, imagínate como un observador en el campo, a ratos observas al cielo para admirar el vuelo de los pájaros, y a ratos vez algún animal terrestre. Con esta idea tendríamos una imagen como la siguiente:

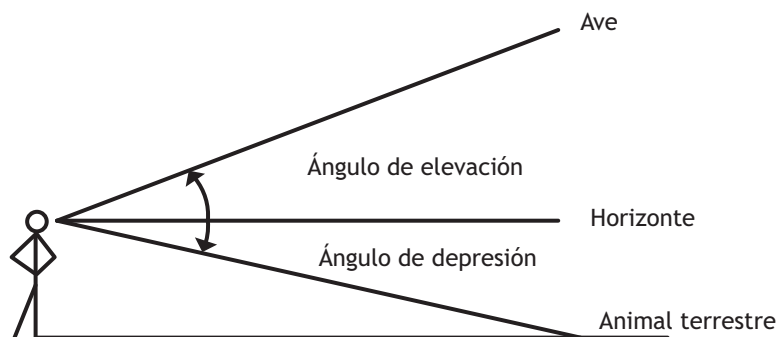


Figura 1.16

Como podrás darte cuenta, entre la visión orientada al horizonte y el traslado que hacemos de nuestra vista para observar a un pájaro, formamos un ángulo conocido como ángulo de elevación. Si volvemos la vista hacia un animal terrestre, también se forma un ángulo entre la horizontal y la línea de visión, llamado ángulo de depresión.

Toma nota de lo anterior, ya que muy pronto haremos una aplicación concreta de este concepto en la solución de algunas situaciones.

Actividad de aprendizaje 1

Con base en lo anterior, podemos realizar algunas actividades que te permitan desarrollar el aprendizaje de estos ángulos, sobre todo, adquirir la habilidad de identificarlos en cualquier tipo de figura.

1. Identifica en la figura, el tipo de ángulo o ángulos que contiene tomando en cuenta su medida de acuerdo con lo siguiente:

Segmento AE perpendicular al segmento CF, es decir, forman al cortarse cuatro ángulos de 90° :

$\angle AHC$ _____

$\angle AHD$ _____

$\angle AHE$ _____

$\angle BHG$ _____

$\angle FHA$ _____

2. Responde a las siguientes cuestiones, tomando en cuenta la figura anterior:

- a) ¿Identificas algún ángulo perigonal? ¿Cómo lo nombrarías con las letras disponibles?

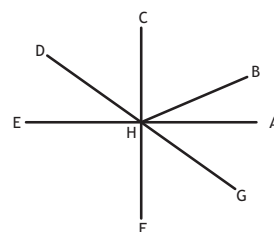


Figura 1.17



- b) ¿Cuántos ángulos en total puedes distinguir? Comparte tus observaciones con el grupo y con tu docente.

- c) ¿Estás considerando el sentido de construcción de los ángulos? De ser así, ¿cuántos nuevos se agregan a tu lista?

3. ¿Puedes distinguir ángulos de la misma medida? Comparte tus observaciones para llegar a acuerdos con el grupo.

Hemos hablado en este apartado de lo que son los ángulos, e incluso, de la clasificación de los mismos a partir de su medida. Sin embargo, hasta el momento no contamos con elementos que nos permitan medirlos.

Actividad de aprendizaje 2

La actividad que se te propone ahora resultará divertida y enriquecedora.

Tomando en cuenta las manecillas de un reloj como los lados del ángulo, establece algún mecanismo que te permita medir algunos de estos, tomando como la mínima unidad el minuto marcado en el reloj. A partir de ello, construye con cartón, papel o material reciclado, un modelo de “medidor de ángulos” y compártelo con tus compañeros y tu docente.

Al final, reflexionen acerca de los límites del modelo creado, en cuanto a los tipos de ángulos que puede medir, la precisión, la facilidad de manejo, etc.

Para terminar, compara tu modelo con un transportador convencional, y reflexiona en las siguientes líneas acerca de las semejanzas y diferencias que existen entre ambos.

Sesión B: Parejas de Ángulos



Desarrollo de criterios

Del saber

- Clasifico los ángulos por la suma de sus medidas en: complementarios, suplementarios y conjugados.

Del saber hacer

- Distingo los tipos de ángulos a partir de la información contenida en gráficos.
- Realizo inferencias y deducciones sobre las figuras y construcciones que se me presentan.
- Aplico propiedades de ángulos para la resolución de problemas.
- Utilizo la imaginación espacial para visualizar distintos tipos de ángulos en objetos y figuras.

Del saber ser

- Aprecio la utilidad de los diferentes ángulos para modelar situaciones geométricas.
- Muestro disposición a utilizar las propiedades de los ángulos en la resolución de problemas.
- Aporto puntos de vista personales con apertura y considero los de otras personas.



Contextualización

En la siguiente figura podemos distinguir varios ángulos, y según sus medidas, también varios tipos de ellos. Tomando en cuenta tus cursos anteriores de matemáticas, ¿puedes determinar algunas parejas de ángulos que tengan elementos particulares o comunes?

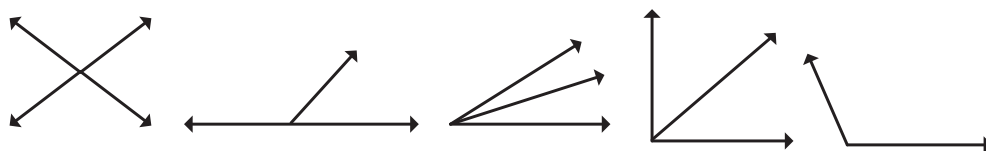


Figura 1.18



Desarrollo de saberes

La importancia de la presente sesión radica en la identificación de los ángulos que al tomarse con otros, presentan elementos comunes (como el lado o un vértice), o bien, sus medidas consiguen valores básicos en el estudio de las Matemáticas, tales como 90° y 180° .

En este caso, las parejas de ángulos tienen varias clasificaciones, que si bien son importantes y debemos conocerlas, su aprendizaje se puede economizar de alguna manera, para apoyarte en situaciones en que requieras algún dato que no involucre tanto los aspectos teóricos (en otras palabras, hacer flexible la identificación y la aplicación de los elementos teóricos).



Las parejas de ángulos se clasifican de la siguiente manera:

Por la posición de sus lados

Ángulos adyacentes
Ángulos opuestos por el vértice
Ángulos formados por dos secantes o dos paralelas cortadas por una transversal

Por la suma de sus medidas

Ángulos complementarios
Ángulos suplementarios

Clasificación por la posición de sus lados

Cuando están agrupados por parejas, los ángulos pueden ser:

Ángulos Adyacentes

Son dos ángulos que comparten un mismo vértice y poseen un lado en común. Ejemplo:

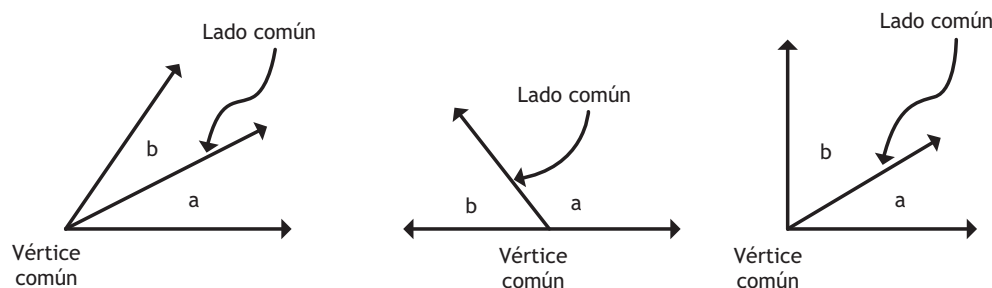


Figura 1.19 Ángulos adyacentes.

En los ejemplos los ángulos $\angle a$ y $\angle b$ son adyacentes. Más adelante podrás observar que esta característica la poseen otras parejas de ángulos.

Ángulos opuestos por el vértice

Son aquellos que se forman al dos rectas, pero que no son adyacentes. Otra forma de definirlos es: son aquellos ángulos en los que uno se forma con la prolongación de los lados del otro, y que comparten el vértice.

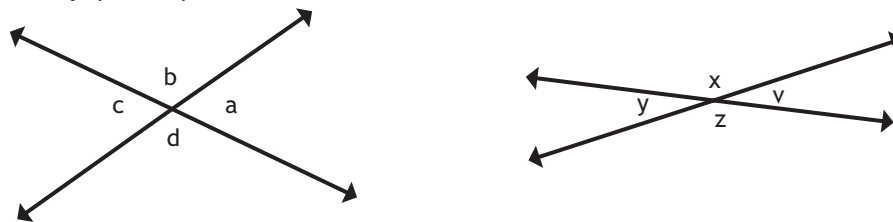


Figura 1.20 Ángulos opuestos por el vértice.

El $\angle a$ y el $\angle c$ son opuestos por el vértice	El $\angle v$ y el $\angle y$ son opuestos por el vértice
El $\angle b$ y el $\angle d$ son opuestos por el vértice	El $\angle x$ y el $\angle z$ son opuestos por el vértice
El $\angle a$ y el $\angle b$ NO son opuestos por el vértice	El $\angle v$ y el $\angle x$ NO son opuestos por el vértice
El $\angle c$ y el $\angle d$ NO son opuestos por el vértice	El $\angle y$ y el $\angle z$ NO son opuestos por el vértice

Ángulos consecutivos

Como una variante o extensión del concepto sobre los ángulos adyacentes, debemos considerar los ángulos consecutivos, que son aquellos que comparten un mismo vértice y tienen un lado en común a la vez; es decir, cuando se generan unos a continuación de otros. Ejemplo:

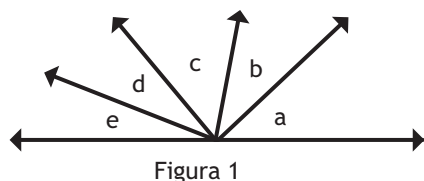


Figura 1

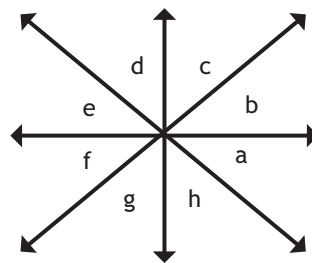


Figura 2

Figura 1.21 Ángulos consecutivos.

En estos casos los ángulos de la figura a y de la figura b son consecutivos.

Observando detenidamente los ángulos y asociando los tipos de ángulos de acuerdo a su medida, podemos inferir las siguientes características o propiedades que presentan los ángulos consecutivos:

“La suma de los ángulos consecutivos trazados a partir de una línea recta suman 180° ”

$$\angle a + \angle b + \angle c + \angle d + \angle e = 180^\circ$$

“La suma de los ángulos consecutivos trazados alrededor de un punto suman 360° ”

$$\angle a + \angle b + \angle c + \angle d + \angle e = 180^\circ$$

Ángulos formados por dos rectas paralelas cortadas por una secante o transversal



Contextualización

Ejemplos de rectas paralelas en la vida cotidiana se encuentran en la mayor parte de las avenidas y calles de la ciudad y en casi todas las construcciones. Los muros o pilares que sostienen los techos de las casas son paralelos entre sí; en nuestra ciudad las calles son impares y pares, imagina que tanto las calles pares como las impares, son paralelas de dos en dos.





Figura 1.22

En este momento hacemos un alto, para clarificar un concepto que seguramente tienes en mente producto de la palabra “paralelas”, las paralelas son dos líneas rectas, que por más que se extiendan o prolonguen, no llegan a cortarse; es decir, se encuentran a una misma distancia una de otra en cada uno de sus puntos. Ejemplo:

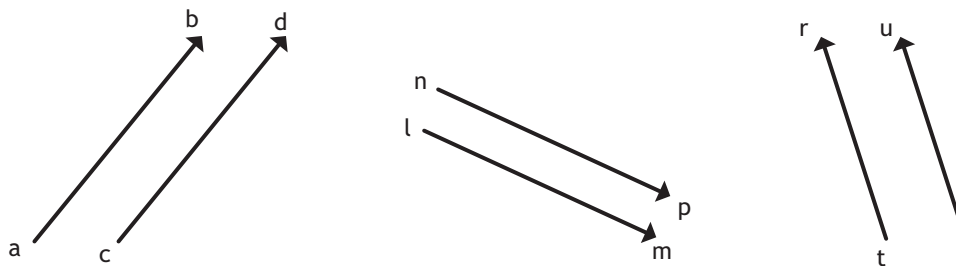


Figura 1.23

El símbolo $\parallel$ indica paralelismo entre dos rectas, por lo tanto para los ejemplos indicados tenemos que:

Las rectas $\overline{ab} \parallel \overline{cd}$; $\overline{lm} \parallel \overline{np}$ y $\overline{tr} \parallel \overline{vu}$, es decir, cada pareja de rectas son paralelas.



Desarrollo de saberes

Antes de iniciar con la definición de algunos conceptos y principios sobre ángulos que se forman a partir de dos rectas paralelas cortadas por una secante, te propongo la siguiente actividad para intuir y deducir algunas características y propiedades sobre estos tipos de ángulos.

En una hoja tamaño carta traza una línea que divida en dos partes a dicha hoja, a continuación, traza otra línea que una las puntas opuestas de la hoja, de tal manera que la hoja se divida en cuatro partes, las cuales vamos a nombrar con una letra, de tal forma que se puedan identificar claramente. Ejemplo (ver figura 1.24):

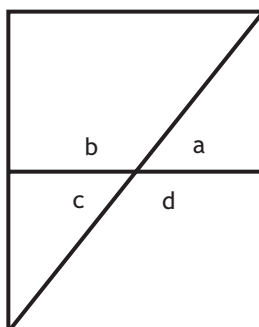


Figura 1.24

Formemos un pequeño rompecabezas con las partes cortando la hoja en cuatro, y unámoslas de tal manera que la parte c se una con la parte b, y que la parte a la adjuntes con la parte d, cada par por separado. Seguramente podrás observar algo similar a la siguiente representación, o tal vez tu imaginación espacial o acomodo de las partes inviertan las imágenes; en todo caso la unión de las partes te darán la mitad de la hoja y coincidirán plenamente:

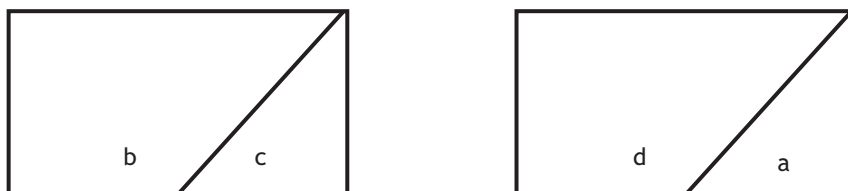


Figura 1.25

Lo importante es descubrir que los ángulos a, b, c y d son imágenes al momento de cortar y formar las figuras, por lo cual podemos deducir lo siguiente:

Los ángulos formados necesariamente caen en alguna de las siguientes opciones:

- Las parejas de ángulos son adyacentes.
- Uno de los ángulos es agudo y el otro obtuso; además, entre los dos forman un ángulo llano, es decir, la suma de sus medidas es 180° .
- Los ángulos se repiten, debido a que se forman en la imagen sus opuestos por el vértice.

A partir de lo anterior, ¿qué sucede si a la misma figura le agregamos una o más rectas paralelas a alguna de las dos principales? ¿Cómo son los ángulos que se forman?

Veamos, si en lugar de dividir la hoja por la mitad lo hacemos en dos partes mediante líneas paralelas en forma horizontal, y luego trazamos una diagonal que conecte dos puntos opuestos de la hoja. Te pondré el ejemplo y tú nombrarás las partes, las dividirás y formarás las uniones correspondientes para identificar las partes que coincidan en forma de rompecabezas (te sugiero uses una hoja tamaño carta tomada de una cartulina para darle mayor rigidez a las partes).

Tu facilitador te ayudará a comprender este ejercicio de ubicación espacial y conformación de ángulos. Lo importante es reconocer que se forman ángulos que son una imagen de sus correspondientes reflejos y al integrarse forman un ángulo llano o rectilíneo, es decir que miden 180° .

Traslademos nuestras ideas a la siguiente figura, donde las líneas transversales son paralelas entre sí:

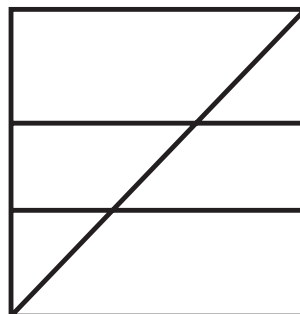


Figura 1.26



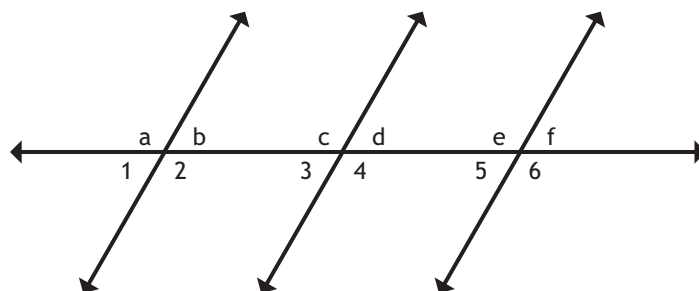


Figura 1.27

Utilizando tu imaginación sobre los espacios que visualizas, estarás de acuerdo en que los ángulos a , c y e son todos de la misma medida, lo mismo que sus respectivos reflejos 2 , 4 y 6 (opuestos por el vértice), y que lo mismo ocurre con los ángulos b , d y f , así como con sus reflejos 1 , 3 y 5 . Lo anterior obedece a que, al dibujar rectas paralelas, estamos generando repeticiones de la misma figura, o en otras palabras, la trasladamos de lugar. ¡Sorprendente!

Luego podemos realizar las siguientes conclusiones:

1. Cuando tenemos rectas paralelas cortadas por una transversal, básicamente se forman dos tipos de ángulos principales, uno de los cuales es agudo, y el otro obtuso.
2. Todos los ángulos agudos que son reflejo del principal, son de la misma medida o iguales, así como todos los ángulos obtusos formados y sus correspondientes imágenes y reflejos (opuestos por el vértice).
3. La suma de la medida de un ángulo agudo con la correspondiente al obtuso es 180° .
4. Sin importar la cantidad de rectas paralelas que se aumenten, siempre que se considere la misma transversal, los ángulos seguirán siendo reflejo del agudo y obtuso básicos.

Actividad de aprendizaje 3

Con base en lo anterior y a partir de la figura que se presenta, determina los valores de los ángulos identificados con las letras indicadas en la grafica, considerando lo siguiente:

las rectas $\overline{lm} \parallel \overline{op}$ y $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3 \parallel l_4$:

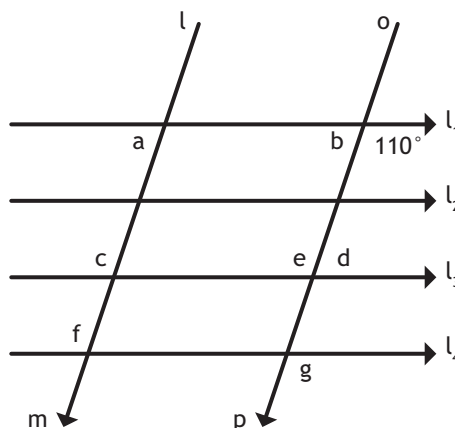


Figura 1.28

Comparte tus resultados con el resto del grupo, y escribe tus comentarios respecto de la actividad anterior, y registra en tu libreta las opiniones más importantes de tus compañeros respecto a la misma actividad.



Desarrollo de saberes

Partiendo de las conclusiones alcanzadas estamos listos para adentrarnos a otra clasificación de los ángulos, que nos será de gran ayuda para entender algunas propiedades de los triángulos y de los cuadriláteros. Bien, comencemos.

Sea $\overline{mn} \parallel \overline{op}$ tenemos que:

Ángulos internos. Son aquellos que quedan entre las dos rectas que son cortadas por la transversal, es decir, son los ángulos $\angle 3$, $\angle 4$, $\angle 5$ y $\angle 6$. Como se muestra en la figura.

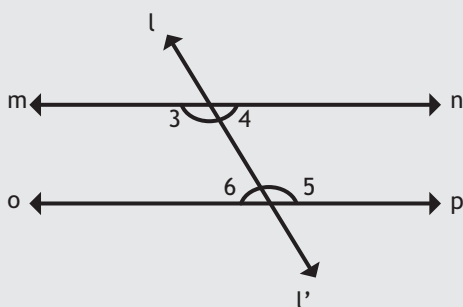


Figura 1.29 Ángulos internos.

Ángulos externos. Son aquellos que quedan ubicados fuera de las rectas paralelas, es decir, son los ángulos $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 7$ y $\angle 8$. Como se muestra en la figura.

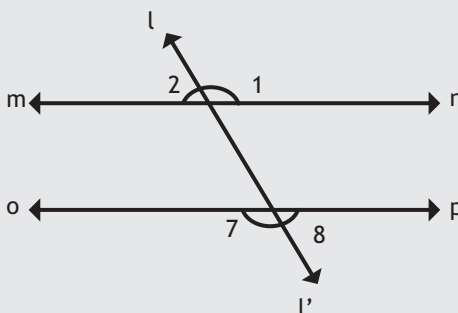


Figura 1.30 Ángulos externos.

Ángulos alternos internos. Son dos ángulos interiores no adyacentes y en lados distintos de la transversal, y poseen la característica de que son iguales. $\angle 3 = \angle 5$, $\angle 4 = \angle 6$.

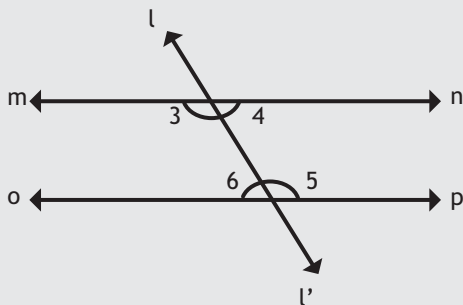


Figura 1.31 Ángulos alternos internos.

Ángulos alternos externos. Son dos ángulos exteriores no adyacentes y en lados distintos de la transversal, los cuales son iguales; es decir $\angle 1 = \angle 7$, $\angle 2 = \angle 8$.

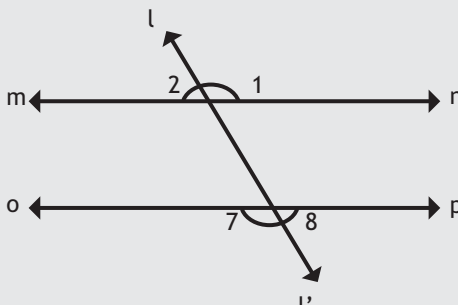
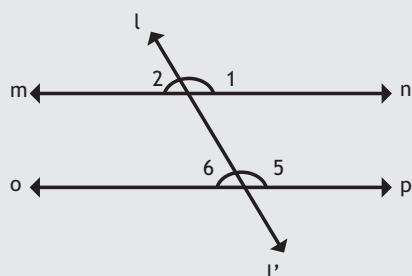


Figura 1.32 Ángulos alternos externos.



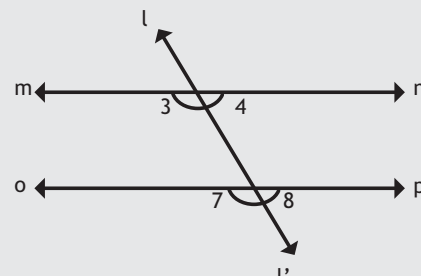
Ángulos correspondientes. Son dos ángulos no adyacentes situados del mismo lado de la transversal, uno interno y el otro externo, cuya característica o propiedad principal es la de ser iguales. Podemos identificar cuatro parejas de ángulos de este tipo, ejemplo:



$$\angle 1 = \angle 5$$

$$\angle 2 = \angle 6$$

Figura 1.33

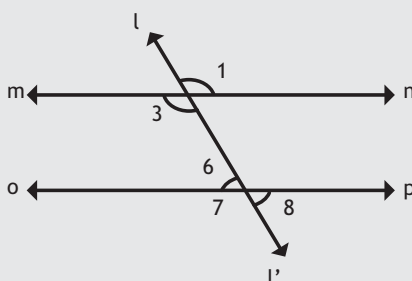


$$\angle 3 = \angle 7$$

$$\angle 4 = \angle 8$$

Figura 1.34

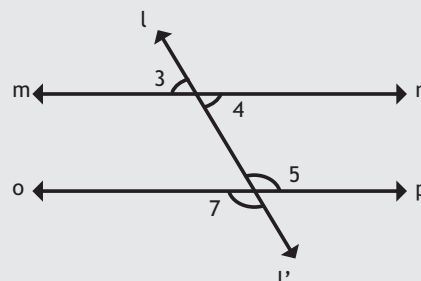
Ángulos opuestos por el vértice. Son dos ángulos no adyacentes que comparten un mismo vértice y son reflejos uno del otro, y por lo tanto son iguales. Podemos identificar cuatro parejas de ángulos de este tipo, ejemplo:



$$\angle 1 = \angle 3$$

$$\angle 6 = \angle 8$$

Figura 1.35



$$\angle 2 = \angle 4$$

$$\angle 5 = \angle 7$$

Figura 1.36

Ángulos conjugados internos. Son aquellos ángulos internos no adyacentes, situados del mismo lado de la transversal. Su principal propiedad es que son suplementarios, es decir, la suma de sus medidas es igual a 180° . Las parejas que se forman de este tipo son:

$$\angle 3 + \angle 6 = 180^\circ$$

$$\angle 4 + \angle 5 = 180^\circ$$

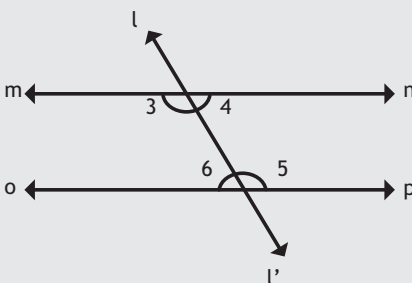


Figura 1.37 Ángulos conjugados internos.

Ángulos conjugados externos. Son aquellos ángulos externos no adyacentes, situados del mismo lado de la transversal. Su principal propiedad es que son suplementarios, es decir, la suma de sus medidas es igual a 180° . Las parejas que se forman de este tipo son:

$$\angle 1 + \angle 8 = 180^\circ$$

$$\angle 2 + \angle 7 = 180^\circ$$

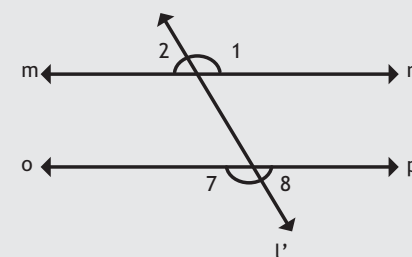


Figura 1.38 Ángulos conjugados externos.

Como seguramente te habrás dado cuenta, tanto los ángulos alternos internos, alternos externos, los correspondientes ubicados en cada uno de los lados de la transversal y los opuestos por el vértice son iguales, los únicos que sumados dan 180° son los conjugados.

Bien, veamos a continuación algunos ejemplos de cómo se aplican los elementos anteriores. Cabe señalar que mostraremos de modo explícito el uso de la técnica breve y la teoría tradicional.

Ejemplo.

Determina el valor de x en la siguiente figura:

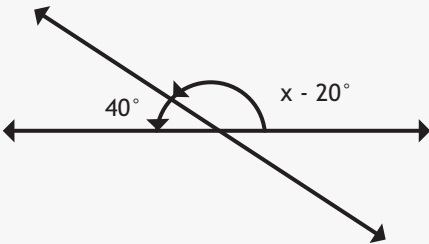


Figura 1.39

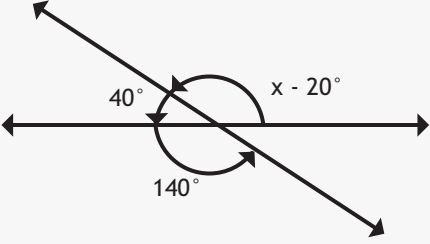


Figura 1.40

$40^\circ + x - 20^\circ = 180^\circ$	Los suman 180°	$40^\circ + 140^\circ = 180^\circ$	Los $\angle$ s suman 180°
$x + 20^\circ = 180^\circ$	Efectuando operaciones.	$x - 20^\circ = 140^\circ$	Por ser $\angle$ s opuestos por el vértice.
$x = 180^\circ - 20^\circ$	Despejando x	$x = 140^\circ + 20^\circ$	Despejando x
$x = 160^\circ$	Solución	$x = 160^\circ$	Solución

Como podrás observar, se emplearon dos formas distintas para determinar el valor de x , pero en ambos casos se aplicaron los conocimientos recién adquiridos sobre ángulos.

Ejemplo:

Determina el valor de las variables que aparecen en la siguiente figura:

Sean paralelas $\overline{l_1 l_2} \parallel \overline{l_3 l_4}$; $\overline{mn} \parallel \overline{op}$



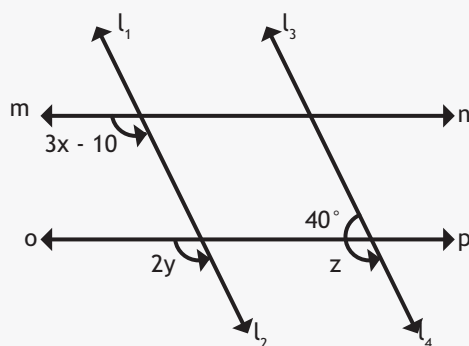


Figura 1.41

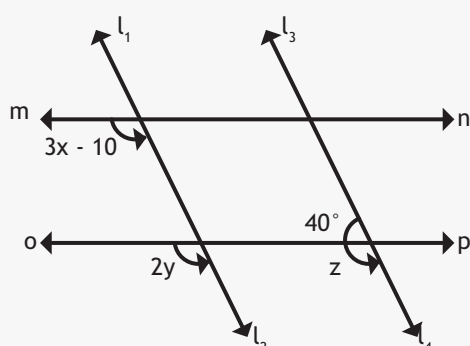


Figura 1.42

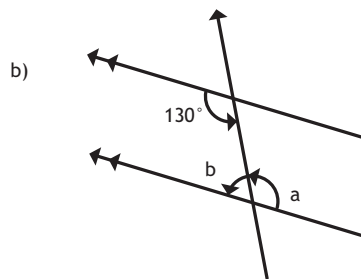
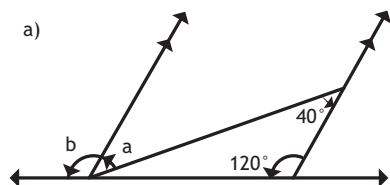
Todos los ángulos agudos miden 40°		El $\angle z$ es adyacente al $\angle 40^\circ$ y juntos forman un $\angle$ llano, por lo tanto el $\angle z = 140^\circ$.	
Todos los ángulos obtusos miden 140°			
Por lo tanto:		$2y = z$	Por ser correspondientes
$3x - 10 = 140^\circ$	Por ser un obtuso	$2y = 140^\circ$	Sustituyendo el z .
$3x = 140^\circ + 10^\circ$	Transponiendo términos	$y = \frac{140}{2}$	Despejando y
$x = \frac{150}{3}$	Despejando x	$y = 70^\circ$	Solución
$x = 50^\circ$	Solución	$3x - 10 = 2y$	Por ser correspondientes
$2y = 140^\circ$	Por ser un obtuso	$3x - 10 = 140^\circ$	Sustituyendo el $\angle 2y$.
$y = \frac{140}{2}$	Despejando y	$3x = 140^\circ + 10^\circ$	Transponiendo términos
$y = 70^\circ$	Solución	$x = 50^\circ$	Solución
Se emplean pocos elementos teóricos.		La solución se fundamenta más en el empleo de elementos teóricos.	

Como se observa en el razonamiento anterior, los resultados son idénticos. Sin embargo, el emplear los elementos teóricos adecuados te permitirá adiestrarte en este tipo de ejercicios, que en un futuro pueden resultar definitivos en la continuación de tus estudios. En resumen, debes juzgar la situación y el escenario de aplicación, así como el tiempo con el que cuentas para resolver el tipo de prueba que enfrentas, para tomar tu decisión.

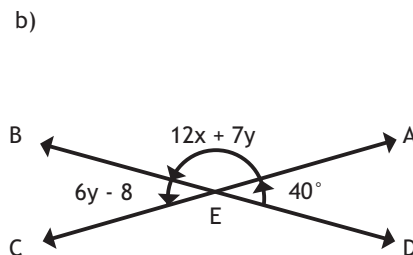
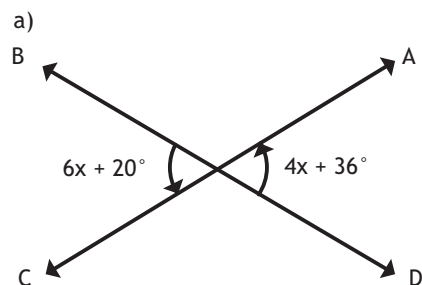
Actividad de aprendizaje 4

Es momento de poner en práctica tus conocimientos sobre ángulos, fundamenta tus respuestas aplicando las propiedades y conceptos sobre ángulos formados entre paralelas que se cortan por líneas transversales. Realiza los ejercicios en tu libreta.

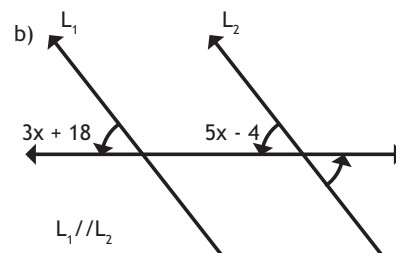
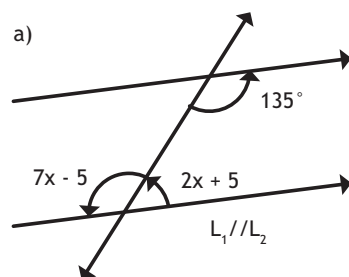
1. Determina el valor de los ángulos indicados con las letras a y b. Justifica tu respuesta.



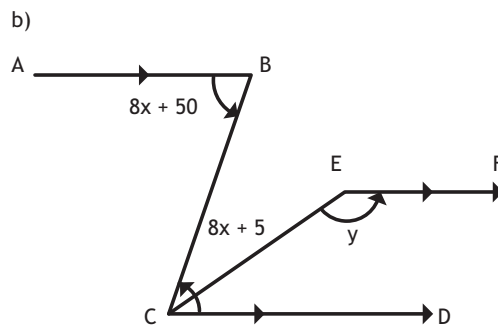
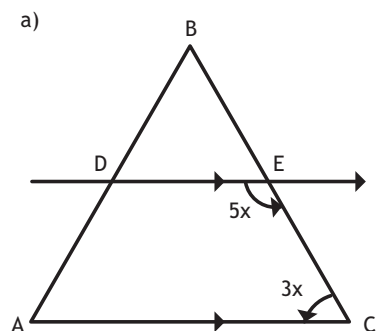
2. Halla el valor de las variables x e y, así como el de los ángulos. Argumenta tus respuestas.



3. Calcula el valor de variables x e y, verifica tus resultados sustituyendo los valores encontrados en las ecuaciones de primer grado. Argumenta tus respuestas.



4. En la figura del inciso a) debes determinar el valor de los ángulos y. En la figura del inciso b) debes considerar lo siguiente: y calcular la medida de los ángulos y



5. Determina el valor de las incógnitas y el de cada ángulo.

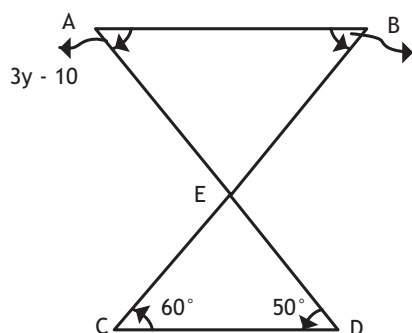
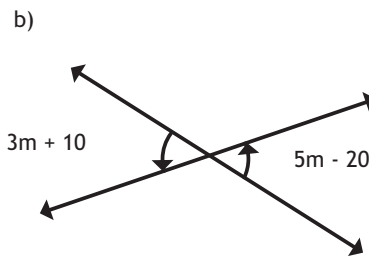


Figura 1.47



Compara con tus compañeros los resultados obtenidos y reflexiona sobre la forma en la que cada uno de ellos resolvió las situaciones planteadas, de seguro encontrarás más de una forma de plantear, resolver y argumentar las respuestas de cada ejercicio. Toma nota de ello en tu libreta.



Desarrollo de saberes

Ángulos complementarios y suplementarios

Las parejas de ángulos también se pueden clasificar atendiendo la suma de sus medidas en:

Ángulos complementarios	Ángulos suplementarios	Ángulos conjugados
Figura 1.43	Figura 1.44	Figura 1.45
Figura 1.46	Figura 1.47	Figura 1.48
Son dos ángulos cuyas medidas suman 90° , pueden ser adyacentes o no.	Son dos ángulos cuyas medidas suman 180° . Pueden ser adyacentes o no.	Son dos ángulos cuyas medidas suman de 360°

Trabajemos algunas situaciones que involucran a estas parejas de ángulos.

Ejemplo 1

- Se sabe que dos ángulos son complementarios y que la diferencia de sus medidas es 56° . ¿Cuál es la medida de cada uno?

Solución:

Bien, a partir de tal información, podemos establecer el siguiente razonamiento:

Sean a y b las medidas de los ángulos en cuestión, entonces:

Afirmaciones	Justificaciones
$a + b = 90^\circ$	Por ser $\angle$ s complementarios
$a - b = 56^\circ$	Dato dado en la situación
$b = a - 56^\circ$	Despejando b
$a + a - 56^\circ = 90^\circ$	Sustituyendo el despeje de b en la ecuación
$2a = 90^\circ + 56^\circ$	Transponiendo términos y efectuando operaciones
$a = \frac{146^\circ}{2}$	Despejando a para hallar su valor
$a = 73^\circ$	Valor de a
Si $a = 73^\circ$, luego entonces $b = 17^\circ$	Por la definición de $\angle$ s complementarios

En el caso de que situaciones como la anterior se incluyan en pruebas objetivas (reactivos de opción múltiple), podrías enfrentarlas de la siguiente manera:

- Se sabe que dos ángulos son complementarios, y que la diferencia de sus medidas es 56° . ¿Cuál es la medida de cada uno?

a) 20° y 76°	b) 35° y 55°	c) 17° y 73°	d) 12° y 68°
----------------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------

Solución:

Lo primero es leer con atención la base del reactivo y ubicar ¿qué estoy buscando? Acto seguido, nos planteamos la pregunta: ¿qué características tiene o qué condiciones cumple lo que estoy buscando? En función de los dos razonamientos anteriores podemos verificar cuál de las opciones de respuesta, satisface las observaciones realizadas.

Aplicuémoslo en nuestra situación:

- Estarás de acuerdo con que estamos buscando un par de ángulos complementarios.
- Con base en lo anterior, la respuesta cumple con las siguientes condiciones: su suma es 90° y su diferencia es 56° .
- Es fácil observar que la única opción que satisface las condiciones, y por ende, se trata de la respuesta correcta, es la opción "C".



A lo largo del libro puedes emplear esta estrategia en reactivos del mismo tipo, para poder dominarla.

Ejemplo 2

En la siguiente figura, el ángulo es llano. Determina el valor de x .

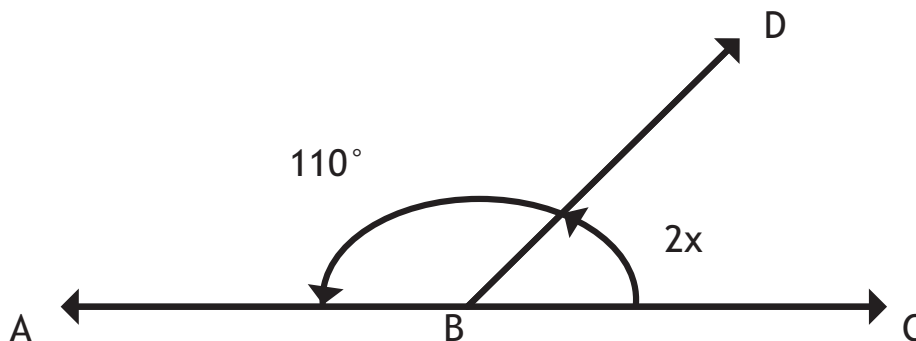


Figura 1.49

Afirmaciones	Justificaciones
El $\angle ABD$ y el $\angle CBD$ son suplementarios	Juntos forman un ángulo de llano (de 180°)
$2x + 110^\circ = 180^\circ$	Definición de ángulos suplementarios
$2x = 180^\circ - 110^\circ$	Transponiendo términos y efectuando operaciones
$x = \frac{170^\circ}{2}$	Despejando x para hallar su valor
$x = 35^\circ$	Solución

Actividad de aprendizaje 5

Ahora verifiquemos que efectivamente has adquirido los aprendizajes adecuados, con respecto a los contenidos que se refieren a ángulos, su medida y clasificación. En los problemas que se te presentan a continuación, incluiremos, como en toda la obra, reactivos que tienen que ver con evaluaciones de logro académico.

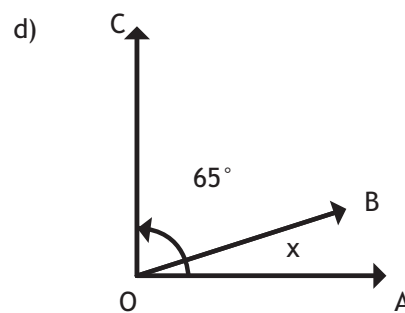
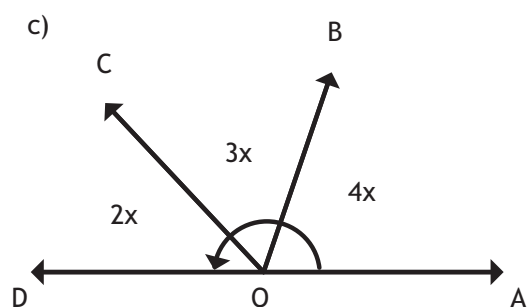
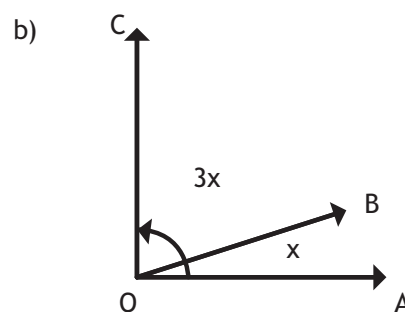
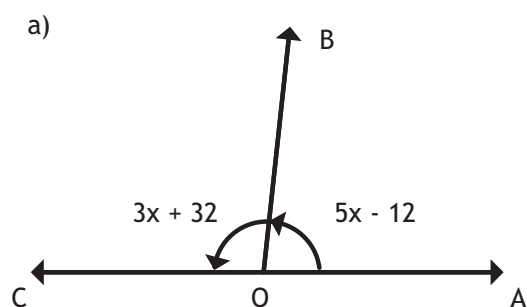
- Determina los complementos y suplementos de los siguientes ángulos.

Ángulo	Complemento	Suplemento
a) $56^\circ 52'$		
b) $28^\circ 49' 25''$		
c) $102^\circ 15'$		
d) $13^\circ 19' 46''$		

Hallar el valor de los ángulos, con base en las proposiciones siguientes:

- a) Los ángulos son complementarios, uno de ellos es igual al cuádruplo del otro.
- b) Hallar los ángulos suplementarios, tal que un ángulo es igual a la tercera parte de su suplemento.
- c) Son dos ángulos complementarios y el mayor supera en 25 al menor. Hallar los ángulos.
- d) El menor de los ángulos tiene 15° más que la cuarta parte del mayor y ambos son suplementarios. Hallar los ángulos
- e) Los ángulos son conjugados y el mayor es el triple del menor. Hallar los ángulos

2. Determina el valor de x , así como la medida de los ángulos $\angle AOB$ y $\angle BOC$



Sesión C: Define y clasifica los triángulos por la medida de sus lados y ángulos



Desarrollo de saberes

Del saber

- Defino y clasifico los triángulos por la medida de sus lados y de sus ángulos.

Del saber hacer

- Distingo los tipos de triángulos a partir de la información contenida en gráficos.
- Realizo inferencias y deducciones sobre las figuras y construcciones que se me presentan.
- Aplico propiedades de triángulos para la resolución de problemas.
- Utilizo la imaginación espacial para visualizar distintos tipos de triángulos en objetos y figuras
- Interpreto las propiedades de los ángulos de cualquier triángulo, como son la suma de ángulos interiores y exteriores.

Del saber ser

- Aprecio la utilidad de los diferentes triángulos para modelar situaciones geométricas.
- Muestro disposición a utilizar las propiedades de los triángulos en la resolución de problemas.
- Aporto puntos de vista personales con apertura y considero los de otras personas.



Contextualización

Ahora agreguemos una recta más a la figura que hemos analizado en sesiones anteriores, es decir, a los dos lados que tiene nuestro ángulo, le colocaremos un lado más, de tal forma que la figura se cierre y obtengamos un triángulo.

Hablar del tema de triángulos resulta complicado, sobre todo cuando existen en la actualidad grandes obras que se refieren a este tipo de figura, que realmente has analizado y estudiado desde que te encontrabas cursando los primeros años de la educación básica.

Existen muchas anécdotas sobre triángulos y te resultará gracioso, pero también hay algunas de ellas célebres, ¿cuáles recuerdas? El “triángulo de las Bermudas”, enigmático y misterioso; el “triángulo de Pascal”, poderoso y útil; los triángulos en las caras de las pirámides de Egipto, monumentales y llenos de ciencia e historia; en fin, existen muchos elementos que me motivan a desarrollar ideas que tienen que ver con el triángulo, su definición, clasificación, propiedades fundamentales y diversas aplicaciones en contextos diferentes.

Así es que vamos a entrar al tema de una manera diferente, con el deseo que sea motivante para ti, tus compañeros de clase, y desde luego, tu docente.



Problematización

Como primera actividad, te propongo que construyas un triángulo cuyos lados sean iguales. Puedes emplear diversos materiales para hacerlo: palitos de paleta, popotes, pequeñas varas, o incluso, puedes dibujarlo. La única condición es que la medida de los tres lados sea la misma.

Con la ayuda de tu medidor de ángulos (puedes emplear el que construimos en sesiones anteriores o tu transportador), determina los valores de los tres ángulos del triángulo que construiste.

¿Puedes hacer alguna afirmación a partir de lo que observaste? Comparte con tu clase las mediciones que realizaste para intentar llegar a un consenso.

Ahora bien, al triángulo que tienes, constrúyete divisiones internas, de manera que obtengas más triángulos y puedas continuar midiendo ángulos.

Usando un poco de imaginación espacial, ubica tres puntos (que servirán como vértices) y visualiza el triángulo que puedes formar a partir de ellos. ¿Es bastante grande? ¿Estás considerando, por ejemplo, el Sol como uno de los vértices? ¿Puedes, de alguna manera, medir los ángulos que le corresponden?

Como una actividad adicional, toma tres varitas de 3, 4 y 5 centímetros, respectivamente, y forma con ellas un triángulo. ¿Uno de sus ángulos mide 90° , verdad? ¿Por qué crees que sucede esto? Justifica tu respuesta.



Desarrollo de saberes

Triángulos y su clasificación

Un triángulo por definición es una figura cerrada, que tiene tres lados y tres ángulos. Algunos lo definen como polígono que tiene tres ángulos (partiendo de su raíz etimológica).

Generalmente empleamos el símbolo Δ para referirnos a un triángulo, y Δ 's para referirnos a varios. De modo similar a lo que ocurre con los ángulos, a los triángulos podemos nombrarlos de varias formas: por las letras de los vértices, o tal vez, por medio de un número situado en el interior del mismo. Para no confundir tales números con la nomenclatura de los ángulos, se emplean números romanos. Ejemplo:

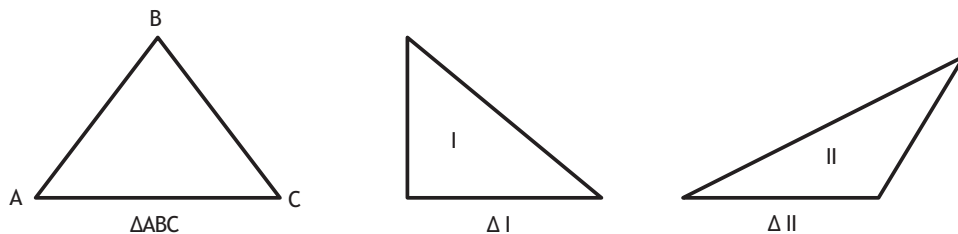
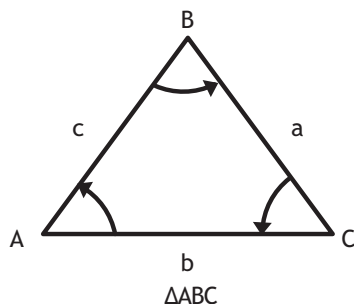


Figura 1.50

En caso de utilizar las letras de los vértices para indicar un triángulo, como en el ejemplo, este puede tener las siguientes notaciones ΔABC o ΔBCA o ΔCAB , sin importar el orden de las letras.



Los triángulos poseen nueve elementos a saber: 3 lados, 3 ángulos y 3 vértices



Lados: a, b y c
Ángulos: $\angle CAB$, $\angle ABC$ y $\angle BCA$
Vértices: A, B y C

Figura 1.51

En un triángulo, generalmente, el lado que se opone a un ángulo es indicado con la misma letra del vértice, pero minúscula.

Por la medida de sus lados los triángulos se pueden clasificar en:

Figura 1.52 Triángulo equilátero.	Triángulo equilátero Es aquel triángulo que tiene sus tres lados y sus tres ángulos congruentes (iguales). Lados: $a = b = c$ Ángulos: $\angle BAC = \angle ACB = \angle CBA$
Figura 1.53 Triángulo isósceles.	Triángulo isósceles Es aquel triángulo que tiene dos lados congruentes (iguales) y uno desigual llamado base. El ángulo opuesto a la base se le conoce como ángulo vértice. Lados: $a = c \neq b$ Ángulos: $\angle BAC = \angle ACB$ Ángulo vértice: $\angle CBA$
Figura 1.54 Triángulo escaleno.	Triángulo escaleno Es aquel triángulo que tiene sus tres lados desiguales; es decir, ninguno de sus lados es congruente. Lados: $a \neq b \neq c$ Ángulos: $\angle BAC \neq \angle ACB \neq \angle CBA$

Si bien estamos haciendo una clasificación de los triángulos atendiendo la medida de sus lados, te habrás dado cuenta, que hicimos algunas anotaciones sobre sus ángulos. Por el momento toma nota de esta característica, más adelante haremos algunas observaciones más completas al respecto.

En conclusión podemos esquematizar lo aprendido de la siguiente manera:

Triángulos por la medida de sus lados

Equiláteros
Isósceles
Escalenos

De la misma forma en la que organizamos a los triángulos por la medida de sus lados, resulta conveniente ubicarnos en una clasificación por la medida de sus ángulos, los cuales tienen una propiedad muy importante, y es el límite que llegan a tener, de esto hablaremos más adelante.

Por la medida de sus ángulos los triángulos se pueden clasificar en:

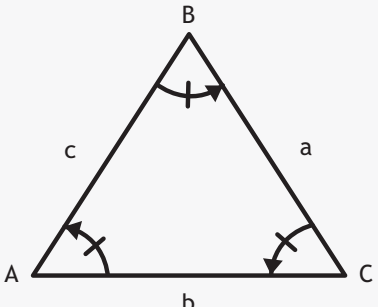
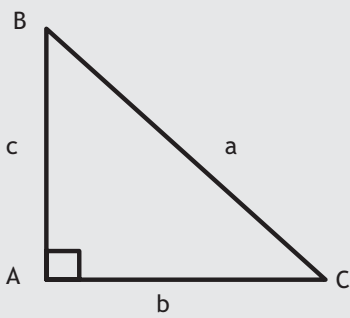
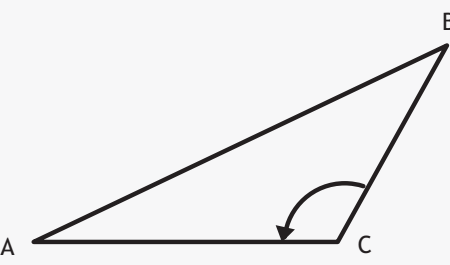
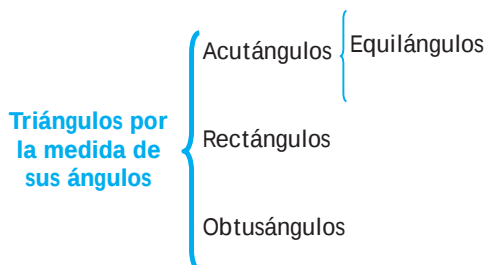
	Triángulos acutángulos Son los triángulos que tienen sus tres ángulos agudos. El triángulo equilátero es un caso particular de esta definición, “aunque no todos los triángulos acutángulos son equiláteros, si todos los triángulos equiláteros son acutángulos”.
	Triángulos rectángulos Son aquellos que tienen un ángulo recto. En este triángulo, los lados perpendiculares se llaman “catetos”, y el lado opuesto al ángulo recto se conoce con el nombre de “hipotenusa”. Catetos: lados c, b Hipotenusa: lado a Ángulos recto: $\angle BAC$
	Triángulo obtusángulo Es el triángulo que posee un ángulo obtuso; es decir, mayor de 90° pero menor de 180°. Ángulo obtuso: $\angle ACB$

Figura 1.55 Triángulo acutángulo.

Figura1.56 Triángulo rectángulo.

Figura 1.57 Triángulo obtusángulo.

Haciendo un recuento de lo expuesto, podemos esquematizar esta clasificación de los triángulos de la siguiente manera:



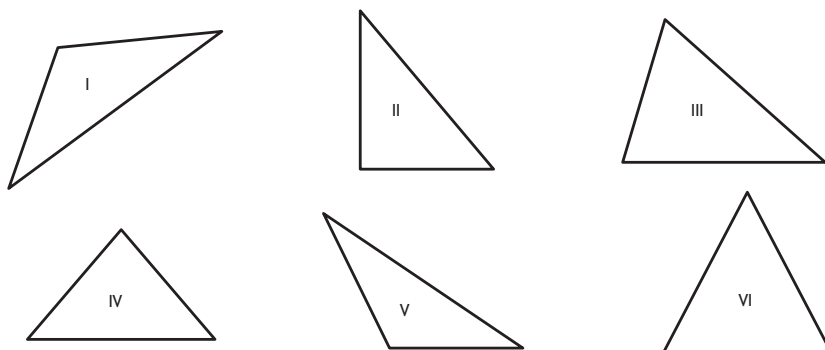
Actividad de aprendizaje 6

Con el propósito de evaluar tus conocimientos adquiridos sugerimos las siguientes actividades, que te ayudarán a entender una de las competencias, que debes desarrollar en la asignatura de matemáticas, y que literalmente se enuncia como: “Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas”. Con el fin de redondear la actividad, deberás compartir tus resultados con el resto del grupo, y anotar tus observaciones y las de tus compañeros para concretar conclusiones en forma grupal.

1. Encierra en un círculo la letra F si la afirmación es falsa, y la V si es una afirmación verdadera.

Todos los triángulos rectángulos son Isósceles	F	V
Los triángulos isósceles también pueden ser rectángulos	F	V
Los triángulos acutángulos son triángulos rectángulos	F	V
Los triángulos equiláteros son triángulos acutángulos	F	V
Todos los triángulos acutángulos son equiláteros	F	V
Todos los triángulos obtusángulos son isósceles	F	V
Los triángulos isósceles pueden ser obtusángulos	F	V

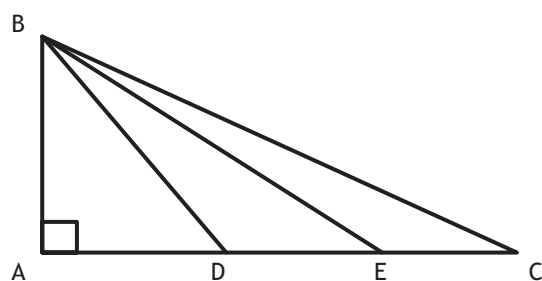
A continuación, te presentaremos algunos triángulos, una vez analizadas las figuras deberás contestar la tabla correspondiente, señalando en cada celda con una X a que clasificación corresponde cada uno de ellos. Si es necesario apóyate de una escuadra y un transportador.



Triángulo	Equilátero	Isósceles	Escaleno	Acutángulo	Rectángulo	Obtusángulo
I						
II						
III						
IV						
V						
VI						

Veamos si es posible tomar algunas decisiones, con respecto a los triángulos y sus diferentes clasificaciones, a partir de lo que ya hemos revisado:

2. En la siguiente figura, determina:



- El número de triángulos que hay.
- Cuántos de ellos son rectángulos.
- Cuántos son obtusángulos.
- Si alguno es escaleno, isósceles o equilátero.

Reúnete en binas para realizar la actividad, anota tus respuestas en la libreta, y luego comenten sus observaciones a toda la clase.

3. A partir de lo que hemos revisado hasta el momento, determina los elementos que se requieren a continuación:

- Si uno de los ángulos de un triángulo rectángulo mide 30° , ¿cuánto medirá el tercero? Justifica tu respuesta.
- Se sabe que la medida del ángulo del vértice, de un triángulo isósceles es 60° , ¿qué podemos afirmar acerca del triángulo? Justifica cada una de tus observaciones.
- ¿Es posible construir un triángulo con ángulos que midan 45° , 45° y 90° ? ¿Qué tipo de triángulo sería? De ser afirmativa la respuesta, constrúyelo.

Contesta las preguntas, y construye las figuras solicitadas en tu libreta. No te olvides de compartir el resultado de tus actividades con el resto de la clase.



Contextualización

Propiedades de los triángulos

Ahora trataremos otro aspecto de los triángulos, que resulta de suma utilidad en muchas de las situaciones que nos rodean, por ejemplo, si quisiéramos saber, cuál es la altura a la que debo colocarme para tener un determinado ángulo de observación de un objeto, o con qué ángulo debo apoyar la escalera en la pared para alcanzar determinada altura, o con qué ángulo pegarle a la bola de billar para lograr contacto con otra bola en la mesa, etc.



Problematización

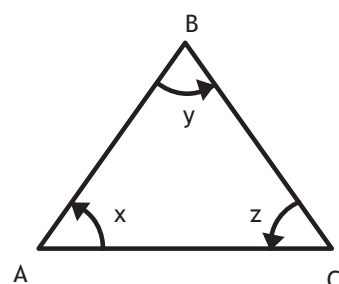


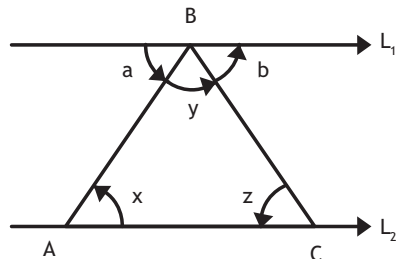
Figura 1.58

Para ello, observa la actividad que se te propone:

Tenemos el triángulo ABC, y queremos determinar la suma de las medidas de sus ángulos internos, es decir, la suma de los ángulos x , y , z .

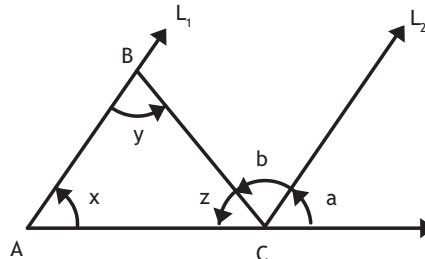
De manera intuitiva y por lo observado antes, sabemos que dicha suma es 180° (lo cual no los haría suplementarios, ya que para ello deben ser solamente dos) pero ¿cómo estar completamente seguros? ¿Alguna idea? ¿Y tus compañeros?

Tal vez te puedas ayudar mediante la construcción de figuras auxiliares. Te sugiero las siguientes:



Sea el ΔABC y las líneas $L_1 // L_2$

Figura 1.59



Sea el ΔABC y las líneas $L_1 // L_2$

Puedes observar que se han formado otros ángulos. ¿Qué relación tienen con los ángulos internos del triángulo? Te voy a dar más pistas, identifica en las figuras los ángulos que se formaron a partir de las dos paralelas, y la secante o transversales que se puedan observar, recuerda que estos pueden ser alternos internos, alternos externos, correspondientes y conjugados; no olvides considerar la propiedad de los ángulos consecutivos formados a partir de una línea recta.

Comparte con tu docente y con la clase tus observaciones, para llegar a algún acuerdo en el proceso que llamaremos de “Comprobación o Demostración” de una afirmación, el cual de inicio es algo intuitivo, pero con la ayuda de otros conocimientos podemos otorgarle total confiabilidad.



Desarrollo de saberes

A continuación, aprenderemos a determinar cómo son los ángulos de un triángulo y cuáles son sus principales características.

Al respecto, y a manera de introducción, te platico una anécdota: Cierta vez existió un hombre tan rico y tan exacto, que un día decidió terminar su existencia; era tan exacta su forma de vida, que calculó el momento preciso de su fin. Momentos antes de la hora, bajó a su biblioteca y seleccionó un libro, para distraerse durante los 15 minutos que faltaban. Al abrir el libro, se topó con un teorema sumamente famoso, que no había podido demostrarse. Fue tanto lo que el teorema llamó su atención, que se quedó leyendo casi hasta el amanecer del día siguiente. El fin de la historia, es que a partir de ese momento, dedicó su vida y fortuna a la demostración de dicho teorema. ¿Interesante, verdad?

Entrando ahora sí en materia, en matemáticas tenemos elementos que, como ocurre en la vida, son tan obvios que no requieren de demostración alguna. A esos elementos los conocemos con el nombre de “postulados” o “axiomas”. Algunos de ellos son, por ejemplo, los siguientes:

- “El todo es igual a la suma de sus partes”.
- “Si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$ ”.
- “Dos líneas se intersectan en un punto y sólo en uno”.
- “Un segmento tiene uno y sólo un punto medio”.

Como puedes ver, cada axioma resulta tan obvio que no requiere de una demostración formal. De la misma manera, existen otros elementos que, desde luego, requieren de una demostración que los haga válidos. Por ejemplo, si decimos que tal equipo de fútbol es el mejor de la historia, tendríamos necesariamente que revisar y comparar datos de dicho equipo, con el resto de los equipos que existen para lograr comprobar la afirmación. A esos elementos se les conoce generalmente con el nombre de “teoremas”, “corolarios” y “propiedades”.

En el caso de los triángulos, las propiedades más importantes son las siguientes:

La suma de los ángulos internos de cualquier triángulo es igual a 180° .

$$m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^\circ$$

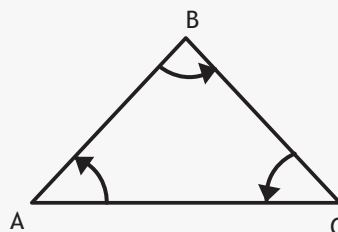


Figura 1.60

En todo triángulo, a lados iguales se oponen ángulos iguales y viceversa.

En el los lados:

$$\overline{AB} = \overline{BC}$$

Entonces:

$$m\angle A = m\angle C$$

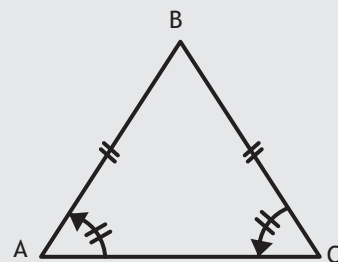


Figura 1.61

La suma de los ángulos externos de cualquier triángulo es 360° .

$$m\angle x + m\angle y + m\angle z = 360^\circ$$

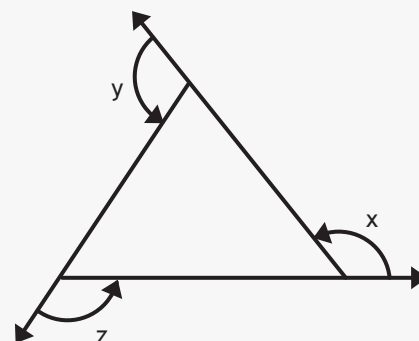


Figura 1.62

Cada ángulo externo de cualquier triángulo es igual a la suma de los ángulos internos no adyacentes a él.

$$m\angle x = m\angle a + m\angle b$$

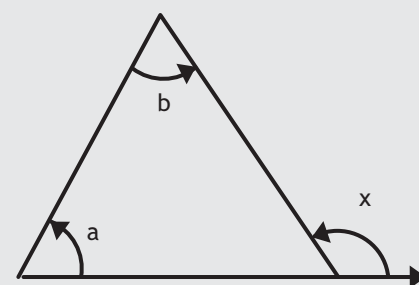


Figura 1.63

Existen muchas más propiedades para triángulos, pero las iremos comentando conforme avancemos en el tema. Por lo pronto, pongamos en práctica las propiedades que hemos analizado hasta el momento.

Situación 1

Si los ángulos de un triángulo están en la proporción 1: 2: 3, ¿cuáles serán sus medidas?

Solución:

Para comenzar, llamemos a las medidas del primero de ellos x . Luego, por los datos del problema, tenemos que los otros dos serían:

$$2x \text{ y } 3x$$

Finalmente, por la propiedad de la suma de los ángulos internos:

$$x + 2x + 3x = 180^\circ,$$

$$6x = 180^\circ,$$

$$x = 30^\circ.$$

Así, los ángulos miden 30° , 60° y 90° .

Situación 2

Determina las medidas de los ángulos a , b y c , a partir de la figura y los datos que se te proporcionan.

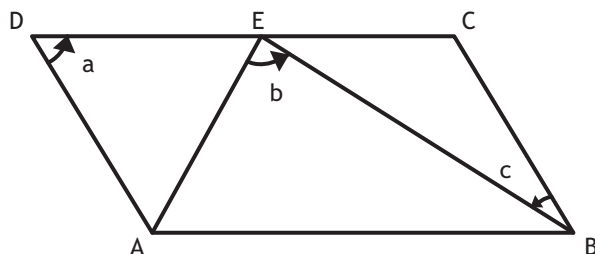


Figura 1.64

Datos:

$$m\angle DAB = 110^\circ, \overline{AD} \parallel \overline{BC} \text{ y } \overline{AB} \parallel \overline{DC}.$$

$\overline{AE}$ es bisectriz del $\angle DAB$

$\overline{BE}$ es bisectriz del $\angle ABC$

Dada la información, podemos concluir lo siguiente:

Afirmaciones	Justificaciones
$\angle ADE + \angle DAB = 180^\circ$	Por ser ángulos conjugados
Si $\angle DAB = 110^\circ$, luego entonces el $\angle ADE = 70^\circ$	Por definición
Dado que $\angle ADE = a$, $a = 70^\circ$	Dato
$\angle ADE = \angle ABC$	Por ser su reflejo
$c = 35^\circ$	Definición de bisectriz
$\angle EAB = 55^\circ$	Definición de bisectriz
$\angle ABE = 35^\circ$	Definición de bisectriz
$b + \angle EAB + \angle ABE = 180^\circ$	La suma de los internos de un triángulo
$b + 55^\circ + 35^\circ = 180^\circ$	Sustituyendo
$b = 90^\circ$	Por despeje

La bisectriz es una recta, semirrecta o segmento de recta que divide a un ángulo en dos partes congruentes (iguales).

Situación 3

Determina las medidas de los ángulos a , b y c , a partir de la figura y los datos que se te proporcionan.

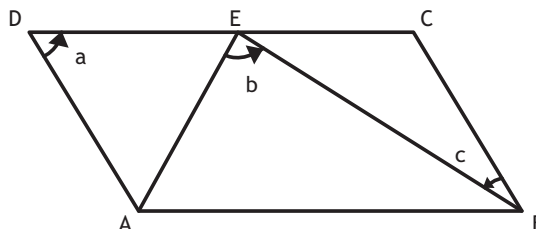


Figura 1.65

Datos:

$\triangle ABE$ es equilátero

$m\angle ABC = 70^\circ$ y $m\angle DAB = 140^\circ$

$\angle AED \cong \angle AEB \cong \angle BEC$

Dada la información, podemos concluir lo siguiente:

Afirmaciones	Justificaciones
$\triangle ABE$ es equiángulo	Propiedad y definición de triángulo equilátero
$\angle EAB = \angle ABE = \angle AEB$	Por definición de triángulo equilátero
$\angle EAB + \angle ABE + \angle AEB = 180^\circ$	La suma de los internos de un triángulo
Por lo tanto: $b = 60^\circ$	Por ser ángulos iguales y sumar 180°
$c + \angle ABE = 70^\circ$	Dato
$c + 60^\circ = 70^\circ$	Sustituyendo
$c = 10^\circ$	Por despeje
$\angle EAB = 60^\circ$	Definición de ángulos congruentes
$\angle DAE + \angle EAB = 140^\circ$	Dato
$\angle DAE + 60^\circ = 140^\circ$	Sustituyendo
$\angle DAE = 80^\circ$	Por despeje
$\angle AED \cong \angle AEB \cong \angle BEC$	Dato.
$a + \angle DAE + \angle AED = 180^\circ$	La suma de los internos de un triángulo
$a + 60^\circ + 60^\circ = 180^\circ$	Sustituyendo
$a = 40^\circ$	Por despeje

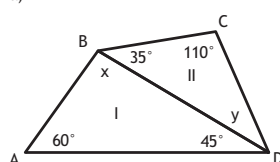
Las soluciones anteriores se presentan de esta manera para ayudarte en el seguimiento de las mismas. Puedes optar por observaciones más breves y contundentes, cuidando que el razonamiento sea válido; esto se logra, como te darás cuenta, teniendo una justificación válida para cada afirmación que realices. Acuerda con tu docente la mejor forma de justificar, y comparte tus conclusiones con tus compañeros.

Actividad de aprendizaje 7

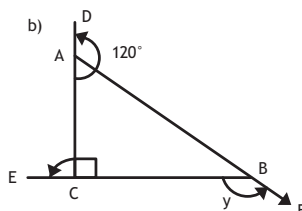
Resuelve correctamente los siguientes ejercicios en tu libreta. Argumenta tus respuestas.

1. Determina el valor de x y de y de las siguientes figuras:

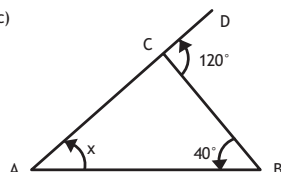
a)



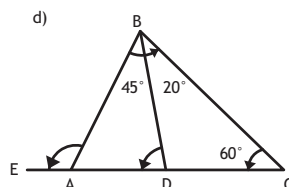
b)



c)



d)



2. Determina los valores de las variables que aparecen en cada figura. Toma en cuenta la información que se te proporciona en cada una.

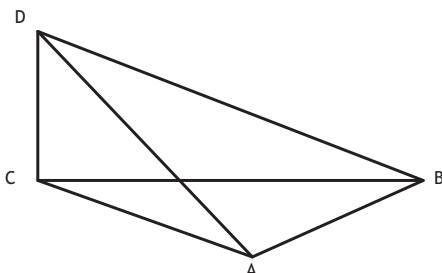


Figura a

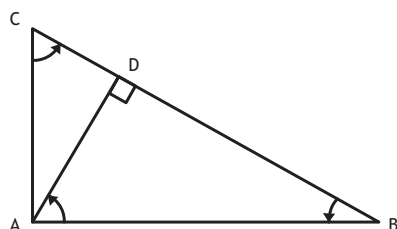


Figura b

- a) Determina los valores de los ángulos de la base del $\triangle ABC$ de la figura a. Dado que el $\angle ABC = 50^\circ$ y los $\triangle ABC$ y el $\triangle ABD$ son isósceles.

¿Puede considerarse que ambas figuras están en el mismo plano a partir de los resultados obtenidos? Justifica tu respuesta.

- b) El $\triangle ABC$ de la figura b es rectángulo y el $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$. Determina los valores de x , así como de y .

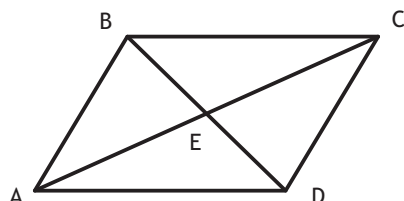


Realimentación

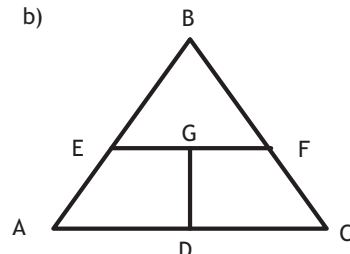
A continuación, te propongo los siguientes ejercicios, a manera de realimentación o repaso de los temas desarrollados en cada una de las sesiones del bloque I, de la asignatura de Matemáticas II. Resuélvelos en tu libreta. Podrás considerarlos como parte de un portafolio de evidencias.

- En las siguientes figuras indica con tres letras los ángulos adyacentes, consecutivos, opuestos por el vértice, rectos, agudos y obtusos.

a)

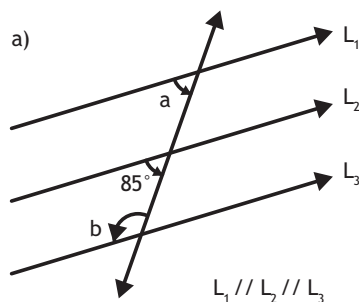


b)

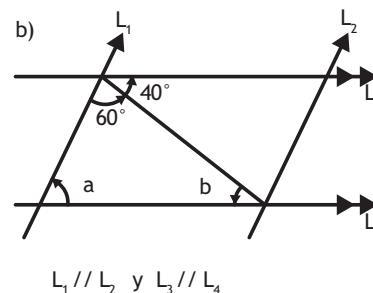


- Determina el valor de los ángulos indicados con las letras a y b. Justifica tu respuesta.

a)

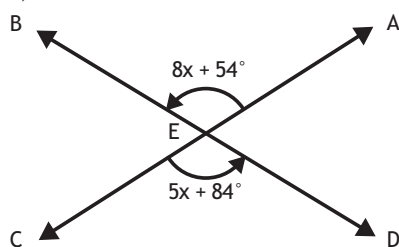


b)

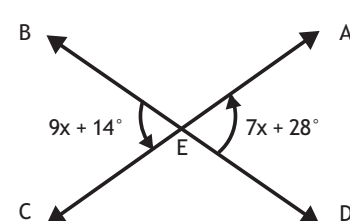


- Halla el valor de las variables x e y, así como el de los ángulos. Argumenta tus respuestas.

a)

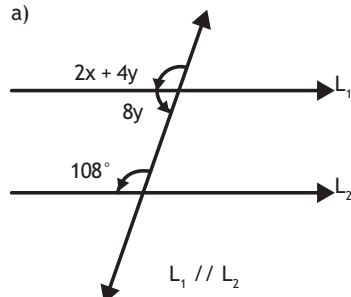


b)

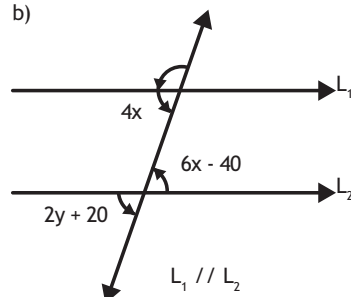


- Calcula el valor de variables x e y, verifica tus resultados sustituyendo los valores encontrados en las ecuaciones de primer grado. Argumenta tus respuestas.

a)



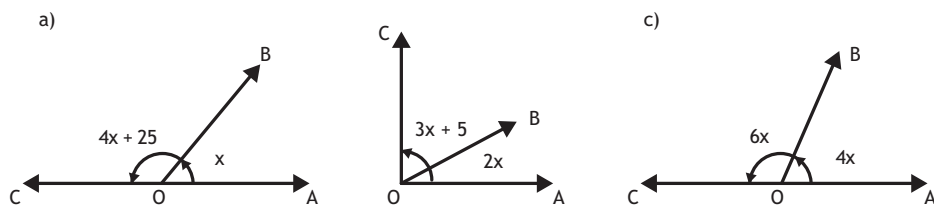
b)



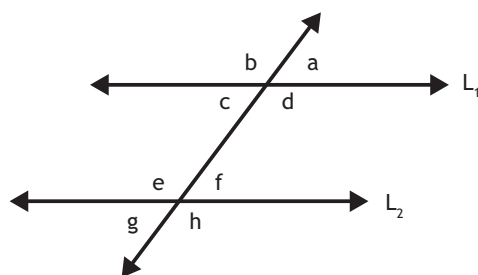
5. Calcula el valor de las incógnitas solicitadas y de cada ángulo correctamente, a partir de las instrucciones dadas.

- Los ángulos son adyacentes y forman un ángulo de 110° . El mayor es 10° menor, que tres veces el ángulo menor.
- Los ángulos son adyacentes y forman un ángulo que mide 120° . La medida del menor es 30° menos que la medida del ángulo mayor.
- Los ángulos son complementarios, el ángulo menor es la tercera parte del ángulo mayor.
- El menor de los ángulos tiene 25° más que la cuarta parte del mayor, y ambos son suplementarios. Determina el valor de cada ángulo.
- Los ángulos son conjugados y el mayor es el triple del menor. Hallar los ángulos

6. Determina el valor de x , así como la medida de los ángulos $\angle AOB$ y $\angle BOC$.



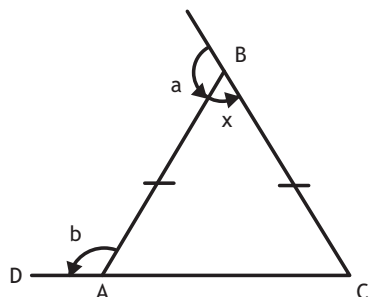
7. En la siguiente figura determina el valor, en grados, del $\angle b$. Subraya la respuesta correcta.



Sean $L_1 \parallel L_2$, $\angle f = 70^\circ + 2x$; $\angle e = 3x$.

☐ 22°	☐ 66°	☐ 114°	☐ 95°
-------------------------------------	-------------------------------------	--------------------------------------	-------------------------------------

Si el $\angle a + \angle b = 250^\circ$ y el $\triangle ABC$ es isósceles, determina el valor del ángulo vértice $\angle x$. Subraya la respuesta correcta.



☐ 40°	☐ 70°	☐ 140°	☐ 110°
-------------------------------------	-------------------------------------	--------------------------------------	--------------------------------------

Mario está armando un rompecabezas en forma triangular. Si lleva armada la parte blanca que equivale a $\frac{10}{18}$, ¿Cuál de las figuras representa la cantidad que le falta para completarlo? Subraya la respuesta correcta.

a)



b)



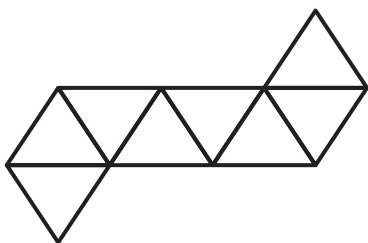
c)



d)



8. Observa la plantilla que se muestra a continuación:



¿Cuál de los siguientes cuerpos tridimensionales se obtiene con ella? Subraya la respuesta correcta.

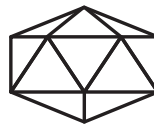
a)



b)



c)



d)



9. Resuelve las siguientes situaciones:

- a) Desde lo alto de un faro se observa una embarcación con un ángulo de depresión de 40° . Los tripulantes de otra embarcación divisan la parte más alta del faro con un ángulo de elevación de 72° . ¿Cuál es la medida del ángulo de elevación, con el que los tripulantes de la primera embarcación observan la parte más alta del faro? ¿Qué embarcación estará más cerca del faro y por qué?
 - b) Si el ángulo A y el ángulo B son suplementarios, y de la misma forma lo son el ángulo A y el ángulo C, ¿qué puedes afirmar de los ángulos B y C? Puedes hacer extensiva la afirmación hacia otras parejas de ángulos. Justifica tu respuesta.
10. En múltiples escenarios escuchamos acerca de ubicaciones a través de los puntos cardinales (Norte, Sur, Este y Oeste). Reúnete con algún compañero y diseña tu propio modelo de "Rosa de los vientos", incluyendo en ella los valores de los ángulos de las distintas direcciones empleadas con mayor frecuencia.
11. Reflexiona con tus compañeros acerca de la siguiente pregunta: ¿será que todos los ángulos son positivos, es decir, existirán ángulos negativos? Justifiquen sus respuestas y socialícenlas con su docente.



Evaluación de la competencia

Hemos llegado al final de nuestro recorrido por los contenidos del Bloque I de Matemáticas II, es momento de hacer un alto para reflexionar sobre los logros alcanzados, para ello es importante incorporar algunos ejercicios de las actividades de aprendizaje desarrolladas a lo largo de las tres sesiones, en un **portafolio de evidencias**, o bien, las actividades de la realimentación nos podrán servir para integrar dicho portafolio, es importante llegar a un acuerdo con tu facilitador, para que te puedas ubicar en algunos de los siguientes niveles de dominio, con las actividades de aprendizaje realizadas.

Autoevaluación

Nivel estratégico: Resuelvo problemas utilizando la imaginación espacial para visualizar distintos tipos de ángulos y triángulos en objetos y figuras, aplicando las propiedades de los ángulos y empleando modelos aritméticos, algebraicos y gráficos, en forma razonada.	100%
Nivel autónomo: Aplicó las propiedades de los ángulos y triángulos para la resolución de ejercicios y problemas.	80%
Nivel resolutivo: Interpreto las propiedades de los ángulos de cualquier triángulo, como son la suma de ángulos interiores y exteriores.	60%
Nivel inicial-receptivo: Utilizo la imaginación espacial para visualizar distintos tipos de ángulos y triángulos en objetos y figuras, realizando inferencias y deducciones sobre las figuras y construcciones que se me presentan	30%
Nivel pre-formal: Distingo, defino y clasifico los tipos de ángulos y triángulos a partir de la información contenida en gráficos.	10%



Rúbrica para la evaluación de bloque

Para medir el dominio de los saberes del bloque, necesarios para el desarrollo de las competencias requeridas, se presenta la siguiente rúbrica de evaluación, con la intención de que midas tus niveles de desempeño, y realimentes aquellos en los que presentes alguna problemática.

Rúbrica para la evaluación del bloque					
Producto, logro o desempeño	Nivel de logro o desempeño				
	5 Estratégico	4 Autónomo	3 Básico	2 Inicial	1 Pre-formal
Conocimientos	Clasifico correctamente los ángulos de acuerdo a su medida. Logro identificar y clasificar ángulos por la posición y la suma de sus medidas de forma correcta. Reconozco y clasifico correctamente tipos de triángulos a partir de la información contenida en gráficos, así como las propiedades de sus ángulos.	Clasifico correctamente los ángulos de acuerdo a su medida. Logro identificar y clasificar ángulos por la posición y la suma de sus medidas de forma correcta. Reconozco y clasifico tipos de triángulos a partir de la información contenida en gráficos, y algunas de las propiedades de sus ángulos, aunque de manera inconsistente.	Clasifico los ángulos de acuerdo a su medida. Logro identificar y clasificar ángulos por la posición y la suma de sus medidas, aunque de forma inconsistente. Reconozco y clasifico tipos de triángulos a partir de la información contenida en gráficos, aunque de manera inconsistente.	Clasifico los ángulos de acuerdo a su medida, pero con algunos errores. Logro identificar y clasificar algunos ángulos por la posición y la suma de sus medidas, aunque de forma inconsistente. Reconozco y clasifico algunos tipos de triángulos a partir de la información contenida en gráficos, aunque de manera inconsistente.	Clasifico algunos ángulos de acuerdo a su medida. Pero no logro clasificar los ángulos por la posición y la suma de sus medidas. No logro distinguir y clasificar adecuadamente los tipos de triángulos a partir de la información contenida en gráficos.

Rúbrica para la evaluación del bloque					
Producto, logro o desempeño	Nivel de logro o desempeño				
	5 Estratégico	4 Autónomo	3 Básico	2 Inicial	1 Pre-formal
Habilidades	Utilizo las propiedades y características de los diferentes tipos de ángulos y triángulos para obtener valores de éstos, a partir de situaciones prácticas o teóricas, lo que me permite resolver problemas de mi entorno.	Empleo las propiedades y características de los diferentes tipos de ángulos y triángulos, para obtener valores de éstos a partir de algunas situaciones prácticas o teóricas, de manera correcta, por lo que soy capaz de resolver ejercicios que se me presentan.	Empleo las propiedades y características de los diferentes tipos de ángulos y triángulos, para obtener valores de éstos a partir de algunas situaciones prácticas o teóricas, pero de forma inconsistente, por lo que sólo soy capaz de resolver algunas situaciones que se me presentan.	Empleo las propiedades y características de los diferentes tipos de ángulos y triángulos, pero de manera poco correcta y no muy consistente, por lo que sólo soy capaz de resolver algunas situaciones que se me presentan.	No empleo las propiedades y características de los diferentes tipos de ángulos y triángulos, por lo que no soy capaz de resolver situaciones que se me presentan.



Rúbrica para la evaluación del bloque					
Producto, logro o desempeño	Nivel de logro o desempeño				
	5 Estratégico	4 Autónomo	3 Básico	2 Inicial	1 Pre-formal
Actitudes	Considero la importancia de la clasificación de los polígonos según sus lados y ángulos en la solución de ejercicios. Aprecio la utilidad de las propiedades de los ángulos en el triángulo en la solución de situaciones reales. Demuestro siempre respeto y tolerancia hacia las ideas de mis compañeros, aportando puntos de vista personales.	Considero importante la clasificación de los ángulos y triángulos en la solución de situaciones. Aprecio la utilidad de las propiedades de los ángulos de un triángulo en la solución de situaciones. Demuestro siempre respeto hacia las ideas de mis compañeros y apporto puntos de vista e ideas personales.	Considero necesario la clasificación de los ángulos y triángulos en la solución de situaciones. Tomo en cuenta la utilidad que tienen las propiedades de los ángulos en un triángulo en la solución de situaciones. Demuestro siempre respeto hacia las ideas de mis compañeros y apporto ideas personales.	Considero no muy importante la clasificación de los ángulos y triángulos en la solución de ejercicios. Aprecio poco la utilidad de las propiedades de los ángulos de un triángulo en la solución de situaciones. Demuestro poco respeto hacia las ideas de mis compañeros y muestro poca disposición.	No considero la importancia de la clasificación de los ángulos y triángulos en la solución de ejercicios. No aprecio la utilidad de las propiedades de los ángulos de un triángulo en la solución de situaciones. No demuestro respeto hacia las ideas de mis compañeros. Aporto muy poco en lo personal.

Bloque II. Comprende la congruencia de triángulos

Atributos de las competencias genéricas:

- 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
- 5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuyendo a alcance de un objetivo.
- 5.4 Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para aplicar su validez.
- 5.6 Utiliza las tecnologías de información y comunicación para procesar e interpretar la situación.
- 6.1 Elige las fuentes de información más relevantes para un propósito específico y discrimina entre ellos de acuerdo a su relevancia y confiabilidad.
- 7.1 Define metas y da seguimiento a sus procesos de construcción de conocimientos.
- 8.1 Propone manera de solucionar un problema y desarrolla un proyecto en equipo definiendo un curso de acción con pasos específicos.
- 8.2 Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.
- 8.3 Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.

Competencias disciplinares básicas

- 1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
- 2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
- 3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
- 4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
- 5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
- 6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
- 7. Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia.
- 8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

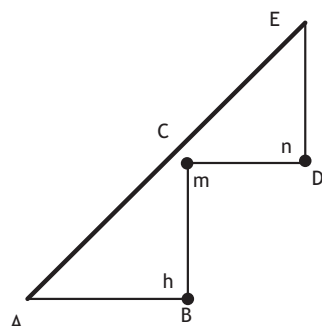


Motivación y dinamización

En el presente bloque, se pretende que manejes todo lo relacionado con el concepto de congruencia y que comúnmente tú has de llamar “figuras iguales”. Estoy seguro, que cuando se habla de igualdad, se te vienen a la mente muchas cosas que se relacionan con la naturaleza del término y, aprovechando que tu intuición es muy acertada, se te proponen ciertas situaciones que tienen el objetivo de rescatar elementos que te servirán para comprender, de mejor manera, todo aquello que involucre a la igualdad de figuras y, sobre todo, para justificar todo aquello que por intuición sabes y que tienen como trasfondo una base matemática.

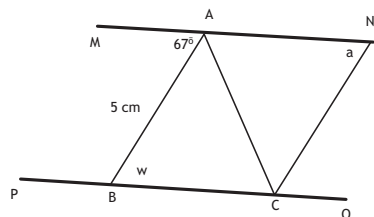
Resuelve cada una de las situaciones que a continuación se te planteen y escribe sobre la línea la respuesta correcta.

1. A continuación se te presenta una figura que forma parte del tramo de una escalera de la casa de Agustín, en la que se sabe que $AB \parallel CD$ y $BC \parallel DE$ y que el $\angle h = 96^\circ$, ¿Qué valor tiene el $\angle m$ y $\angle n$?



$\angle m = \underline{\hspace{2cm}}$ y $\angle n = \underline{\hspace{2cm}}$

2. En la siguiente figura se tiene que el $\triangle ABC$ es isósceles y que $MN \parallel PQ$. ¿Qué valor tiene el $\angle a$ y el segmento CN?



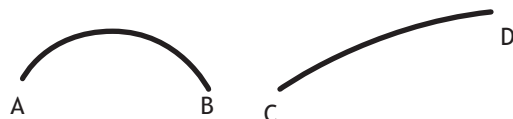
Encuentra el valor de:

$\angle a = \underline{\hspace{2cm}}$

CN = $\underline{\hspace{2cm}}$

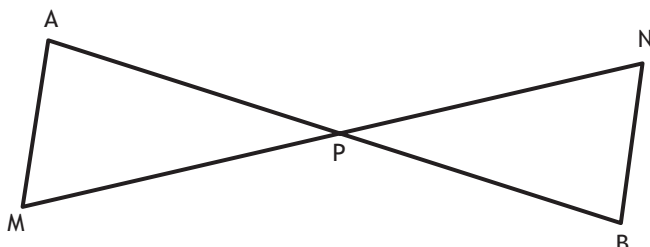
3. Se sabe que Don Ricardo es un amante de las cosas desconocidas y de resolver problemas que se relacionen con las matemáticas. Su hijo tiene dificultades en resolver un problema de álgebra y acude a él para que lo ayude: “Tengo una cuerda que fue dividida en dos partes iguales y se sabe uno de los segmentos que llamaron AB tiene por medida $2x + 10$ y otro que llamaron CD tiene por medida $5x - 43$, ¿Qué valor tiene cada una de las partes de la cuerda?”

Encuentra el valor de:



$AB = CD = \underline{\hspace{2cm}}$

4. En la siguiente figura se te presentan 2 segmentos de rectas llamados AB y MN cuya medida es de 12 cm. Se sabe que el punto P divide a los segmentos en dos partes iguales y el $\angle APM = 32^\circ$. Determina el valor de los ángulos y lados que se indican.



Encuentra el valor de:

$\angle PAM =$ _____
 $\angle PMA =$ _____
 $\angle PBN =$ _____
 $AP =$ _____
 $PN =$ _____
 $MP =$ _____
 $PB =$ _____

Autoevaluación

Cada inciso corresponde a la resolución de las situaciones planteadas.

	Pregunta de reflexión	Falso	Verdadero	Argumentación
a)	El ejercicio resuelto corresponde al uso de ángulos alterno internos entre paralelas.			
b)	El ejercicio no tiene mucha relevancia el hecho de saber que él $\triangle ABC$ es isósceles.			
c)	La solución del problema es mediante el uso de un sistema de ecuaciones lineales.			
d)	En la solución del problema intervinieron las herramientas: ángulos entre paralelas y ángulos opuestos por el vértice para poder encontrar los datos pedidos.			

Análisis de la actividad

Calificación: 1.25 punto por cada respuesta correcta. 1.25 punto por una argumentación pertinente.	Subraya el puntaje alcanzado.	Significado de los resultados para iniciar el desarrollo de los contenidos del Bloque I del programa.
Estratégico	9-10	Identifica, comprende y aplica las propiedades de la igualdad en el manejo de ecuaciones lineales en el momento de la resolución de las mismas. Identifica plenamente los ángulos entre paralelas y los usa como herramienta de apoyo para resolver los cuestionamientos planteados.

Autónomo	7-8	Identifica conceptos de igualdad e identifica plenamente los ángulos entre paralelas para la solución de sus problemas.
Básico	5-6	Tiene nociones sobre algunos conceptos de igualdad y logra identificar los ángulos entre paralelas.
Inicial-receptivo	2-4	Tiene nociones débiles sobre conceptos de igualdad e identificación de ángulos entre paralelas.
Nivel pre-formal	0-1	No logra identificar los ángulos entre paralelas.

A partir de los resultados obtenidos en la actividad desarrollada, estamos en condiciones de establecer los objetivos y metas a alcanzar, de acuerdo a las unidades de competencia establecidas, para ello se proponen los siguientes niveles de aprovechamiento, los cuales serán determinados mediante la autoevaluación, coevaluación y la heteroevaluación a lo largo del bloque II y a través de las actividades propuestas en las sesiones que abarcan los contenidos del programa de Matemáticas II.

Autoevaluación

Nivel estratégico: Resuelvo problemas utilizando la imaginación espacial para visualizar distintos tipos de casos de congruencia de triángulos en diversas figuras aplicando las propiedades de ALA, LAL y LLL empleando modelos aritméticos, algebraicos y gráficos, en forma razonada.	100%
Nivel autónomo: Aplicó las propiedades de los casos: ALA, LLL y LAL en triángulos e identifiqué todos los elementos que se requieren para afirmar la igualdad y aplico dichos casos para la resolución de problemas planteados.	80%
Nivel resolutorio: Aplicó las propiedades que conlleven a figuras congruentes y reconozco la mayor parte de los diversos casos que permiten afirmar la igualdad de figuras triangulares.	60%
Nivel inicial-receptivo: Distingo los requerimientos esenciales que hay entre dos triángulos a partir de la información presentada en figuras, realizando pocas inferencias y deducciones sobre el propio dibujo y sus elementos conocidos.	30%
Nivel pre-formal: Identifico poco los requerimientos básicos para la igualdad de triángulos.	10%

En el presente bloque entrarás en contacto con los conceptos: Triángulos iguales y sus propiedades, que están relacionados con conceptos y temas importantes de álgebra visto ya en Matemáticas I. Encontrarás actividades que te permitan relacionar un conocimiento que ya posees a otro que será nuevo y te sirva de ensamblaje para que tengas un panorama amplio y hagas tu propia conclusión.

Para lograr dicho objetivo, abordamos un elemento de mucha importancia como lo es la igualdad y para ello recurrimos a un concepto que en Matemáticas I llamamos ecuaciones y que acá lo reconocerás en la igualdad de lados y ángulos en figuras geométricas. Es indiscutible que intervienen la realización de diversas operaciones algebraicas como lo son la suma, resta, multiplicación y simplificación de fracciones, ya que las necesitarás cuando encuentres el valor desconocido de la ecuación formada. Igualmente, es importante recalcar que, para que puedas trabajar con figuras iguales, es necesario que tengas bien claro el concepto de ángulos, segmentos, triángulos y sus propiedades vistos en el bloque I de esta guía de Matemáticas II.

Como podrás darte cuenta, es importante que prestes mucha atención, ya que pretendemos que tú mismo observes que los temas de álgebra son importantes y no aislados, que son una herramienta necesaria para poder construir nuevos conceptos geométricos y lograr así la transferencia de tus conocimientos a situaciones de otra índole que no son solamente algebraicas.

Es muy importante trabajar en equipo cuando así sea requerido, socializando los resultados obtenidos en las actividades desarrolladas. Deberás entregar los productos solicitados en cada uno de las actividades sugeridas. Algo muy importante para no olvidar es respetar la participación de los compañeros y el tiempo establecido para las sesiones.

Sesión A: Noción intuitiva del concepto de congruencia



Desarrollo de criterios

De saber:

- Comprendo la relación de igualdad que existe entre los elementos de triángulos congruentes.

Del saber hacer:

- Distingo los requerimientos que necesito para la congruencia de triángulos.
- Aplico los requerimientos de congruencia de triángulos para la resolución de problemas.
- Utilizo la imaginación espacial para visualizar triángulos congruentes.

Del saber ser:

- Valoro la importancia de la congruencia de triángulos.
- Trabajo en forma colaborativa y respetuosa en el aula.



Dinamización y motivación



Contextualización



Como te habrás dado cuenta, la igualdad es el elemento clave para entender y llegar a la resolución de las situaciones que anteriormente se te plantearon y, por ende, nos adentraremos a ampliar ese concepto y enunciar las propiedades que de ello emanen, ya que existen situaciones cotidianas en donde su uso es vital. Un claro ejemplo le sucedió a Sergio, él es un diseñador que trabaja en una empresa que se dedica a la elaboración de materiales para el hogar. Actualmente trabaja en una nueva encomienda, diseñar la forma que tendrán las láminas de asbesto que lanzará la empresa; pero antes, él tendrá la tarea de presentar un modelo gráfico para su análisis, aprobación y posterior elaboración y venta en tiendas de la compañía. El diseño se presenta en la siguiente figura; pero a Sergio le han quedado algunas interrogantes en cuanto a lo que tiene que considerar ya que le exigen, por cuestiones de calidad y durabilidad, la uniformidad en su diseño bajo la condición que fueran elaboradas tomando como líneas imaginarias a dos rectas paralelas, las cuales en el diseño propuesto son los segmentos AC y MP.

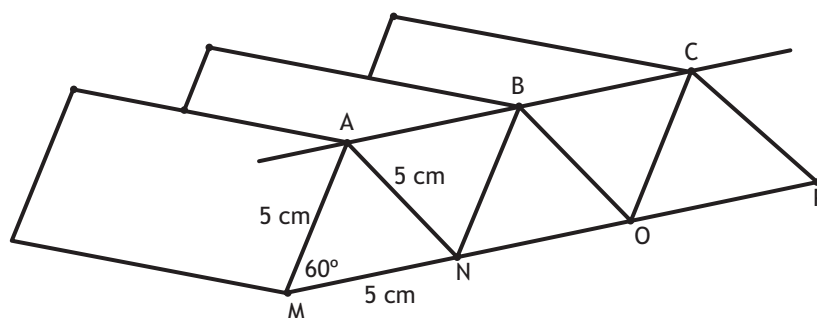


Figura 2.1

Sergio se pregunta, ¿qué tiene que considerar para la uniformidad en el diseño de la lámina sabiendo que el primer triángulo tiene por lado 5 cm?, ¿cómo serán las medidas de los demás triángulos?, ¿qué pasará con los demás ángulos de los otros triángulos?, ¿qué le propones? Analizando detalladamente la situación, en primera se nos habla de uniformidad, eso nos lleva a concluir que se requiere de la igualdad en las figuras triangulares que intervienen. En segundo lugar, podemos afirmar que habrá lados y ángulos iguales ya que si la lámina debe quedar perfectamente elaborada se tendrá que las medidas del triángulo AMN deberán ser las mismas para los otros triángulos restantes. Ello nos lleva a concluir que los lados del triángulo AMN son los mismos para los lados de los triángulos ABN, BNO, BOC y COP así los respectivos ángulos. Como te podrás dar cuenta, todos los triángulos que en el diseño se formaron son equiláteros, de otro modo la uniformidad pedida no se cumplirá.

Esta sencilla propuesta, nos lleva a concluir que es necesario saber de criterios de igualdad y de las condiciones que se necesitan para poder determinar que estamos frente a un caso de “figuras iguales” o ¿consideras que es necesario saber que todos los lados y ángulos son de la misma medida para concluir que estas frente a figuras iguales?

En el presente bloque se pretende avanzar a la formalización de dicho término, es decir a “congruencia” como se le conoce en la Geometría plana.



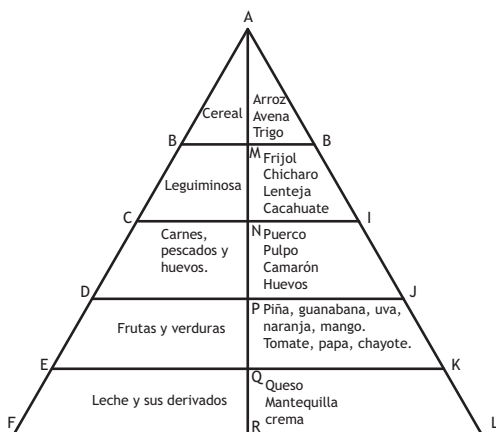
Actividad de aprendizaje 1

Para introducirnos en tal concepto, contesta la siguiente actividad indicando de tu lado izquierdo y con base en las figuras dadas, si estás ante un caso de igualdad y las razones que te llevaron a dicha decisión. Para ello, puedes apoyarte de tu regla y semicírculo.

No	Figuras	¿Son iguales?	Razones
1			
2			
3			

Actividad de aprendizaje 2

En la siguiente figura, se te presenta una tabla de los nutrientes que necesitamos diariamente ingerir para tener una alimentación completa y balanceada. Identifica cinco pares de triángulos iguales y coloca tus respuestas en el recuadro que se encuentra en la parte de abajo; indica los elementos que consideraste para llegar a esa conclusión.



No.	Pares de triángulos		Consideraciones
1			
2			
3			
4			
5			

Actividad de aprendizaje 3

Trabajando en ternas, tomen un pedazo de papel en forma cuadrada y dóblenlo diagonalmente por la mitad. El triángulo obtenido, dóblenlo de la misma manera dos veces más. Desdóblenlo y respondan las siguientes preguntas escribiendo sobre la línea.

1. ¿Cuántos triángulos iguales entre sí puedes contar?

2. ¿Qué elementos observaste en ellos que te dicen que son iguales?

Gracias a las observaciones que hiciste, comparemos si coincides con la opinión de los expertos. Como lo pudiste constatar en las actividades anteriores, un paso importante para establecer la igualdad de figuras es determinar la correspondencia entre lados y ángulos de uno y otro. Un ejemplo de ello, son la pareja de triángulos de la actividad de aprendizaje 1, donde el $\triangle ABC$ es igual al $\triangle MNP$, eso quiere decir que la correspondencia entre ambos queda de la siguiente manera:

Triángulo	Lados	Relación que guardan	Lados	Triángulo
$\triangle ABC$	AB	Son iguales	MP	$\triangle MNP$
	BC	Son iguales	PN	
	AC	Son iguales	MN	
Triángulo	Ángulos	Relación que guardan	Ángulos	Triángulo
$\triangle ABC$	$\angle A$	Son iguales	$\angle M$	$\triangle MNP$
	$\angle B$	Son iguales	$\angle P$	
	$\angle C$	Son iguales	$\angle N$	

Lo anterior es fundamental ya que de nada, o muy poco, servirá si podemos establecer la igualdad de dos figuras si no tenemos cuidado de corresponder los elementos adecuados.

La riqueza de lo que expone la tabla anterior es que tú y tus compañeros se permitan visualizar el concepto de congruencia; al margen de la definición y de los elementos teóricos que conlleva, con la simple idea intuitiva y visual (bien aplicada), estamos en la posibilidad de establecer relaciones algebraicas de igualdad, sin tener que recurrir a otros elementos más formales como lo que se señala en el siguiente ejercicio.

Ejemplo:

Se sabe que el $\triangle ABC$ es igual al $\triangle DEF$, además se tiene que las medidas que $AB = 3x + 1$ y $\angle C = 62^\circ$. Por otro lado, la medida $\angle F = 4z - 18^\circ$ y el lado $DE = 5$. Determina los valores de x y z .

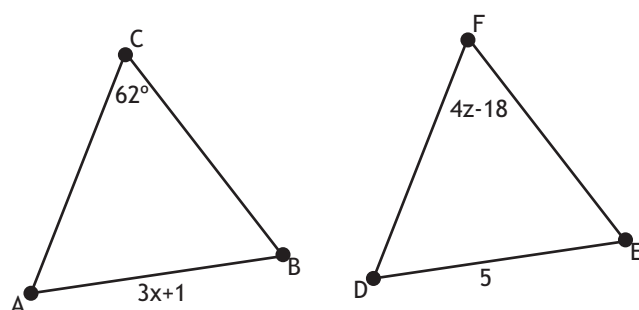


Figura 2.2

Por lo que hemos comentado, a partir de los datos que se presentan y siguiendo lo que la figura nos indica, podemos realizar el siguiente proceso:

Afirmaciones	Justificaciones
$3x + 1 = 5$	Ya que $AB = DE$ por qué tenemos triángulos iguales
$4z - 18^\circ = 62^\circ$	Ya que el $\angle C = \angle F$ por qué tenemos triángulos iguales
Resolviendo las ecuaciones formadas $x = \frac{4}{3}$ $z = 20^\circ$	Aplicando propiedades de igualdad

Como puedes notar, lo importante de esta parte es la idea intuitiva que puedes tener respecto al término congruencia o igualdad de dos figuras. Ahora vamos a proporcionarte algunas situaciones en la que puedes establecer la igualdad entre dos triángulos a partir de la simple observación.



Actividad de aprendizaje 4

Reúnanse en equipos y resuelvan los siguientes ejercicios en tu cuaderno de trabajo:

1. Dos personas parten del mismo punto y caminan en dirección norte durante cierto intervalo de tiempo a la misma velocidad. Después, ambas giran: una toma rumbo al este y la otra hacia el oeste, caminando nuevamente, ahora en dichas direcciones respectivamente, a velocidades iguales en tiempos iguales. Al término del segundo movimiento, las dos vuelven a girar y se encaminan al punto de su partida, al que llegan al mismo tiempo. ¿Se puede establecer la igualdad entre figuras que forman los recorridos hechos por las dos personas? Justifica tu respuesta escribiendo una argumentación adecuada.
2. Con el apoyo de una hoja de tu libreta, que tiene forma rectangular, le trazaremos una de sus diagonales para, posteriormente, recortarlo y realizar una comparación. ¿Qué se puede establecer de los triángulos que se formaron?, ¿son congruentes?, ¿cómo se establece la correspondencia de sus partes? Justifica tu respuesta escribiendo una argumentación adecuada.

Congruencia

“Podemos afirmar que dos figuras son iguales (de la misma forma y mismo tamaño), cuando sus lados y sus ángulos de uno, son iguales a sus homólogos de lados y ángulos del otro, es decir cuando coinciden todas sus partes”.

Por lo anterior, si queremos saber si dos triángulos cualesquiera son iguales, necesitamos primero saber si las 6 partes (lados y ángulos) de uno, son congruentes con las 6 partes homólogas del otro, es decir tienen el mismo tamaño y la misma forma. Podemos señalar que, prácticamente, es una copia una de la otra y, por lo tanto, si la sobreponemos, coinciden todos sus puntos.

Ejemplo: Los siguientes pares de triángulos son iguales, esto es el $\triangle PQR = \triangle P'Q'R'$ ya que cumple las condiciones:

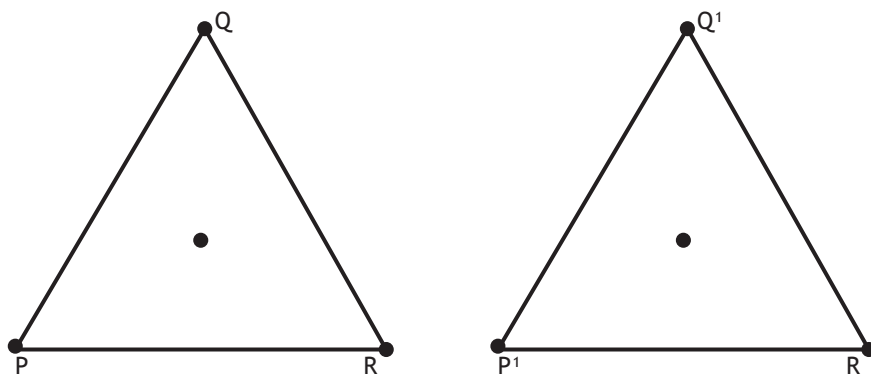


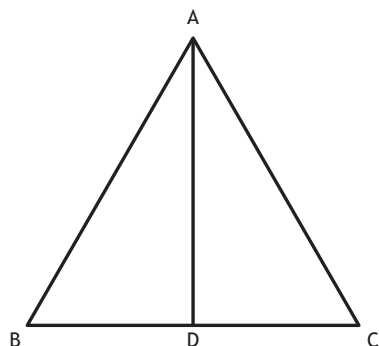
Figura 2.3

- a) Sus lados correspondientes $\overline{PQ} = \overline{P'Q'}$, $\overline{PR} = \overline{P'R'}$ y $\overline{RQ} = \overline{R'Q'}$
- b) Sus ángulos correspondientes $\angle P = \angle P'$, $\angle Q = \angle Q'$, y $\angle R = \angle R'$

Actividad de aprendizaje 5

Resuelve las situaciones a partir de la congruencia de triángulos que puedas visualizar. Recuerda lo importante de la correspondencia de los elementos.

1. Si se sabe que los triángulos ABC y DEF son congruentes, y $AB = x + 2y$, $DE = 5$, $BC = x + y$ y $EF = 3$, determina los valores de x e y .
2. Dos triángulos rectángulos son congruentes y se sabe que el ángulo menor de los dos ángulos agudos del primer triángulo vale $32^\circ 30'$, ¿Cuál es la medida del mayor de los ángulos agudos en el segundo triángulo?
3. En la siguiente figura se tiene las siguientes condiciones. Con base en ello determina si los $\triangle ADB$ y $\triangle ADC$ se pueden considerar como congruentes escribiendo, en el caso de ser afirmativa tu respuesta, las partes homólogas.



Se sabe que:

1. Se sabe que el triángulo ABC es isósceles
2. D es el punto que divide al segmento BC en 2 partes iguales.
3. AD es el perpendicular a BC

Las partes homólogas son:

1. _____
2. _____
3. _____
4. _____
5. _____
6. _____

Respuesta: _____

Sesión B: Criterios de congruencia de triángulos



Desarrollo de saberes

De Saber

- Enuncio los criterios de congruencia de los triángulos: L.A.L., L.L.L. y A.L.A.
- Comprendo la relación de igualdad que existe entre los elementos de triángulos congruentes.

Del saber hacer

- Distingo los requerimientos de cada uno de los criterios para la congruencia de triángulos.
- Aplico los criterios de congruencia de triángulos para la resolución de problemas.
- Utilizo la imaginación espacial para visualizar triángulos congruentes.

Del saber ser

- Valoro la importancia de la congruencia de triángulos en la resolución de problemas prácticos.
- Trabajo de forma colaborativa y respetuosa en el aula.



Contextualización



Hasta el momento hemos abordado la congruencia de triángulos desde el punto de vista intuitivo; ahora, es necesario conocer los elementos teóricos que corresponden, para poder integrar los elementos naturales del lenguaje al aspecto teórico y darle un sustento a los razonamientos que empleamos en la solución de los problemas.

Cabe mencionar que para poder aplicar dicha igualdad, en situaciones teóricas o prácticas, se requiere de algo que nos indique que la solución implica la congruencia de triángulos, mediante la respectiva correspondencia de sus elementos. En situaciones teóricas, basta con una frase o elementos que se nos mencione; pero en situaciones prácticas requerimos de habilidad, datos y herramientas que nos sugiera su uso. Para entender mejor lo mencionado te sugiero que contestes y analices la siguiente actividad:



Problematización

Actividad de aprendizaje 6

En el siguiente recuadro se te presentan dos situaciones de triángulos. Tu objetivo será que identifiques si corresponden a triángulos congruentes valiéndote de tu habilidad y tu observación apoyándote en el uso de regla y semicírculo. Posteriormente, si tu respuesta es afirmativa, contestarás los cuestionamientos que se encuentran debajo con la intención de tener una mejor visión y sustento de tus afirmaciones.

Pares de triángulos	¿Son iguales?
¿Cuántos elementos mediste?	
¿Cuáles son los elementos mediste?	
¿Cuántas son las igualdades que tienes que establecer para poder afirmar que 2 triángulos son congruentes?	

¿Cuántos elementos mediste?
¿Cuáles son los elementos mediste?
¿Cuántas son las igualdades que tienes que establecer para poder afirmar que 2 triángulos son congruentes?
¿Qué cambios observaste en la igualdad de los triángulos al ser rotados?

Seguramente te preguntarás si existe la posibilidad de una verificación más corta para afirmar que 2 triángulos son congruentes. Para responder ese cuestionamiento, es necesario resaltar 2 aspectos importantes: Primero, llegamos a la conclusión de que si hay dos triángulos congruentes se cumple, en la correspondencia de sus vértices, que lados correspondientes y los ángulos correspondientes entre los dos son iguales. A partir de este momento, podemos establecer que no es necesario verificar que los seis elementos que conforman a un triángulo (3 lados y 3 ángulos) se requieren para afirmar que dos triángulos son congruentes, basta con saber solamente tres de esos elementos, los cuales se describen a continuación:

Existen tres criterios que reducen los pasos de comparación y de análisis para determinar si dos triángulos son congruentes.

Para indicar la congruencia, se emplea el signo $\cong$ que significa congruente e igual.

1. Criterio L.L.L. (Lado-Lado-Lado): Dos o más triángulos son congruentes si tiene respectivamente iguales sus tres lados.

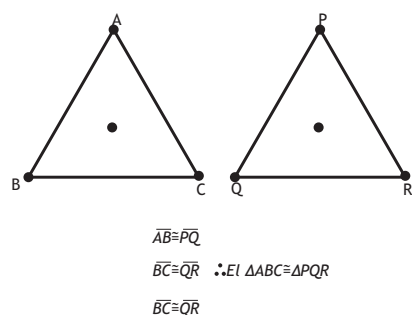


Figura 2.4

$$\overline{AB} \cong \overline{PQ}$$

$$\overline{BC} \cong \overline{QR}$$

$$\overline{AC} \cong \overline{PR} \therefore \triangle ABC \cong \triangle PQR$$

Criterio L.AL. (Lado-Ángulo-Lado): Dos o más triángulos son congruentes si tienen dos lados respectivamente iguales e igual ángulo comprendido entre ellos.

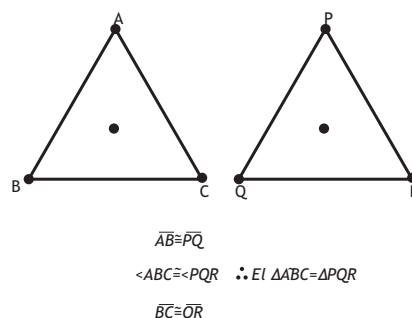
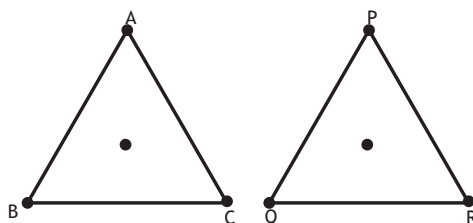


Figura 2.5

$$\overline{AB} \cong \overline{PQ}$$

$$\angle ABC \cong \angle PQR$$

2. $\overline{BC} \cong \overline{QR} \quad \therefore \triangle ABC \cong \triangle PQR$ Criterio A.L.A. (Ángulo-Lado-Ángulo): Dos o más triángulos son congruentes si tienen un lado igual, y respectivamente iguales los ángulos adyacentes a ese lado.



$$\angle ABC \cong \angle PQR$$

$$\overline{BC} \cong \overline{QR} \quad \therefore \triangle ABC \cong \triangle PQR$$

$$\angle BCA \cong \angle QRP$$

Figura 2.6

$$\angle ABC \cong \angle PQR$$

$$\overline{BC} \cong \overline{QR}$$

$\angle BCA \cong \angle QRP \quad \therefore \triangle ABC \cong \triangle PQR$ Puedes observar que el número de comparaciones, mediciones o afirmaciones previas a la congruencia es tres elementos en cada uno de los criterios. Ahora te queda ver cuáles son esos tres elementos.

Actividad de aprendizaje 7

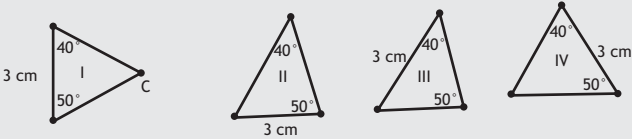
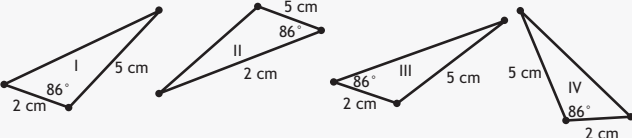
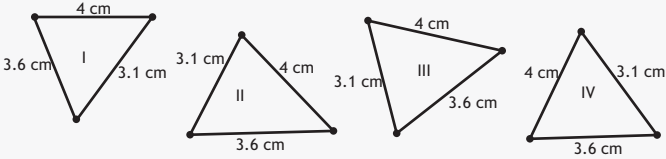
Indica si los pares de triángulos son congruentes y en caso de serlo, anota el criterio correspondiente.

Pares de triángulos	¿Congruentes?	Criterio

Pares de triángulos	¿Congruentes?	Criterio
		

Actividad de aprendizaje 8

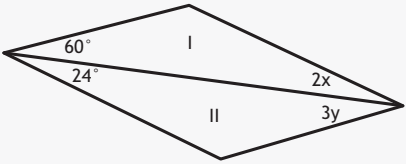
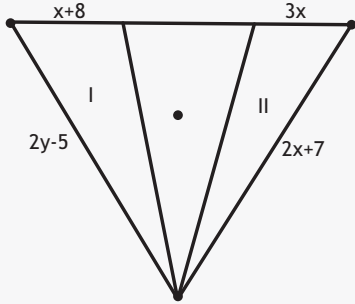
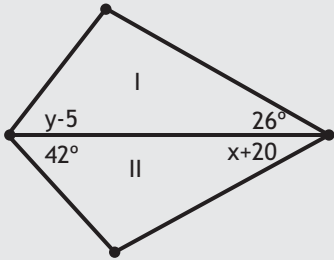
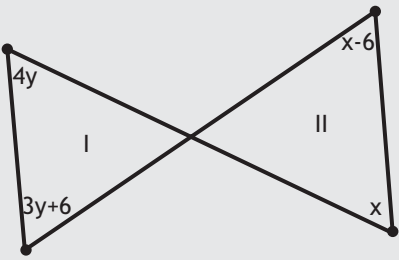
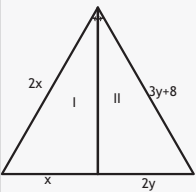
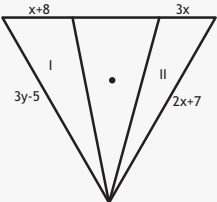
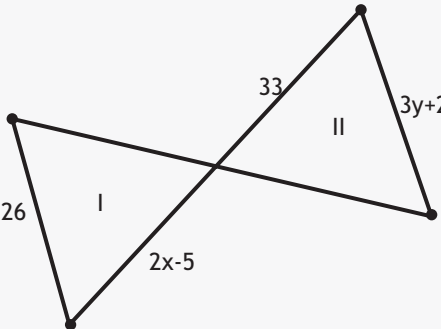
Selecciona la pareja de triángulos que cumplen las condiciones para ser congruentes e indica el principio de congruencia que lo avala.

Triángulos	Triángulos Congruentes
	Criterio de congruencia
	Triángulos Congruentes Criterio de congruencia
	Triángulos Congruentes Criterio de congruencia



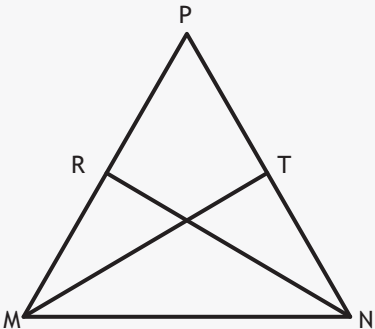
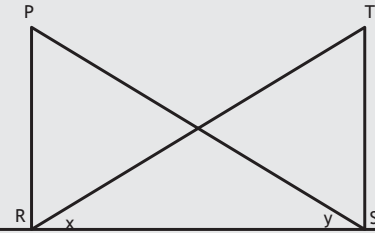
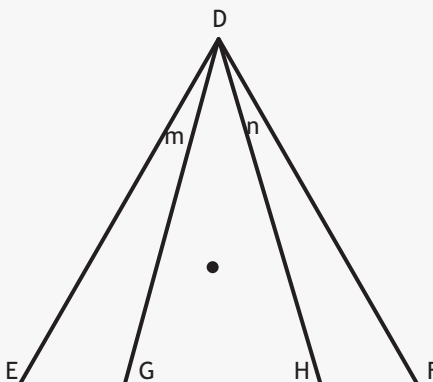
Actividad de aprendizaje 9

En cada una de las siguientes figuras el $\triangle I \cong \triangle II$, hallar el valor de x e y .

 Encuentra: $x = \underline{\hspace{1cm}}, y = \underline{\hspace{1cm}}$	 Encuentra: $x = \underline{\hspace{1cm}}, y = \underline{\hspace{1cm}}$
 Encuentra: $x = \underline{\hspace{1cm}}, y = \underline{\hspace{1cm}}$	 Encuentra: $x = \underline{\hspace{1cm}}, y = \underline{\hspace{1cm}}$
  Encuentra: $x = \underline{\hspace{1cm}}, y = \underline{\hspace{1cm}}$	 Encuentra: $x = \underline{\hspace{1cm}}, y = \underline{\hspace{1cm}}$

Actividad de aprendizaje 10

En los siguientes casos, escribe si se puede afirmar que son o no congruentes los triángulos. Si tu respuesta es afirmativa menciona el criterio que lo justifica.

Figura	Datos conocidos	Conclusiones
	Se sabe que: $MP = NP$ R es punto medio de MP. T es punto medio de NP	Se puede concluir: $\triangle MTP \cong \triangle NRP$: Razón: _____
	Se sabe que: $PR = TS$ $PR \perp RS$ $TS \perp RS$ $\angle x = \angle y$	Se puede concluir: $\triangle PRS \cong \triangle TSR$: Razón: _____
	Se sabe que: $DE = DF$ $\angle m = \angle n$	Se puede concluir: $\triangle DGE \cong \triangle DHF$: Razón: _____

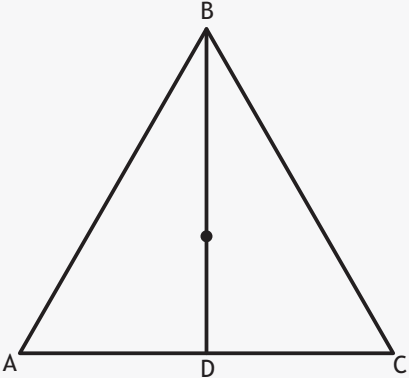
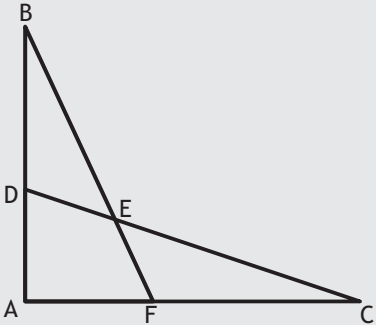
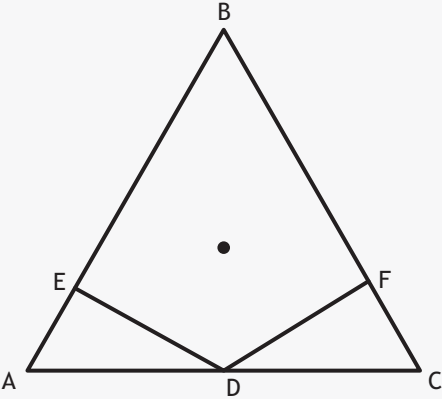
Actividad de aprendizaje 11

Reúnete con tus compañeros en binas y continuemos ejercitando la visualización, determinación y aplicación de la congruencia de triángulos en las siguientes situaciones:

1. A continuación se establecen cinco congruencias de triángulos. Dibújenlos en sus cuadernos y establezcan las correspondencias de sus elementos.



- a) $\triangle ABC \cong \triangle QPR$, el segundo es acutángulo.
 - b) $\triangle MNO \cong \triangle LST$, el primero es rectángulo.
 - c) $\triangle SAL \cong \triangle SAN$, el segundo es equiángulo.
 - d) $\triangle MDF \cong \triangle ONU$, son cualesquiera.
 - e) $\triangle ACG \cong \triangle LEP$, el primero es obtusángulo
2. Determina los valores de a y b en cada inciso. Indica el criterio de congruencia que empleaste en cada caso.

Dado que: $\triangle ABC$ es isósceles BD es mediana de AC $AB = 2a - 20$ $BC = 50$ $\angle ABD = 30^\circ$ y $\angle CBD = b - 10^\circ$	
Dado que: $\triangle ABF \cong \triangle ACD$ $BD = a - 5$ $CF = 3a - 26$ $\angle AFB = b + 20^\circ$ $\angle ADC = 32^\circ$	
Dado que: D es punto medio de AC $DE \perp AB$ $DF \perp BC$ $DE \cong DF$ $AE = 5a + b$ $CF = 19$ $BE = 10a - 2b$ $BF = 42$	

Nota: No olvides que en algunos triángulos surge una herramienta importante que debes tomar muy en cuenta en la realización de tus ejercicios: "A lados iguales se le oponen ángulos iguales". Esto quiere decir que en la actividad de aprendizaje 11 ejercicio 2, inciso a) tenemos un triángulo que es isósceles cuyos lados son iguales es decir que $AB = BC$ y por lo anterior pudiste concluir que el ángulo A es igual al ángulo C.



Realimentación

- Resuelve cada uno de los siguientes ejercicios planteados utilizando el proceso adecuado para llegar a la respuesta correcta.
- Selecciona la pareja de triángulos que cumplen las condiciones para ser congruentes e indica el principio de congruencia que lo avala.

Triángulos	Triángulos Congruentes
	Criterio de congruencia

- En la siguiente figura el $\triangle I \cong \triangle II$, encuentra el valor de x e y

a)

Encuentra el valor de:

$X =$ _____

$Y =$ _____

b)

Encuentra el valor de

$X =$ _____

$Y =$ _____

- En los siguientes casos escribe si se puede afirmar que son o no congruentes los triángulos, en caso de ser afirmativa tu respuesta menciona el criterio que lo justifica.

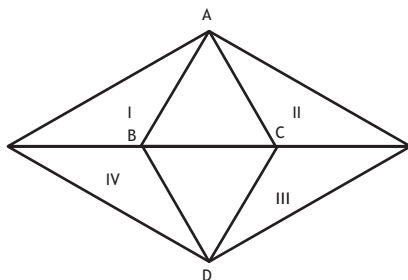


Figura	Datos conocidos	Conclusiones
	Se sabe que: $AC = BD$ $AD = BC$	Se puede concluir: $\triangle ABC \cong \triangle ABD :$ _____ Razón: _____

4. Determina los valores de a y b en cada inciso. Indica el criterio de congruencia que empleaste en cada caso.

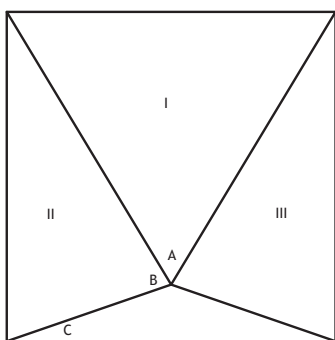
Figura	Datos conocidos	Conclusiones
	Se sabe que: Se sabe que M es punto medio de MN $MN \perp PQ$ Además se sabe que: $PM = 2a + 3$ $PN = 3a - 5$ $\angle PMQ = b + 30^\circ$ $\angle PNQ = 3b - 120^\circ$	Se puede concluir: $\triangle MQP \cong \triangle NQP :$ _____ Razón: _____ Entonces el valor de: $a = \underline{\hspace{2cm}}$ $b = \underline{\hspace{2cm}}$

5. ¿Se puede afirmar que el $\triangle ABC \cong \triangle BCD$ si se sabe que $\angle I \cong \angle III$ y $\angle II \cong \angle IV$? En caso de serlo, indica el criterio de congruencia que lo avala.



El $\triangle ABC \cong \triangle BCD$, ¿Es congruente?: _____, por la razón: _____

6. Resuelve cada uno de los siguientes problemas propuestos señalando la respuesta correcta. Te recomiendo que analices y leas cuidadosamente todas las posibles opciones antes de escoger la que sea correcta.
7. Se sabe que la siguiente figura es un cuadrado y el triángulo I es equilátero. Con ayuda de la congruencia de triángulos determina el valor de los $\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$.



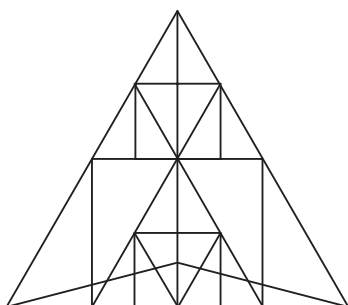
60°, 75°, 150°

30°, 60°, 75°

30°, 75°, 150°

60°, 150°, 30°

8. ¿Cuántos pares de triángulos congruentes puedes distinguir en la siguiente figura?



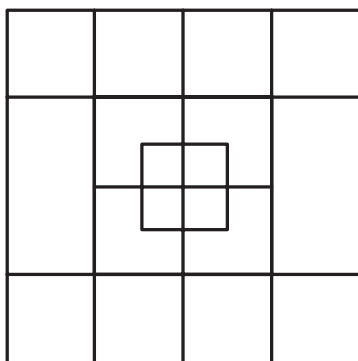
17

14

19

16

9. ¿Cuántos cuadrados puede distinguir en la siguiente figura?



18

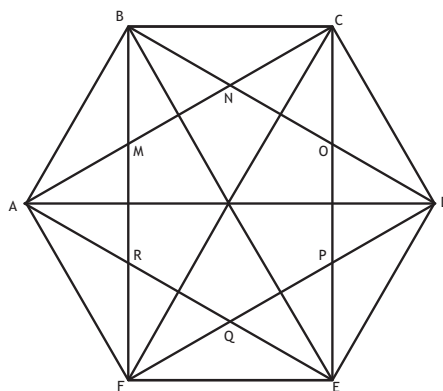
20

16

19



10. A continuación se te presenta un hexágono regular. Obsérvala y responde, ¿Cuántos triángulos son congruentes al $\triangle ABC$?



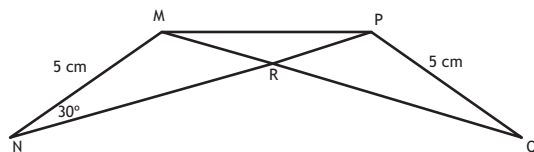
6

10

8

12

11. En la siguiente figura se sabe que los triángulos $\triangle MNR \cong \triangle PQR$ son congruentes y ambos son isósceles, ¿Qué valor tiene el ángulo $\angle MPR$?



105°

$37^\circ 30'$

$65^\circ 30'$

75°

- II. A continuación se te presenta una actividad que tiene como su principal objetivo integrar todos los conocimientos, habilidades y actitudes que desarrollaste a lo largo del mismo. Se te sugiere trabajarlo en equipo poniendo toda tu creatividad y disposición para hacerlo lo mejor posible.

“Construcción de un rompecabezas”

Esta actividad consiste en manipular triángulos congruentes en la construcción de un rompecabezas. El rompecabezas contendrá un dibujo, paisaje, un letrero publicitario, una fotografía, etc. En fin, cada uno seleccionará la suya no olvidando que el dibujo o figura seleccionada no puede quedar en blanco y negro. Las características que debe contener el rompecabezas se listan a continuación:

1. Debe ser elaborado en cartón, cartoncillo o algún material que permita su manipulación con la facilidad y tenga cierta durabilidad.
2. El rompecabezas debe tener un área mínima de 500 cm^2 y la forma de la figura puede ser cuadrado, rectángulo o incluso un triángulo cuyas medidas deben dar el área mencionada.
3. Cada pieza debe ser un triángulo, el cual debe ser congruente a uno, dos o tres piezas (no más). Eso quiere decir que deberán formarse diversos grupos de piezas triangulares de diferentes medidas pero haciendo congruencia con otras piezas. Las piezas no tendrán necesariamente la misma imagen (¿OK?)

4. En la parte posterior de las piezas, debe señalar el número de pieza y los que correspondan a las congruentes a ella, así como el criterio de congruencia que utilizó.
5. El número de piezas debe ser mínimo 10 y máximo 30 empleando el criterio de congruencia las veces que consideres necesarias. No se permite que solo se use uno o dos criterios en la construcción, se tiene que emplear los tres criterios.
6. Elaboraran una relatoría del trabajo y presentándola al docente junto con el rompecabezas.
7. Organizar en el aula una muestra del trabajo por grupos y e intercambiar con otros equipos para realizar un torneo de armado de rompecabezas.
8. Los equipos son de 5 ó 6 integrantes.





Rúbrica para la evaluación del bloque

Competencia	Nivel de logro o desempeño				
	5	4	3	2	1
Del Saber	Resuelvo completamente problemas utilizando los diversos casos de congruencia de triángulos aplicando las propiedades de A.L.A., L.A.L. y L.L.L. empleando modelos adecuados aritméticos y algebraicos en forma razonada e indico claramente la correspondencia entre sus elementos.	Resuelvo completamente problemas utilizando los diversos casos de congruencia de triángulos aplicando las propiedades de A.L.A., L.A.L. y L.L.L. empleando de forma inadecuada los modelos aritméticos y algebraicos en forma razonada e indico claramente la correspondencia entre sus elementos.	Resuelvo la mayoría de los problemas utilizando los diversos casos de congruencia de triángulos aplicando las propiedades de A.L.A., L.A.L. y L.L.L. empleando de forma inadecuada los modelos aritméticos y algebraicos en forma razonada e indico de forma poco clara la correspondencia entre sus elementos.	Resuelvo algunos problemas utilizando alguno de los casos de congruencia de triángulos aplicando las propiedades de A.L.A., L.A.L. y L.L.L. empleando de forma inadecuada los modelos aritméticos y algebraicos en forma razonada e indico algunas de las correspondencias entre sus elementos.	Resuelvo problemas defectuosamente utilizando alguno de los casos de congruencia de triángulos: A.L.A., L.A.L. y L.L.L. empleando de forma inadecuada los modelos aritméticos y algebraicos en forma razonada y no indico de forma clara la correspondencia entre sus elementos.
Del saber hacer	Elijo y justifico completamente el criterio de congruencia apropiado para determinar la congruencia de triángulos, y lo aplico en situaciones teóricas y prácticos que requieren establecer la igualdad de segmentos o ángulos.	Elijo y justifico completamente el criterio de congruencia apropiado para determinar la congruencia de triángulos, y lo aplico en casi todas las situaciones teóricas y prácticas que requieren establecer la igualdad de segmentos o ángulos.	Presento algunas deficiencias al elegir y justificar el criterio de congruencia apropiado para determinar la congruencia de triángulos, y lo aplico en casi todas las situaciones teóricas y prácticas que requieren establecer la igualdad de segmentos o ángulos.	Presento algunas deficiencias al elegir y justificar el criterio de congruencia apropiado para determinar la congruencia de triángulos, y lo aplico en pocas situaciones teóricas y prácticas que requieren establecer la igualdad de segmentos o ángulos.	Presento serias deficiencias al elegir y justificar el criterio de congruencia apropiado para determinar la congruencia de triángulos, y lo aplico en escasas situaciones teóricas y prácticas que requieren establecer la igualdad de segmentos o ángulos.
Del saber ser	Valoro completamente la importancia de la congruencia de triángulos en la resolución de problemas prácticos y teóricos, manteniendo una actitud completamente colaborativa y respetuosa en el aula.	Valoro completamente la importancia de la congruencia de triángulos en la resolución de problemas prácticos y teóricos, manteniendo una actitud poco colaborativa y respetuosa en el aula.	Muestro poco aprecio por la congruencia de triángulos en la resolución de problemas prácticos y teóricos, manteniendo una actitud poco colaborativa y respetuosa en el aula.	Muestro poco aprecio por la congruencia de triángulos en la resolución de problemas prácticos y teóricos, manteniendo una actitud nulamente colaborativa y respetuosa en el aula.	No aprecio la congruencia de triángulos en la resolución de problemas prácticos y teóricos, manteniendo una actitud nulamente colaborativa y respetuosa en el aula.

Bloque III. Resuelve problemas de semejanza de triángulos y teorema de Pitágoras

Atributos de las competencias genéricas:

- 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
- 5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
- 5.4 Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez.
- 5.6 Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para procesar e interpretar información.
- 6.1 Elige las fuentes de información más relevantes para un propósito específico y discrimina entre ellas de acuerdo a su relevancia y confiabilidad.
- 7.1 Define metas y da seguimiento a sus procesos de construcción de conocimientos.
- 8.1 Propone manera de solucionar un problema y desarrolla un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.
- 8.2 Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.
- 8.3 Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.

Competencias disciplinares básicas:

- 1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
- 2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
- 3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
- 4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
- 5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
- 6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
- 7. Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia.
- 8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

En el presente bloque y conociendo ya las funciones trigonométricas de los ángulos agudos, de triángulos rectángulos ahora los ubicarás para encontrar las funciones de cualquier medida de ángulos, utilizando en el plano cartesiano, además de conocer e identificar la forma gráfica de dichas funciones. Estoy seguro si te aplicas podrán comprender y justificar todo lo referente a estos temas.

A continuación te presentamos unos ejercicios para que recuerdes algo de lo que ya has visto con anterioridad y que será necesario revivas para poder entender el presente bloque.

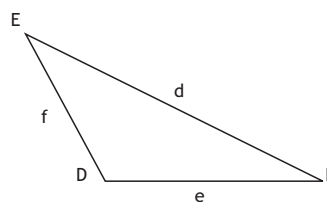
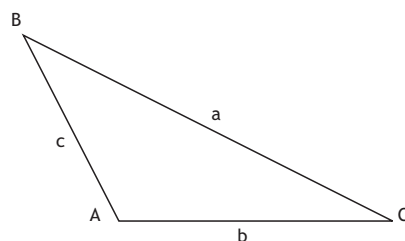


Dinamización y motivación

- a) Calcula el valor desconocido en la siguiente proporción. $\frac{15}{10} = \frac{x}{4}$

a) 8	b) 6	c) 10	d) 4
------	------	-------	------

En las siguientes figuras encuentra los segmentos proporcionales correctos.

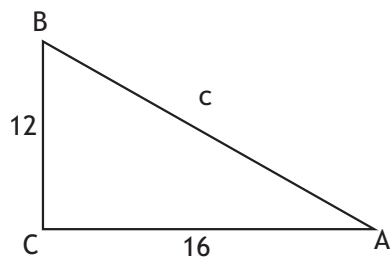


a) $\frac{b}{e} = \frac{c}{d} = \frac{a}{f}$	b) $\frac{e}{b} = \frac{f}{a} = \frac{d}{c}$	c) $\frac{d}{a} = \frac{f}{c} = \frac{e}{b}$	d) $\frac{c}{d} = \frac{f}{a} = \frac{b}{e}$
--	--	--	--

Una regla de 1.2 m de largo, colocada verticalmente, proyecta una sombra de .45 m en el momento en que una estatua proyecta una sombra de 4 m, ¿qué altura tiene la estatua?

a) 10.66	b) 8.66	c) 12.66	d) 9.66
----------	---------	----------	---------

La siguiente figura es un triángulo rectángulo con medidas en sus catetos. ¿Cuál es el valor de la hipotenusa c?



a) 18	b) 20	c) 22	d) 24
-------	-------	-------	-------

Si un avión se desplaza a 160 km/h con dirección al norte y si un viento sopla a 110 km/h con dirección al este, en lo que suele llamarse, un viento cruzado, ¿cuál es la distancia recorrida por el avión después de 1 hora?

a) 190.15km	b) 194.16	c) 196.12	d) 198.18
-------------	-----------	-----------	-----------

Autoevaluación

Cada inciso corresponde a la resolución de las situaciones planteadas.

	Pregunta de reflexión	Falso	Verdadero	Argumentación
a)	El ejercicio corresponde a una razón.			
b)	Los triángulos de la figura son congruentes.			
c)	En la resolución del ejercicio se aplicó el teorema de Pitágoras.			
d)	El valor de la hipotenusa es igual a 20.			
e)	El criterio aplicado corresponde a semejanza de triángulos.			

Análisis de la actividad

Calificación: 1 punto por cada respuesta correcta. 1 punto por una argumentación pertinente.	Subraya el puntaje alcanzado.	Significado de los resultados para iniciar el desarrollo de los contenidos del Bloque III del programa.
Estratégico	9-10	Identifica, comprende y aplica las propiedades de las proporciones, semejanza de triángulos y/o teorema de Pitágoras e inclusive lo utiliza para resolver problemas más complejos.
Autónomo	7-8	Identifica conceptos y estructura procesos de los temas de proporción, semejanza y/o teorema de Pitágoras.
Básico	5-6	Tiene nociones sobre algunos conceptos de proporción semejanza y/o teorema de Pitágoras.
Inicial-receptivo	2-4	Tiene nociones débiles sobre algunos conceptos de proporción semejanza y/o teorema de Pitágoras.
Nivel pre-formal	0-1	No logra identificar operaciones ni los conceptos básicos sobre la proporción, semejanza y/o teorema de Pitágoras.

A partir de los resultados obtenidos en la actividad desarrollada, nuevamente estamos en condiciones de establecer los objetivos y metas a alcanzar, de acuerdo a las unidades de competencia establecidas, para ello se proponen los siguientes niveles de aprovechamiento.

Autoevaluación

Nivel estratégico: Resuelvo problemas utilizando la imaginación espacial para visualizar distintos tipos de situaciones, aplicando el teorema de Tales, las propiedades de semejanza de triángulos y el teorema de Pitágoras empleando modelos aritméticos, algebraicos y gráficos, en forma razonada.	100%
Nivel autónomo: Aplicó las propiedades de las proporciones, semejanza y teorema de Pitágoras para la resolución de problemas planteados.	80%
Nivel resolutivo: Aplicó las propiedades de las proporciones, semejanza y teorema de Pitágoras para la resolución de ejercicios.	60%
Nivel inicial-receptivo: Distingo las proporciones aplicables en la semejanza de triángulos e identifico el teorema de Pitágoras para resolver ejercicios diversos.	30%
Nivel pre-formal: Identifico los conceptos de razón y proporción.	10%



Dinamización y motivación

Antes de comenzar, te pido que analices la siguiente situación, misma que está resuelta pero es importante que tomes nota del procedimiento seguido, ya que esto te ayudará a comprender mejor el tema de la presente sesión.

Juan tiene \$10.00, desea comprar dulces cuyo precio es de \$2.00 cada uno. Su hermano David compra y vende computadoras, cuenta con \$40,000 para invertir en computadoras cuyo precio individual es de \$8000. ¿Cuántos dulces puede comprar Juan? ¿Cuántas computadoras puede comprar David? ¿Qué relación puedes establecer en torno a las cantidades calculadas?

Podemos observar lo siguiente:

Juan puede comprar 5 dulces, ya que:

$$10 \text{ pesos} = 5$$

$$2 \text{ pesos}$$

David puede comprar 5 computadoras debido a que:

$$40000 \text{ pesos} = 5$$

$$8000 \text{ pesos}$$

Luego se puede afirmar que:

$$\frac{10}{2} = \frac{40\ 000}{8\ 000}$$

En consecuencia, decimos que la razón o cociente de Juan es igual a la que corresponde David. Como veremos a continuación, y recordarás, la igualdad anterior se conoce como proporción.

Si Juan y David en otra ocasión quieren comprar dulces y computadoras, saben que la cantidad de objetos que adquieren es la misma para ambos si, David invirtió \$24 000 ¿Cuántos dulces compró Juan?

Analiza la situación, resuélvela y comparte con tus compañeros las observaciones realizadas.

Sesión A: Segmentos proporcionales y Teorema de Tales



Desarrollo de saberes

Del saber:

- Identifico las características de triángulos semejantes.
- Enuncio y comprendo los criterios de semejanza de triángulos: Ángulo, ángulo, ángulo; tres lados proporcionales; dos lados proporcionales y el ángulo comprendido igual.
- Enuncio y comprendo el teorema de Tales.

Del saber hacer

- Distingo los requerimientos de cada uno de los criterios para la semejanza de triángulos.
- Aplico los criterios de semejanza de triángulos para la resolución de problemas.
- Aplico el teorema de Tales para la resolución de problemas.
- Utilizo la imaginación espacial para visualizar triángulos semejantes, en objetos y figuras en dos y tres dimensiones.

Del saber ser

- Valoro la importancia de la utilización de la semejanza de triángulos para resolver problemas de distinta índole.
- Aprecio la utilidad del teorema de Tales y de Pitágoras.
- Trabajo respetando las instrucciones y turnos en el aula.



Dinamización y motivación

En esta sesión, abordaremos los elementos previos a la semejanza de triángulos, estos son los segmentos proporcionales y el teorema de Tales. Ambos elementos están íntimamente relacionados con el concepto de semejanza de triángulos, con diversas situaciones que se presentan en nuestro cada día.



Realmente, el primer elemento dispone de lo que analizamos en la introducción, pero desde el punto geométrico, induciremos el concepto de segmentos proporcionales recordando que antes tuvimos cantidades que nos permitían establecer la proporción.

En la situación de los dulces de Juan y las computadoras de su hermano gráficamente podemos establecer lo siguiente:

Como puede ver al representar las cantidades en segmentos, de alguna forma podemos visualizar lo que serían segmentos proporcionales.

Su representación sería:

Introduciremos el concepto de segmentos proporcionales con la siguiente actividad:



Contextualización

Actividad de aprendizaje 1

Formen equipos de cuatro personas.

Cada equipo deberá traer una soga de plástico (de preferencia) de 3 metros de longitud, cinta métrica o fluxómetro, y crayola o gis para marcar.

La actividad consiste en dividir el segmento que se forma al estirar la soga de 3 metros en segmentos pequeños y comparar la proporción que resulte con otro equipo.

Actividad: Mide y marca con el gis, pedazos de 10 cm en la soga, hasta llegar a tres metros y responde:

1. ¿Cuántos pedazos salieron?

Ahora mide y marca con el gis, pedazos de 20 cm en la soga, hasta llegar a tres metros y responde:

1. ¿Y ahora cuántos pedazos salieron?
2. ¿Qué relación existe entre los pedazos de 10 cm y los de 20 cm?
3. ¿A qué razón se encuentran los segmentos de recta?



Figura 3.1 Representación de segmentos trazados en la soga.

Como ves, al representar las cantidades en segmentos, de alguna forma podemos visualizar lo que serían segmentos proporcionales.

Hace muchos años, el filósofo griego **Tales de Mileto** diseñó, a partir de observaciones simples, un método para medir elementos que le resultaban curiosos. Por ejemplo, las pirámides de Egipto, los árboles que lo rodeaban e incluso las alturas de algunos de sus conciudadanos, las obtenía utilizando, segmentos proporcionales.

Al realizar los cortes con sus zanahorias, o probablemente algún elemento que tuviera a su disposición, descubrió las bases de lo que conocemos actualmente como Teorema de Tales.

Dicho teorema establece lo siguiente:

“Si tres o más paralelas cortan a dos transversales o secantes, determinan en ellas segmentos correspondientes proporcionales”.

Es decir:



Figura 3.2 Representación geométrica del Teorema de Tales.

Se establece la siguiente proporción:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

Además, se pueden establecer las siguientes proporciones:

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$	$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$	$\frac{c}{a} = \frac{d}{b}$
o	o	o
$\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$	$\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$	$\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$

Ejemplo:

El valor de x en la figura es:

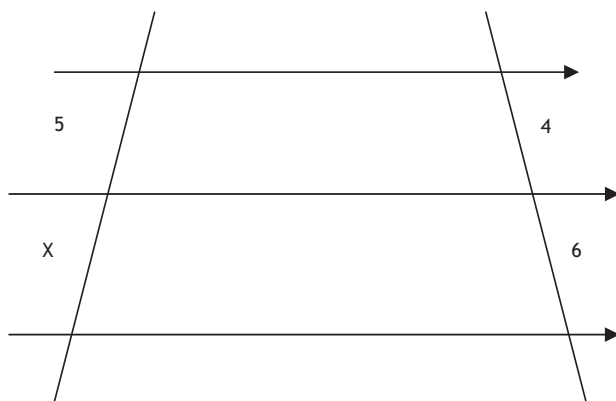


Figura 3.3

A partir de la figura tenemos el siguiente razonamiento:

Por el Teorema de Tales afirmamos la siguiente proporción:

$$\frac{5}{x} = \frac{4}{6}$$

Y resolviendo la proporción queda:

$$x = \frac{(6)(5)}{4} = 7.5$$

Teorema de Tales aplicado a triángulos

El Teorema de Tales bien puede aplicarse a triángulos tomando a dos de sus lados como secantes o transversales y trazando los segmentos de división paralelos a la base. De esta forma se obtiene que:

“Toda paralela a uno de los lados de un triángulo, divide a los otros dos lados en segmentos proporcionales”.

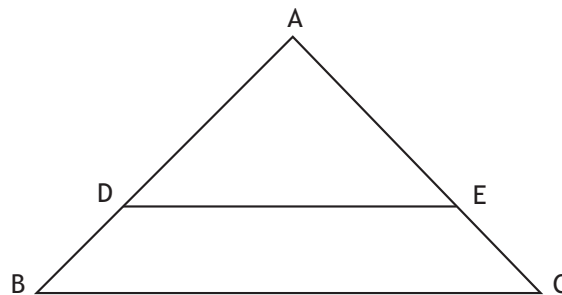


Figura 3.4

Separando los triángulos quedarían las figuras así:

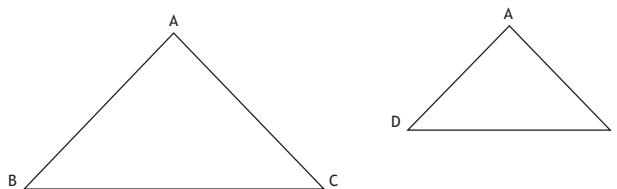


Figura 3.5

Los ángulos iguales son:

$$\angle A = \angle A$$

$$\angle B = \angle D$$

$$\angle C = \angle E$$

Sus segmentos proporcionales son:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

Los segmentos proporcionales, también, podrían ser los siguientes mostrados en los triángulos.

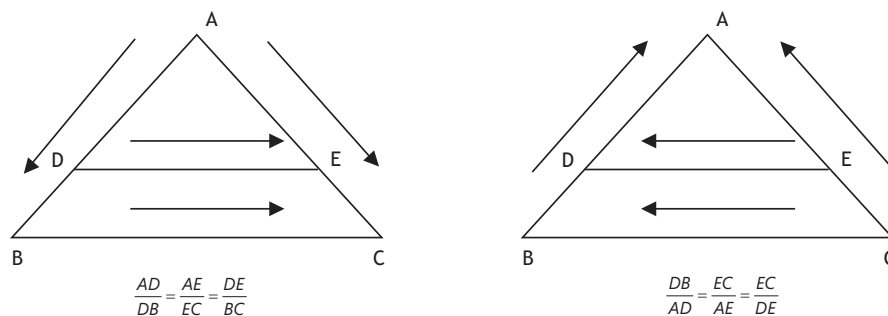


Figura 3.6

Algunos autores, incluso, refieren el teorema anterior como el de Tales, otros le llaman teorema fundamental de la proporción. Lo importante es darnos cuenta que es un caso particular del Teorema de Tales y descubrir la forma en la que puedes emplearlo para resolver diversas situaciones.

Ejemplo 1:

En la siguiente figura, determina el valor de x, si: AB = 20 y BC = 18:

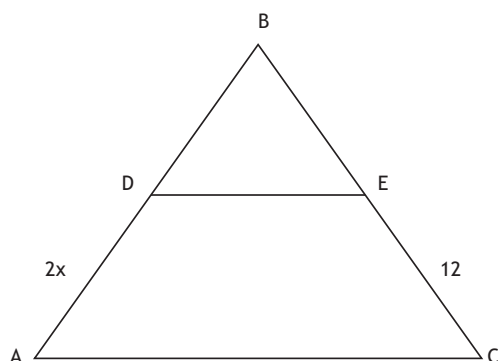


Figura 3.7

Por el teorema de Tales en triángulos sacamos la proporción:

$$\frac{2x}{AB} = \frac{12}{BC}$$

Sustituyendo:

$$\frac{2x}{20} = \frac{12}{18}$$

Luego resolvemos:

$$x = \frac{(12)(20)}{(18)(2)} = \frac{20}{3} = 6.6$$



Actividad de aprendizaje 2

Ahora, te propongo algunas actividades para que realices en tu libreta y compartas con tus compañeros y docente, de tal forma que desarrolles los elementos revisados en la presente sección.

1. Se sabe que la bisectriz de cualquiera de los ángulos de un triángulo, divide al lado opuesto en segmentos que son proporcionales a los otros dos lados. Si en el triángulo ABC, $AB = 6$, $AC = 5$ y $BC = 8$. Encuentra las longitudes de los segmentos que se forman al hacer contacto la bisectriz del $\angle A$ con el segmento BC.
2. Un mapa de un poblado esté representado a escala de tal modo que 1 cm corresponde a 15 km de distancia real. Completa la siguiente tabla que corresponde a los kilómetros del mapa.

Mapa	2 cm	8 cm	17 cm
Kilómetros reales			

Sesión B: Semejanza de triángulos



Desarrollo de saberes

Del Saber

- Enuncio y comprendo el teorema de Pitágoras.
- Describo las relaciones de proporcionalidad entre catetos e hipotenusa al trazar la altura sobre ésta.

Del saber hacer

- Aplico el teorema de Pitágoras para la resolución de problemas.
- Utilizo la imaginación espacial para visualizar triángulos rectángulos o semejantes, en objetos y figuras en dos y tres dimensiones.
- Establezco las relaciones de proporcionalidad entre catetos e hipotenusa al trazar la altura sobre ésta, en figuras u objetos.

Del saber ser

- Valoro la importancia de la utilización de la semejanza de triángulos para resolver problemas de distinta índole.
- Aprecio la utilidad del teorema de Pitágoras.
- Trabajo respetando las instrucciones y turnos en el aula.



Dinamización y motivación

Abordaremos en esta sesión la semejanza de triángulos, sus aplicaciones en problemas reales y situaciones teóricas. Para ello vamos a adentrarnos un poco a la idea intuitiva de semejanza.

Has notado, en tu alrededor, que existen grandes construcciones arquitectónicas en la actualidad en las ciudades urbanas; desde tiempos muy remotos, en construcciones de templos e iglesias, pero para que éstas se lleven a cabo antes se realizó una maqueta de la misma la cual se hace a una escala más pequeña para luego construir una semejante ya con las medidas reales.

Lo mismo sucede cuando se toma una fotografía con una cámara digital, luego al imprimirla uno tiene la facultad de elegir el tamaño de la misma en su ampliación y hacerla semejante.



Contextualización

Actividad de aprendizaje 3

Analiza las siguientes figuras (robots) que se te presentan a continuación:

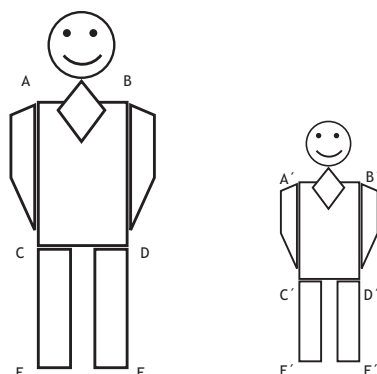


Figura 3.8

A continuación, llena la siguiente tabla con los valores de las longitudes de cada segmento que se te proporciona, contesta correctamente las siguientes cuestiones.

Segmentos	Longitud	Segmentos	Longitud
AB		AB'	
AC		AC'	
BD		BD'	
CD		CD'	
CE		CE'	
EF		EF'	

1. ¿Será que exista proporcionalidad entre los valores de las longitudes de los segmentos de la tabla?

2. ¿Por qué se dirá que la segunda figura es una reproducción a escala de la primera?



Concepto de semejanza

La semejanza entre dos elementos, se da precisamente cuando lo que varía entre ellos es su dimensión, es decir, la forma básica no cambia, solamente se altera el tamaño.

Decimos que dos figuras son semejantes si tienen la misma forma pero no el mismo tamaño y sus lados son proporcionales.



Figura 3.9 Semejantes.

Pero vamos a acercarnos de una manera más específica a la semejanza de triángulos.

Para ello, observa el siguiente par de triángulos y contesta lo que se te pide.

Figuras:	¿Son semejantes los triángulos?	¿Por qué?	¿Puedes afirmar la semejanza entre ellos?

Como puedes observar, existen algunos elementos a identificar y verificar, antes de decidir acerca de la semejanza entre dos triángulos.

Semejanza de triángulos

Podemos decir que:

“Dos triángulos son semejantes si tienen sus ángulos respectivamente iguales y sus lados proporcionales. El signo de semejanza es $\sim$ ”.

Gráficamente:

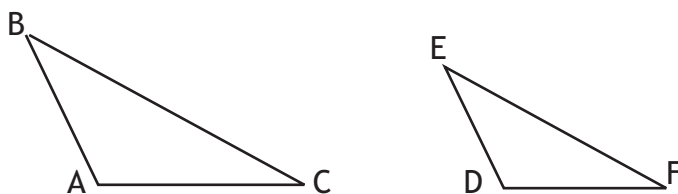


Figura 3.10

Ángulos:

Segmentos:

$$\angle A = \angle D$$

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$$

$$\angle B = \angle E$$

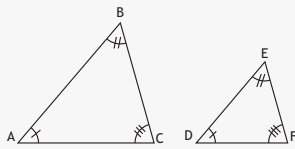
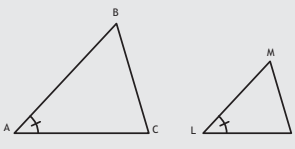
$$\angle C = \angle F$$

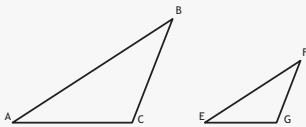
Si:

Luego entonces: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

Criterios de semejanza

Los criterios de congruencia de triángulos, nos permitieron establecerla a partir de tres elementos correspondientes iguales (en lugar de comprobar la igualdad de seis elementos), los siguientes criterios de semejanza nos permitirán establecerla de manera similar.

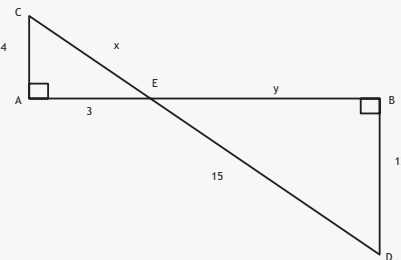
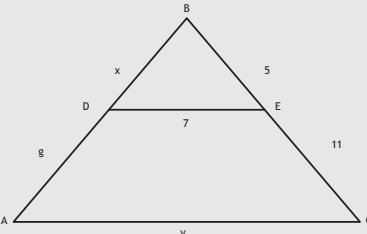
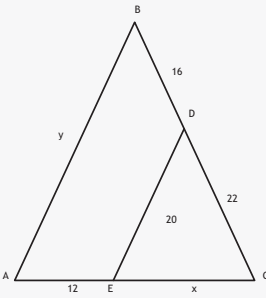
Criterio	Enunciado	Simbología	Figuras
1. ángulo – ángulo (AA):	Dos triángulos son semejantes si tienen dos de sus ángulos respectivamente congruentes (iguales).	Si, $\angle A \cong \angle D$ $\angle B \cong \angle E$ Entonces, $\triangle ABC \sim \triangle DEF$	 Figura 3.11
2. Lado – ángulo – lado (L.A.L.):	Dos triángulos son semejantes si tienen respectivamente congruentes (iguales) un ángulo y los lados que lo forman son proporcionales.	Entonces, $\triangle ABC \sim \triangle LMN$	 Figura 3.12

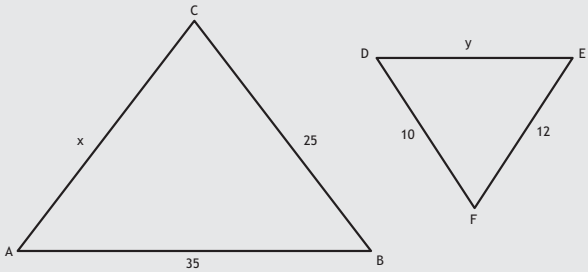
Criterio	Enunciado	Simbología	Figuras
3.Lado - lado - lado (L.L.L.):	Dos triángulos son semejantes si tienen sus tres lados respectivamente proporcionales.	Entonces, $\triangle ABC \sim \triangle EFG$	 Figura 3.13

Debes tener cuidado de no confundir el criterio L.A.L. con el de congruencia del mismo nombre, también el L.L.L. en este caso los lados son proporcionales.

Ejercicios de semejanza

Encuentra para cada pareja de triángulos semejantes, el valor de las incógnitas.

Figuras:	Incógnitas:
	$x =$ $y =$
	$x =$ $y =$
	$x =$ $y =$

Figuras:	Incógnitas:
	$x =$ $y =$

Ahora que has resuelto ejercicios matemáticos sobre semejanza de triángulos y conociendo ya sus criterios, ¿podríamos utilizarlo en problemas cotidianos?

¡Claro que sí! Podemos ver su aplicación en diversas áreas como construcción, diseño, astronomía, aeronáutica, fotografía, fotocopiado, etc. Vamos a ejemplificarlo para no perder de vista su utilidad.

Ejemplo 1

Supongamos que estamos en la parte baja de un acantilado y deseamos medir la distancia que hay de pared a pared del mismo en la parte más alta de cada lado. Supongamos, también, que no es posible medir la distancia requerida de la manera tradicional: ¿cómo resolver la situación? Ubicamos un punto accesible, digamos P, a la altura que consideremos. Visualizamos desde un punto M el punto de medición A de una de las paredes (donde apoyarías tu cinta métrica), de la misma manera desde otro punto N el correspondiente punto B en la otra pared. De tal forma que:

$AB \parallel MN$. Así tenemos, $\angle A \cong \angle P$ y $\angle B \cong \angle M$,

Luego por el criterio uno los triángulos APB y MNP son semejantes.

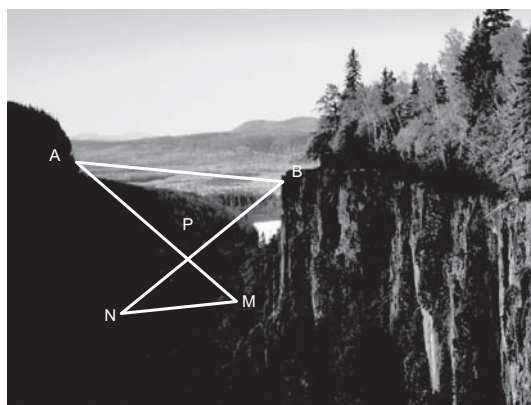


Figura 3.14

De esta forma, para tener la distancia AB, bastaría con medir las distancias MN y cualquiera de las dos BN o AM, para tener dos de los lados de cada uno de los triángulos y establecer la proporción adecuada.



Veamos la situación en un diagrama y supongamos algunas de las mediciones realizadas.

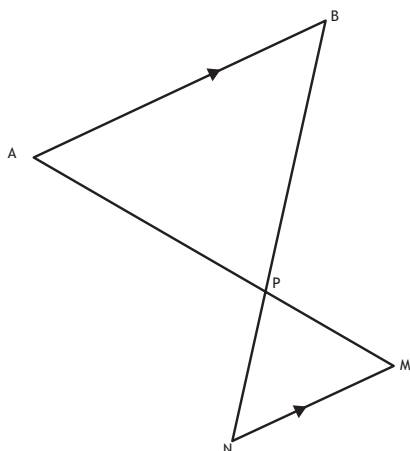


Figura 3.15

Se han realizado las siguientes mediciones:

$$MN = 15\text{m}$$

$$NB = 76\text{m}$$

$$NP = 9\text{m}$$

Así:

$$\frac{MN}{NP} = \frac{AB}{BP} \text{ luego; } \frac{15}{9} = \frac{AB}{67}, \text{ así: } AB = \frac{(15)(67)}{9} = 111.66 \text{ m}$$

Ahora vemos otro ejemplo más cotidiano y sencillo de otra aplicación de semejanza de triángulos.

Ejemplo 2

Un día soleado en una playa, en las vacaciones de verano, una joven de 1.6 m de estatura proyecta una sombra de 3 m. Calcula la altura de una palmera de coco que, al mismo tiempo, proyecta una sombra de 7 m.

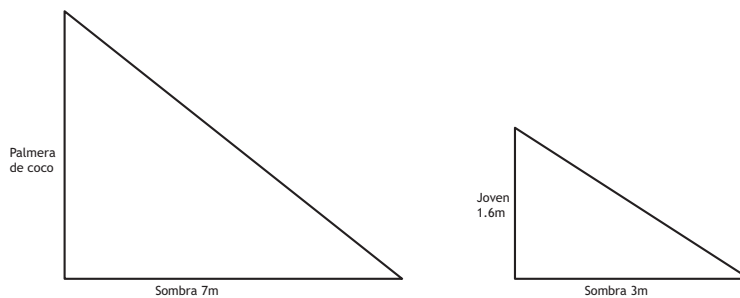


Figura 3.16

Solución:

$$\frac{x}{1.6} = \frac{7}{3}, 3x = (1.6)(7) \quad h = 3.73 \text{ m}$$

Actividad de aprendizaje 4

Resuelve los siguientes ejercicios en tu libreta sobre aplicaciones del concepto de semejanza.

1. Calcular la altura de una veleta que sirve de sistema de riego en una granja si al atardecer proyecta una sombra de 3.5 metros si al mismo tiempo un arbusto de naranja dulce de 2.2 metros proyecta una sombra de 0.90 metros.
2. En un cenote que tiene forma de circunferencia se ha fijado una cuerda de extremo a extremo pasando por su centro con las siguientes dimensiones expresadas en la figura. Hallar su abertura.
3. La ciudad de Itzamal es conocida como la ciudad de las tres culturas, por los cerros que tiene en sus alrededores. Uno de ellos, a cierta hora de la mañana, proyecta una sombra de 25 metros. Al mismo tiempo, una estatua muy cercana de 3 metros de altura proyecta una sombra de 5 metros. Calcula la altura del cerro.
4. Deduce la anchura del río, según las medidas de la figura:

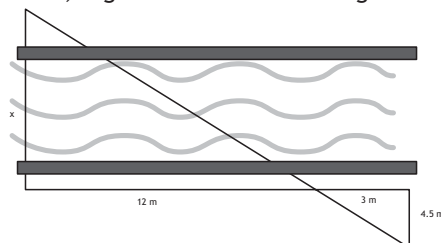


Figura 3.17

5. Dos cazadores se van de casería, con rifles de igual calibre, acechan a un venado que en ese momento está comiendo. Parados en pendientes que se encuentran a una distancia de 15 m uno del otro. El cerro en donde está el primer cazador mide 5 m de altura, el del segundo 3 m. Al mismo tiempo, ambos cazadores disparan sobre el venado hiriéndolo. ¿A qué distancia estaba el venado de los dos cazadores?

Sesión C: Teorema de Pitágoras



Desarrollo de saberes

Del saber:

- Enuncio y comprendo el teorema de Pitágoras.
- Describo las relaciones de proporcionalidad entre catetos e hipotenusa al trazar la altura sobre ésta.

Del saber hacer:

- Aplico el teorema de Pitágoras para la resolución de problemas.
- Utilizo la imaginación espacial para visualizar triángulos rectángulos o semejantes, en objetos y figuras en dos y tres dimensiones.
- Establezco relaciones de proporcionalidad entre catetos e hipotenusa al trazar la altura sobre ésta, en figuras u objetos.

Del saber ser:

- Valoro la importancia de la utilización de la semejanza de triángulos para resolver problemas de distinta índole.
- Aprecio la utilidad del teorema de Pitágoras.
- Trabajo respetando las instrucciones y turnos en el aula.





Dinamización y motivación

Ahora abordaremos uno de los teoremas más populares en todo el mundo en niveles escolares equivalentes como es la secundaria o el bachillerato en nuestro país. Dicho elemento se conoce como Teorema de Pitágoras y tiene una aplicación muy especial en la vida de las personas para la resolución de diversos problemas.

Las personas que requieren nivelar un objeto, encontrar la longitud de una ventana de una habitación, la distancia del asta bandera de la plaza cívica de una escuela, etc., pueden emplear métodos asociados al teorema de Pitágoras para lograrlo. Y es que tiene tantas aplicaciones y está presente en tantos momentos de la matemática, que es fundamental conocerlo, comprenderlo y aplicarlo en las situaciones que se le requiera.



Contextualización

Actividad de aprendizaje 5

En el poblado de Sotuta, tierra antigua de Nachi-Cocom, se encontró un mapa muy antiguo en donde se cuenta que existe un gran tesoro. Se puede ver el mapa, con el centro del poblado, en donde está ubicado un antiguo castillo y una estatua del famoso gran guerrero maya. Las instrucciones para ubicar el tesoro son las siguientes.

- a) 100 pasos al oeste.
- b) 40 pasos al norte.
- c) 20 pasos al oeste.
- d) 30 pasos al norte.
- e) 60 pasos al este.
- f) 70 pasos al norte.

Ahora, efectúa las siguientes indicaciones:

1. Construye un croquis, a escala, del mapa con los datos que se te proporcionaron utilizando un punto de referencia al que llamaremos centro.
2. Después de ubicar los puntos de referencias, traza un segmento para unir el centro de partida con el lugar donde te acabaste de ubicar al seguir las instrucciones del mapa.

Contesta luego las siguientes preguntas.

1. ¿A cuántos metros del punto de partida (castillo) en línea recta se encuentra el tesoro escondido?
2. ¿Qué pasos utilizaste para lograrlo?

Teorema de Pitágoras

Antes de iniciar con los elementos formales, recuerda dos elementos importantes del triángulo rectángulo:

1. El lado mayor es el opuesto al ángulo recto y le llamamos hipotenusa.
2. Los lados menores son perpendiculares y les llamamos catetos.

Tenlos siempre bien presentes, pues te pueden ayudar en cualquier momento.

Veamos los elementos teóricos referentes al teorema de Pitágoras y contrastémoslos con lo observado en las actividades anteriores.

El Teorema de Pitágoras establece lo siguiente:

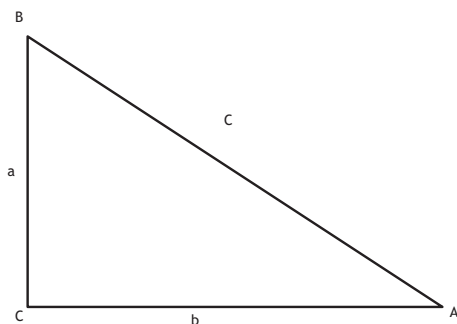


Figura 3.18

En un triángulo rectángulo, el cuadrado del mayor de los lados es igual a la suma de los cuadrados de los lados menores, es decir, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Si te resulta un poco difícil de entender, veamos ahora el siguiente ejercicio.

Dado el siguiente triángulo rectángulo, con las medidas correspondientes en sus catetos, encuentra el valor de la hipotenusa.

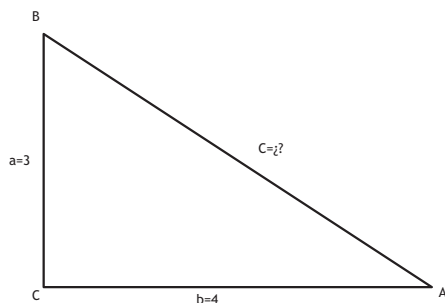


Figura 3.19

Utilizando la fórmula: $c^2 = a^2 + b^2$

Sustituyendo:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c = 9 + 16$$

$$c = 25$$

$$c = 5 \text{ cm}$$

Ahora bien, si lo que se desea encontrar es la longitud de alguno de los catetos del triángulo rectángulo la fórmula del teorema se despejaría y quedaría de la siguiente manera:

$$a^2 = c^2 - b^2 \text{ o bien } b^2 = c^2 - a^2$$



Actividad de aprendizaje 6

Encuentra el valor del cateto (a o b) o el de la hipotenusa (c) faltante en el siguiente bloque de ejercicios dados los datos que se te proporcionan y realiza su figura correspondiente.

Datos:	Figura:	Formula:	Operaciones y resultado.
$a = 6 \text{ u}$ $b = 8 \text{ u}$ $c = ?$			
$c = 20 \text{ u}$ $b = 12 \text{ u}$ $a = ?$			
$c = 15 \text{ u}$ $a = 7 \text{ u}$ $b = ?$			

$a = 100 \text{ u}$ $b = 120 \text{ u}$ $c = ?$			
---	--	--	--

Las aplicaciones más conocidas tienen que ver con el cálculo de distancias, en las que se involucra un triángulo rectángulo; de hecho, es el mayor cuidado que debemos tener, el teorema es de aplicación exclusiva en triángulos rectángulos. Veamos el empleo del mismo en diversas situaciones.

Ejemplo 1

Hallar la longitud de la diagonal de un rectángulo cuyas dimensiones son 3 y 7 metros respectivamente.

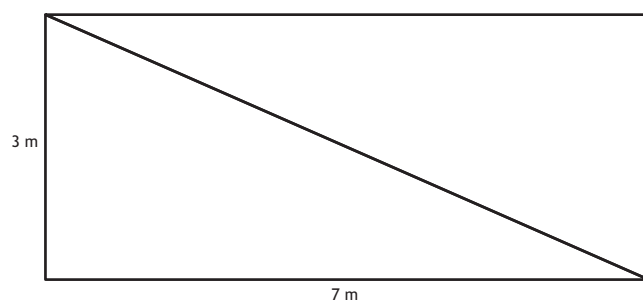


Figura 3.20

Solución: dado que el triángulo formado a partir de la diagonal es rectángulo, por el teorema de Pitágoras:

$$x^2 = 3^2 + 7^2$$

$$x^2 = 9 + 49$$

$$x^2 = 58$$

$$x = \sqrt{58} \text{ m}$$

$$x = 7.61 \text{ m}$$

Observa que el resultado que toma la raíz cuadrada es un número irracional y, por consiguiente, se puede realizar un corte después de algunas cifras decimales. Generalmente, se toman dos decimales o bien dejar el resultado expresado en raíz. Es bueno que tengas la habilidad de manejar ambas situaciones y aplicarlas según corresponda, lo importante es que para ti sea lo mismo.



Ejemplo 2

La diagonal de un cuadrado tiene una longitud de 2 metros. ¿Cuál es la longitud de cada lado?

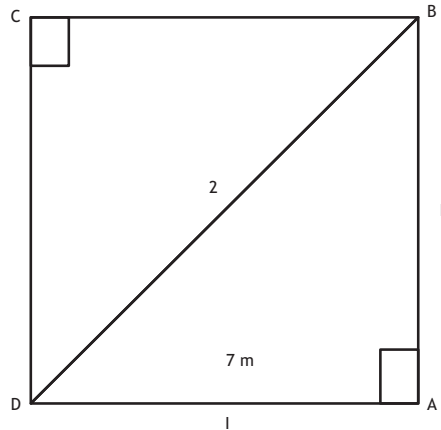


Figura 3.21

Solución: nuevamente al tener un triángulo rectángulo y siendo la longitud del lado, tenemos que:

$$l^2 + l^2 = 2^2, \text{ debido a que los lados son iguales}$$

$$2l^2 = 4$$

$$l^2 = 2, \text{ de donde, } l = \sqrt{2}$$

Ejemplo 3

Juan necesita subirse a la azotea de su casa, la cual tiene 7 m de alto. Para ello, debe valerse de una escalera cuya base o pie de escalera debe estar a 2 m de distancia de la pared por motivos de seguridad. ¿Qué longitud debe tener la escalera para que Juan pueda alcanzar la azotea?

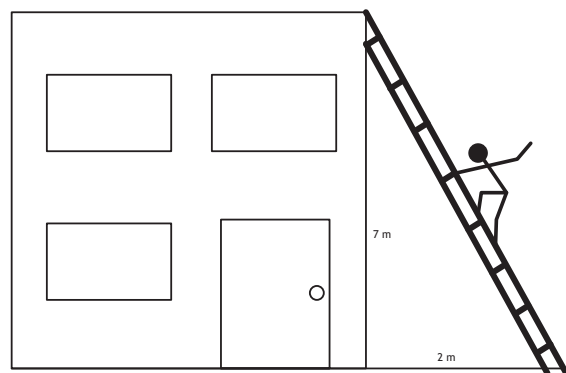


Figura 3.22

Solución:

Si consideramos un triángulo rectángulo el formado por el piso, la pared y la escalera, empleando el teorema:

$$x^2 = 7^2 + 2^2$$

$$x^2 = 49 + 4$$

$$x^2 = 53$$

$$x = \sqrt{53}$$

$$x = 7.28 \text{ m.}$$

Existen muchas más situaciones en las que podemos aplicar el teorema, pero las iré incorporando en la medida de que tengamos más herramientas para incorporar al teorema.

En el siguiente ejemplo, emplearemos el teorema para determinar el área de un rectángulo.

Ejemplo 4

El pórtico de mi escuela, de forma rectangular, mide 5.5 metros de longitud en su diagonal, tiene 2.8 metros de altura. Calcular el área del pórtico.

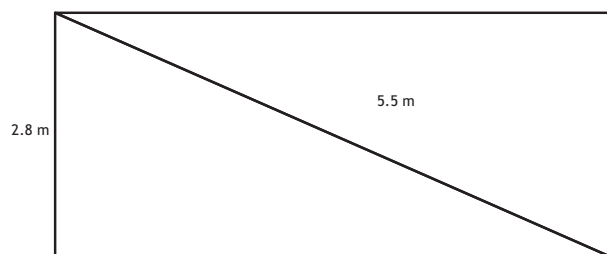


Figura 3.23

Solución:

Como se dan cuanta se forma un triángulo rectángulo, en el cual se encontrará la longitud de un cateto por lo que: $a^2 = c^2 - b^2$

Sustituyendo:

$$a^2 = (5.5)^2 - (2.8)^2$$

$$a^2 = 30.25 - 7.84$$

$$a = \sqrt{22.41}$$

$$a = 4.73 \text{ m.}$$

Ahora, utilizamos la fórmula del área de un rectángulo. Recuerda que el modelo básico es: $A = b \cdot h$

$$A = (2.8\text{m}) (4.73\text{m}) = 13.24 \text{ m}^2$$

Proporcionalidad en un triángulo rectángulo

Un último elemento que analizaremos en el contexto de los triángulos rectángulos, es el hecho que ocurre al trazar la altura del triángulo que corresponde a la hipotenusa. Veamos la siguiente figura.



En el triángulo ABC, trazamos la altura AD con respecto a la hipotenusa BC, de tal forma que $AD \perp BC$:

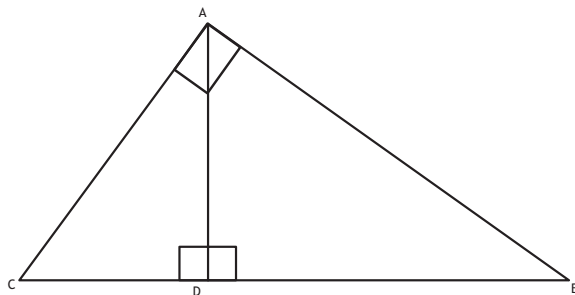


Figura 3.24

De lo anterior, tenemos que los triángulos ACD y ABD son rectángulos.

Además los triángulos ABD y ABC comparten al ángulo ABD; de la misma forma los triángulos ABC y ACD comparten al ángulo ACD. De lo anterior, tenemos lo siguiente:}

Afirmaciones	Justificaciones
$\angle ABD + \angle BAD = 90^\circ$	Por ser complementarios.
$\angle ABD + \angle ACB = 90^\circ$	
$\angle BAD = \angle ACB$	
$\triangle ABD$ y $\triangle ABC$ son semejantes	Criterio AA

Tabla 3.3

Al hacer el mismo razonamiento con los triángulos ABC y ACD, tenemos que ambos son semejantes, por el criterio AA. Así, dado que los tres triángulos ABC, ABD y ACD tienen igualdad de ángulos, podemos afirmar que los tres son semejantes, lo cual permite establecer la proporcionalidad de sus lados.

Por ejemplo, en los triángulos ABC y ABD tendremos:

$$\frac{AD}{AC} = \frac{BC}{AB} = \frac{AB}{BC}$$

Veamos algunas aplicaciones de lo anterior.

Ejemplo 1

Por la propiedad anterior podemos establecer:

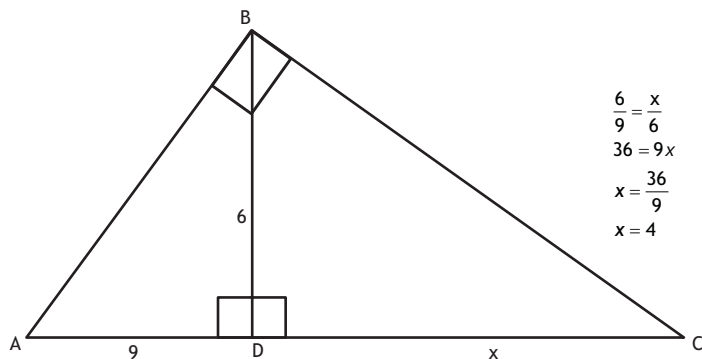


Figura 3.25

Ejemplo 2

Determina el valor de las variables en la figura:

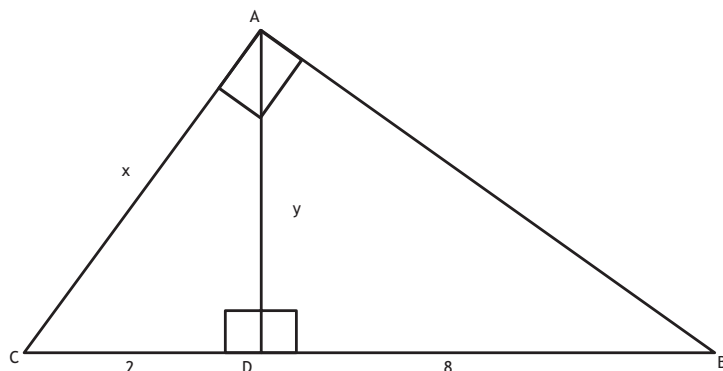


Figura 3.26

Solución. En los triángulos ADC y ABD tenemos:

$$\frac{y}{2} = \frac{8}{y}$$

$$y^2 = 16$$

$$y = 4$$

Luego por el Teorema de Pitágoras

$$x^2 = 4^2 + 2^2$$

$$x^2 = 20$$

$$x = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

Podemos ver cómo se combinan las herramientas en el ejemplo anterior, para ayudarnos en la solución de problemas.

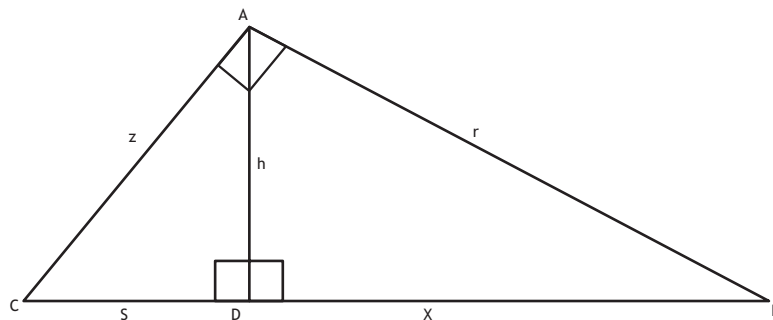
Actividad de aprendizaje 7

Te dejo algunas situaciones para que resuelvas, empleando el teorema de Pitágoras y la proporcionalidad en el triángulo rectángulo.

1. Un lote baldío rectangular de 70 por 40 m se encuentra ubicado en una esquina. Una persona camina a lo largo de la diagonal del lote evitando llegar a la esquina para no darle toda la vuelta y pasa diariamente 4 veces por este camino. ¿Qué distancia ahorra en su caminata al día?
2. Se tiene un triángulo rectángulo isósceles cuya hipotenusa es igual a 4. ¿Cuál es el valor del área del triángulo?
3. En época decembrina, es común que en los poblados se adorne la plaza principal. Se desea construir un árbol gigante navideño, el cual es formado por adornos desde la punta en lo alto con adornos llamados cola de gato. Si se sabe que la longitud de este adorno que va desde la parte superior hasta el suelo es de 12 metros y la distancia del punto ubicado en el suelo hasta el inicio del poste que lo forma es de 7 metros. Hallar la altura de dicho árbol navideño.



4. En las fiestas tradicionales de los pueblos es común un baile regional para la salida de los gremios (ofrenda para algún santo) llamada la cabeza de cochino. Para esta baile, un joven de 1.60 metros sostiene una ofrenda a una altura de 1.20 metros. En la punta de la ofrenda se tensa una cinta de 4 metros de longitud tirada por otra joven de igual 1.60 metros de altura. En algún momento del baile se forma un triángulo rectángulo con la cinta y la ofrenda. ¿A qué distancia se encuentran los jóvenes?
5. En una iglesia se pondrá un vitral que tiene forma de triángulo equilátero el cual mide 6 metros por lado. Si el costo por metro cuadrado es de \$ 8000.00 ¿Cuánto costará el vitral?
6. En los poblados alejados a la capital de Mérida es muy difícil que llegue con claridad la señal de televisión abierta. Por esta razón, se coloca sobre un árbol una antena ya instalada sobre un mástil de 5 metros de longitud ya adherida al árbol. Si se tensa con alambre de 20 metros de longitud desde la punta de la antena al suelo y del punto tensado al talo del árbol existe una distancia de 5 metros. ¿Cuál será la altura del árbol?
7. En la figura CD es la altura que corresponde a la hipotenusa del triángulo ABC.



Determina en cada inciso lo que se te pide.

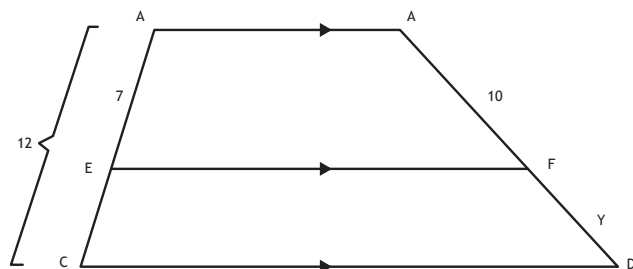
- a) $s = 2$, $x = 5$, encuentra h y z .
- b) $s = 3$, $r = 8$, encuentra z y x .
- c) $s = 9$, $x = 11$, encuentra r y h .



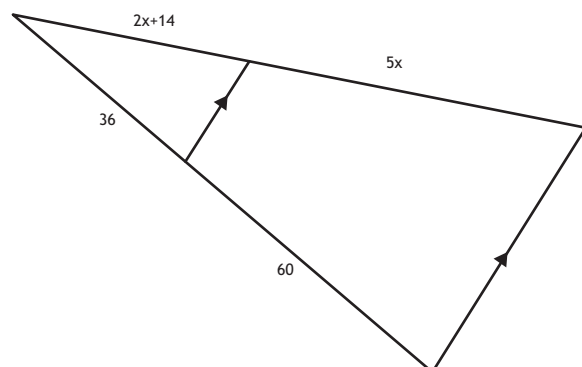
Realimentación

Resuelve cada uno de los siguientes ejercicios planteados utilizando el proceso adecuado para llegar a la respuesta correcta.

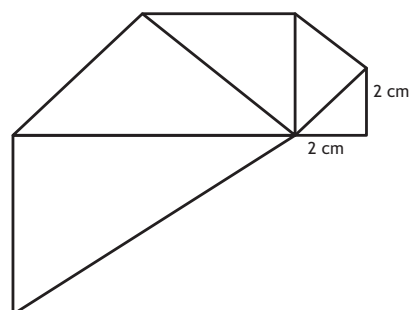
1. En la siguiente figura geométrica encuentra el valor de la incógnita y . Recordando que el teorema de Tales se verifica para cualquier número de paralelas y para cualquier posición de las transversales.



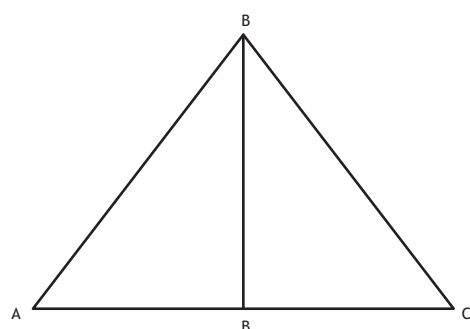
2. En la siguiente figura geométrica encuentra el valor de los incógnita x y calcula el valor de los segmentos del triángulo.



3. En la siguiente figura geométrica encuentra el valor de los lados de los siguientes triángulos rectángulos isósceles, sabiendo que el primero mide 2 cm en sus catetos.



4. En la siguiente figura. Sea: $\overline{BD}$ la altura del $\triangle ABC$, $\overline{AD} = 8 = 8$ y $\overline{BD} = 16 = 16$. Calcula $\overline{AB}$, $\overline{DC}$ y $\overline{BC}$.



5. Un rancho muy famoso por el oriente del estado de Yucatán es el llamado “San Calixto”, el cual, en una sección del mismo, se ha desmontado para formar un gran potrero. Se sabe que el terreno en mención tiene forma de cuadrado y se le conoce la longitud de su diagonal la cual tiene una dimensión de 1, 500 metros. Cuantos metros de alambre se necesitarán comprar para cercar dicho terreno.

Resuelve cada uno de los siguientes ejercicios propuestos señalando la respuesta correcta. Te recomiendo que leas todas la posibles opciones antes de escoger la que sea correcta.



MATEMÁTICAS II

1. Tomé una fotografía de 4×6 cm y la deseo ampliar para ponerla en una manta espectacular, si el lado de 6 cm midió al ampliarlo 1.32 metros. ¿Qué longitud deberá tener el lado de 4 cm?



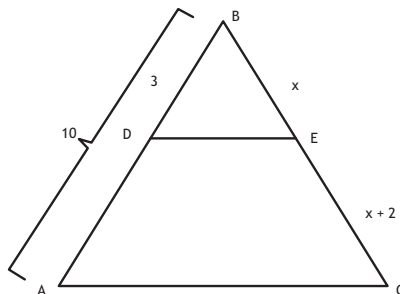
58 cm	98 cm	68 cm	88 cm
-------	-------	-------	-------

Si los dientes de dos engranes de un reloj se encuentran a una razón de $1/3$ de menor a mayor. Si el menor tiene 48 dientes ¿Cuántos dientes tendrá el mayor?



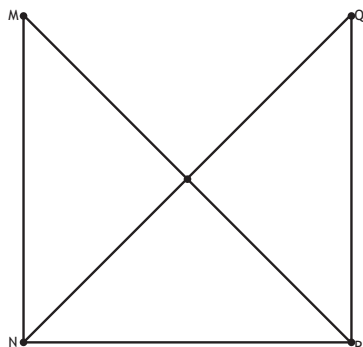
134	148	144	158
-----	-----	-----	-----

Dada la siguiente figura que forma triángulos semejantes ¿Cuál es el valor de la incógnita x ?



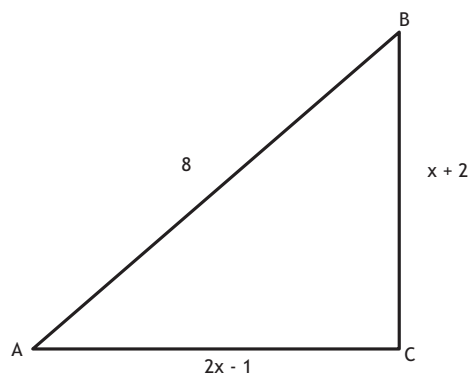
1	2	4	6
---	---	---	---

A continuación se te presenta un cuadrado el cual le falta un lado. Se sabe además que $\overline{MP}$ y $\overline{NQ}$ son las diagonales de dicho cuadrado y miden $\sqrt{2}$. ¿Cuál es el valor de los lados y ángulos de los triángulos congruentes?



Lado = 2 y ángulos = 45°	Lado = 1 y ángulos = 45°	Lado = 1 y ángulos = 60°	Lado = $\sqrt{2}$ y ángulos = 90°
---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	--

En el siguiente triángulo rectángulo ¿Cuál es el valor de la incógnita x ?



a) 3.6	b) 3.9	c) 3.2	d) 3.4
--------	--------	--------	--------

A continuación se te presenta una actividad que tiene como su principal objetivo integrar los conocimientos, que has adquirido sobre la demostración del Teorema de Pitágoras. Se te sugiere trabajarlo en equipo poniendo toda tu disposición para hacerlo lo mejor posible.

“Demostración del teorema de Pitágoras por medio de figuras geométricas”

Esta actividad abordaremos el teorema desde otro punto de vista y que te puede resultar divertido, en equipos de tres personas consigan el material que a continuación se te pide.

- a) Papel cartoncillo, cartulina o cascarón.
- b) Tijeras.
- c) Colores.
- d) Juego de geometría.



Construye un triángulo rectángulo en el cartoncillo con las siguientes dimensiones: 16 y 12 cm. En los catetos y 20 cm en la hipotenusa.

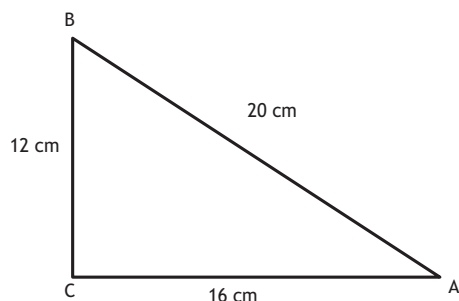


Figura 3.27

Luego trázales en forma de cuadrado siempre en el cartoncillo, el valor de sus catetos y el de la hipotenusa hasta forma la siguiente figura. Luego el cuadrado formado con el valor de la hipotenusa la traspasamos al otro lado de tal manera que generan cortes en los otros cuadrados (catetos). Estos cortes son aproximados. Pero se dan cuenta de que forman 5 nuevas fichitas las cuales deberás enumerarlas. Ahora, el reto es que los cinco pedazos que han formado los cuadrados de los catetos deberán formar el área total del cuadrado de la hipotenusa. ¿Será que puedas lograrlo?

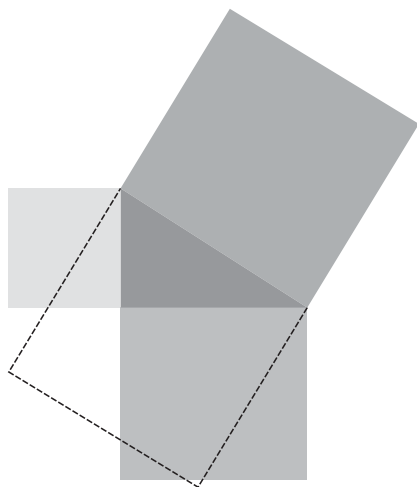


Figura 3.28



Evaluación de la competencia

Proyecto:

Como hemos hecho antes, te propongo una actividad que pretende integrar los elementos que desarrollaste durante el presente bloque. Será una actividad bastante “Triangular” que espero disfrutes y compartas con las personas que te rodean.

Se trata de hacer en equipo un ajedrez tablero y piezas, pero con ciertas particularidades en la elaboración. Primero la única medida conocida para el tablero es su diagonal, la cual será de $60\sqrt{2}cm$. A partir de esta medida tendremos que ir pintando las 64 casillas con las que cuenta el tablero de ajedrez, ya sabes de dos colores diferentes. Lo interesante de nuestro tablero es que incluirás medidas por todos lados, es decir, la medida de lados, diagonales y de ser posible de los ángulos que puedas identificar en el tablero.

Las piezas serán todas triángulos. Los peones triángulos rectángulos cuyos lados midan 3, 4 y 5 centímetros respectivamente. A partir de ellos haremos las torres, caballos, alfiles, la reina y el rey. Para torres y caballos la proporción con respecto a los peones será de 1: 1.2; para alfiles será de 1: 1.5 y para la reina y el rey de 1:2. De esta forma tendrás la medida de cada pieza, las cuales deben ser, ya sabes, de dos colores distintos. Tu creatividad decidirá cómo es que las mantienes en pie dentro del tablero y cómo las identificarás de las demás.

Al final tendremos una tabla en la que recordaremos la aplicación de diversos métodos para encontrar distancias a partir de algunos elementos de triángulos semejantes y rectángulos.

El material a emplear, puede ser el que tu elijas y desde luego puedas contar con el fácilmente.

Como siempre. ¡Manos a la obra!

Con base en esta actividad realiza:

1. Una partida de ajedrez empleando la tabla que elaboraron, pide a tu docente que los ayude a organizarse.
2. Una vez concluido el juego organicen un debate destacando la importancia de utilizar triángulos semejantes y rectángulos en situaciones reales.
3. Redacta una síntesis de esta actividad.



Rúbrica para el proyecto

Nivel de desempeño			
	3	2	1
Habilidades de aplicación de conocimientos	Utiliza las relaciones de proporcionalidad y el teorema de Pitágoras en la elaboración de ajedrez, respetando las características del proyecto.	Utiliza las relaciones de proporcionalidad y el teorema de Pitágoras en la elaboración del ajedrez, respetando algunas de las características del proyecto.	Utiliza de manera inadecuada las relaciones de proporcionalidad y el teorema de Pitágoras en la elaboración del ajedrez, por lo que su producto no respeta las características del proyecto.
Creatividad	Las afirmaciones que presenta en la elaboración del ajedrez y el producto en general contienen elementos innovadores que muestran claramente la creatividad empleada.	Las afirmaciones que presenta en la elaboración del ajedrez, contienen algunos elementos innovadores que muestran de alguna forma la creatividad empleada.	Las afirmaciones que presenta en la elaboración del ajedrez, no contienen elementos innovadores.
Actitudinal	Justifica los pasos que realiza tanto en la demostración como en la elaboración del rompecabezas, citando los criterios de congruencia y las propiedades de ángulos y triángulos.	Justifica con ciertas inconsistencias los pasos que realiza tanto en la demostración como en la elaboración del rompecabezas, citando los criterios de congruencia y las propiedades de ángulos y triángulos.	No justifica los pasos que realiza tanto en la demostración como en la elaboración del rompecabezas, citando los criterios de congruencia y las propiedades de ángulos y triángulos.
	Aprecia la utilidad de los criterios de congruencia de triángulos para modelar el producto solicitado, aportando puntos de vista personales y considerando los de otras personas.	Muestra poco aprecio por la utilidad de los criterios de congruencia de triángulos para modelar el producto solicitado al igual que muestra pocas aportaciones personales y muestra poca disposición ante los puntos de vista de otras personas.	No aprecia la utilidad de los criterios de congruencia de triángulos para modelar el producto solicitado, al igual que aporta muy poco en lo personal y no considera los puntos de vista de otras personas.

Rúbrica para la evaluación del bloque

Competencia	Nivel de logro o desempeño				
	5	4	3	2	1
Del Saber	Resuelvo completamente problemas utilizando los diversos criterios de proporcionalidad, de semejanza de triángulos, los teoremas de Tales y de Pitágoras empleando modelos adecuados aritméticos y algebraicos además describo correctamente las relaciones de proporcionalidad en un triángulo rectángulo, que se presentan al trazar la altura con respecto a la hipotenusa.	Resuelvo completamente problemas utilizando los diversos criterios de proporcionalidad, de semejanza de triángulos, los teoremas de Tales y de Pitágoras empleando de forma inadecuada los modelos aritméticos y algebraicos, además describo las relaciones de proporcionalidad en un triángulo rectángulo, que se presentan al trazar la altura con respecto a la hipotenusa.	Resuelvo la mayoría de los problemas utilizando los diversos criterios de proporcionalidad, de semejanza de triángulos, los teoremas de Tales y de Pitágoras empleando de forma inadecuada los modelos aritméticos y algebraicos, además describo algunas las relaciones de proporcionalidad en un triángulo rectángulo, que se presentan al trazar la altura con respecto a la hipotenusa.	Resuelvo algunos problemas defectuosamente utilizando algunos de los criterios de proporcionalidad, de semejanza de triángulos, los teoremas de Tales y de Pitágoras empleando de forma inadecuada los modelos aritméticos y algebraicos, además describo algunas las relaciones de proporcionalidad en un triángulo rectángulo, que se presentan al trazar la altura con respecto a la hipotenusa.	Resuelvo problemas defectuosamente utilizando algunos de los criterios de proporcionalidad, de semejanza de triángulos, los teoremas de Tales y de Pitágoras empleando de forma inadecuada los modelos aritméticos y algebraicos, además no describo las relaciones de proporcionalidad en un triángulo rectángulo, que se presentan al trazar la altura con respecto a la hipotenusa.
Del saber hacer	Elijo y justifico completamente y los criterios apropiados de semejanza de triángulos, el teorema de Tales y de Pitágoras, y lo aplico en todas las situaciones teóricas y prácticas.	Elijo y justifico completamente y los criterios apropiados de semejanza de triángulos, el teorema de Tales y de Pitágoras, y lo aplico en casi todas las situaciones teóricas y prácticas.	Presento algunas deficiencias al elegir y justificar los criterios de semejanza de triángulos, el teorema de Tales y de Pitágoras, y lo aplico en casi todas las situaciones teóricas y prácticas.	Presento algunas deficiencias al utilizar y justificar los criterios de semejanza de triángulos, el teorema de Tales y de Pitágoras, y lo aplico en pocas situaciones teóricas y prácticas.	Presento serias deficiencias al utilizar los criterios de semejanza de triángulos, el teorema de Tales y de Pitágoras, y lo aplico en escasas situaciones teóricas y prácticas.
Del saber ser	Valoro completamente la importancia de los criterios de proporcionalidad, de semejanza de triángulos, los teoremas de Tales y de Pitágoras en la resolución de problemas prácticos y teóricos, manteniendo una actitud completamente colaborativa y respetuosa en el aula.	Valoro completamente la importancia de los criterios de proporcionalidad, de semejanza de triángulos, los teoremas de Tales y de Pitágoras en la resolución de problemas prácticos y teóricos, manteniendo una actitud poco colaborativa y respetuosa en el aula.	Muestro poco aprecio por los criterios de proporcionalidad, de semejanza de triángulos, los teoremas de Tales y de Pitágoras en la resolución de problemas prácticos y teóricos, manteniendo una actitud poco colaborativa y respetuosa en el aula.	Muestro poco aprecio por los criterios de proporcionalidad, de semejanza de triángulos, los teoremas de Tales y de Pitágoras en la resolución de problemas prácticos y teóricos, manteniendo una actitud nulamente colaborativa y respetuosa en el aula.	No aprecio los criterios de proporcionalidad, de semejanza de triángulos, los teoremas de Tales y de Pitágoras en la resolución de problemas prácticos y teóricos, manteniendo una actitud nulamente colaborativa y respetuosa en el aula.



Bloque IV. Reconoce las propiedades de los polígonos

Atributos de las competencias genéricas:

- 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
- 5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
- 5.4 Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez.
- 5.6 Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para procesar e interpretar información.
- 6.1 Elige las fuentes de información más relevantes para un propósito específico y discrimina entre ellas de acuerdo a su relevancia y confiabilidad.
- 7.1 Define metas y da seguimiento a sus procesos de construcción de conocimientos.
- 8.1 Propone manera de solucionar un problema y desarrolla un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.
- 8.2 Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.
- 8.3 Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.

Competencias disciplinares básicas

- 1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
- 2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
- 3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
- 4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
- 5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
- 6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
- 7. Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia.
- 8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.



Dinamización y motivación

En éste bloque estudiaremos un concepto muy importante en las matemáticas, que por su naturaleza y sus propiedades es uno de los más importantes y más utilizado. Lo podemos observar con facilidad en todo nuestro entorno. El concepto del cual estamos hablando es el de polígono, mencionaremos que se trata de una figura geométrica muy usada, ya que con solo con mirar a nuestro alrededor, es fácil encontrar al menos un polígono en alguna parte, por ejemplo, dicho concepto o figura es utilizado en la industria de la construcción, ya que en ella podemos observar los triángulos en algunos techos, los cuadrados en las ventanas, los rectángulos en las paredes, los hexágonos en algunas mesas, etc. El hecho de utilizarlo, nos muestra que se aprovecha cada una de sus propiedades, las cuales estudiaremos en éste bloque. No solo en nuestro entorno se puede encontrar a los polígonos sino también en la naturaleza, por ejemplo, alguna vez haz observado un panal de abejas, la forma que tienen los orificios en el panal, son hexágonos, éste polígono le permite a las abejas almacenar la mayor cantidad posible de miel en cada uno. Otro ejemplo muy común lo podemos observar en el deporte y es en el diseño de un balón de futbol soccer, cuya estructura está formada por varios pentágonos, los cuales por sus propiedades de regularidad y ángulos, al unirlos todos, ayudan a que el balón tenga una forma esférica casi perfecta, de hecho los polígonos son utilizados hasta en el arte, como es en la creación de dibujos ya que ellos son la base para la creación de ciertos cuerpos de personajes en caricaturas y películas diseñadas con algún software. Así mismo son utilizados en la arquitectura para resaltar las estructuras de ciertas construcciones, para el diseño de ciertas estructuras y edificios famosos. En nuestro estado podemos observar esos edificios como lo son la catedral de Mérida, el Olimpo, el Museo Macay, el CRIT, etc.

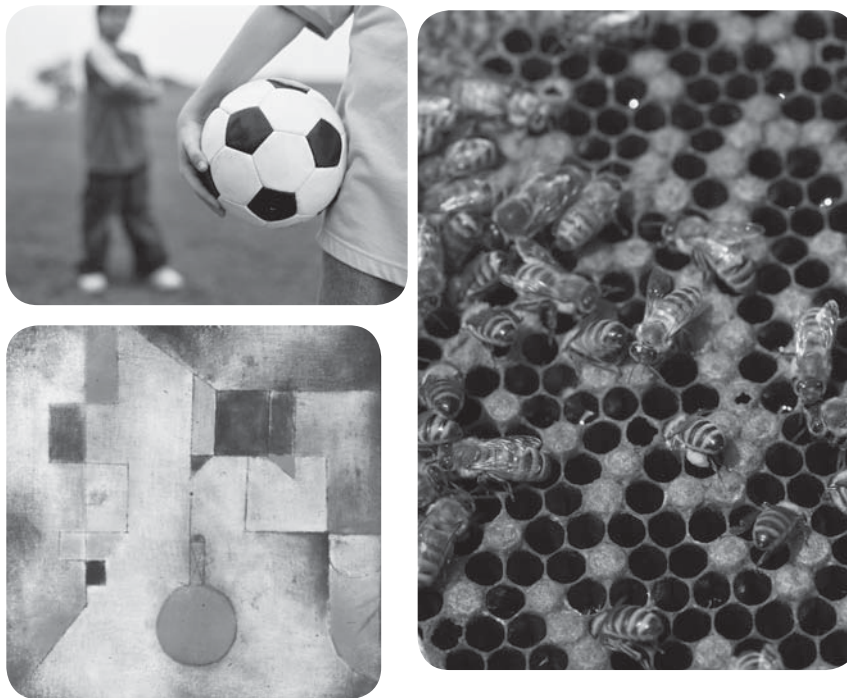


Figura 4.1 Figuras geométricas de nuestro entorno.

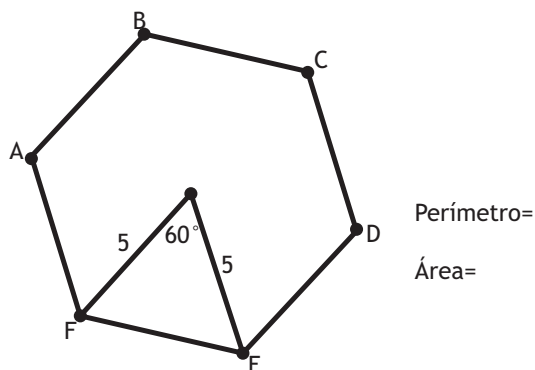
Así como hemos mencionado algunos ejemplos de la utilización de los polígonos como herramienta para darle solución a problemas de nuestra vida cotidiana, existen aun más ejemplos. Sería interesante que investigues algunos de ellos y los que más te gusten comentarlo con tus compañeros y tu profesor, ya verás que en tu búsqueda, te sorprenderás.

Al igual que en los bloques anteriores antes de realizar el desarrollo de criterios para éste bloque, se te presenta una serie de ejercicios que te servirán para determinar el nivel con el que estás empezando el bloque, recuerda que es muy importante que resuelvas dichos ejercicios y te autoevalúes para determinar tu nivel, ya que el objetivo es superar dicho nivel al terminar el bloque

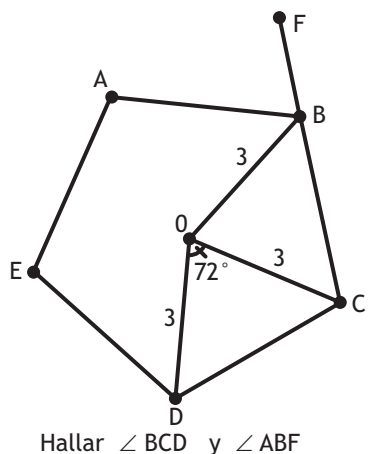


Evaluación diagnóstica

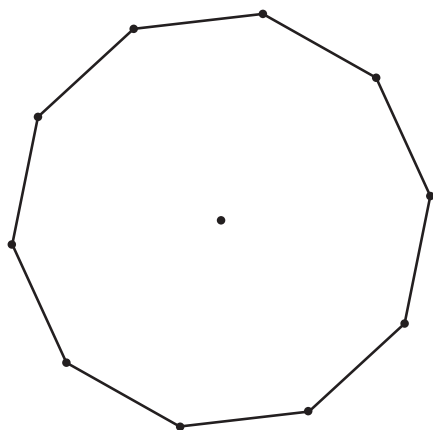
1. Hallar el perímetro y el área del siguiente polígono.



2. Dadas las siguientes figuras, encuentra el valor de los ángulos que se desconocen.



3. Dada la siguiente figura, traza todas las diagonales que en ella se puedan y determina cuántas diagonales se pudieron trazar.



Con las respuestas y las respectivas justificaciones que proporcione tu profesor, ubica en qué nivel de comprensión te encuentras de acuerdo a la tabla siguiente, con el objeto de reflexionar y, por supuesto, mejorar.

Importante: Tu profesor solo va a examinar tus soluciones y va a dar, de forma rápida el porqué de las justificaciones. No se darán más detalles de las respuestas y argumentos, pues algunos de ellos se analizarán en éste bloque y además nos servirán al final del mismo.

Reflexión de inicio de bloque		
Calificación: 1 punto por respuesta correcta y 1 punto por argumentación correcta	Coloca una X en el puntaje que alcanzaste	Significado de cada nivel alcanzado
Nivel estratégico	9 a 10	Comprendes y aplicas correctamente los elementos y propiedades de los polígonos.
Nivel autónomo	7 a 8	Recuerdas los elementos y propiedades de los polígonos.
Nivel básico	5 a 6	Recuerdas algunas nociones sobre los elementos y propiedades de los polígonos.
Nivel inicial	2 a 4	Haz comenzado con algunas nociones sobre los elementos y propiedades de los polígonos.
Nivel pre-formal	0 a 1	No tienes nociones sobre los elementos y propiedades de los polígonos.

Recuerda el nivel en que te encuentras en éste momento ya que al final del bloque retomaremos el aspecto importante de tus avances.

Ahora que ya te autoevaluaste, ya estamos listos para realizar el desarrollo de los criterios para éste bloque.

Sesión A: Clasificación de los polígonos



Desarrollo de saberes

Del Saber

- Clasifico los polígonos en Regulares e Irregulares considerando la medida de sus lados.
- Clasifico los polígonos en Cóncavos y convexos considerando la medida de sus ángulos

Del Saber hacer

- Distingo a los diferentes tipos de polígonos aplicando sus propiedades y relaciones para solucionar problemas.

Del Saber ser

- Valoro la importancia de reconocer los distintos tipos de polígonos.
- Actúo de manera propositiva al resolver los ejercicios planteados respetando en todo momento la opinión de mis compañeros.



Contextualización

Como mencionamos al principio de éste bloque, estudiaremos un concepto cuya aplicación es de mucha utilidad y lo podemos visualizar en el medio en el cual nos desenvolvemos, mencionamos algunos ejemplos como lo son el panal de abejas, el balón de futbol soccer, en la industria de la construcción, etc.

De hecho, algunos de los problemas que se presentan en empresas, ejemplo las de reparto, se modelan (se representan) tomando los puntos de entrega como vértices y las posibles rutas a seguir, como lados o diagonales de un polígono. De ésta forma se cuenta con herramientas que permiten resolver en la mesa, situaciones que pueden ahorrar tiempo, dinero y desde luego esfuerzo.

Otro ejemplo muy común consiste en la optimización de recursos. Imagina que quieres construir una lata de aluminio, para envasar refresco de cola. Sabes que la cantidad de refresco por lata será de medio litro y requieres minimizar la cantidad de aluminio a emplear por diversas causas (costo, ecología, peso, etc.). ¿Qué dimensiones debe tener la lata? Aunque está implícito, para resolver la situación se requiere del conocimiento de propiedades de los polígonos, en este caso, del área de un rectángulo y del cilindro.

Son diversas las aplicaciones de los polígonos en nuestro entorno, así es que comencemos con el análisis de los mismos.



Problematización

Actividad de aprendizaje 1

Si a un triángulo le añadimos un vértice y por ende un lado más. ¿Qué forma tomará? Imagina que los compañeros de tu clase son vértices y distribuyes una cuerda entre ellos, de tal forma que cada uno la tome con una mano, ¿Cuántos lados tendría tu polígono? ¿Cómo le llamarías por el número de lados? ¿Qué forma tiene, son iguales los lados?



Realiza la dinámica con tu clase, obviamente tendrán que hacerlo en un espacio adecuado. Solicíténla a su docente llevarla a cabo. Vayan agregando vértices al polígono y observen los cambios que ocurren en la forma, ángulos y lados.

Elaboren un cuadro comparativo en el que incluyan las características observadas y sus conclusiones. Compartan las ideas en el grupo y establezcan algunos consensos.



Definición de polígono

En primer término veamos una de las definiciones del término **polígono**. Etimológicamente, el término **polígono** proviene de dos elementos *poli* (que significa varios o muchos) y *gonia* (ángulo), lo que deriva en varios ángulos. Sin embargo la generalidad toma como definición la siguiente:

Polígono es la porción de un plano limitada por segmentos de recta. Los segmentos se llaman lados del polígono y sus intersecciones vértices del polígono.

Clasificación de los polígonos

Generalmente los polígonos se clasifican por la medida de sus ángulos y de sus lados. Veamos cada una de ellas.

Clasificación según sus ángulos: Por la medida de sus ángulos se dividen en **cóncavos** y **convexos**.

Polígono **cóncavo** es aquel que contiene uno o más ángulos internos cuya medida es mayor que 180° , es decir, contienen al menos un ángulo entrante.

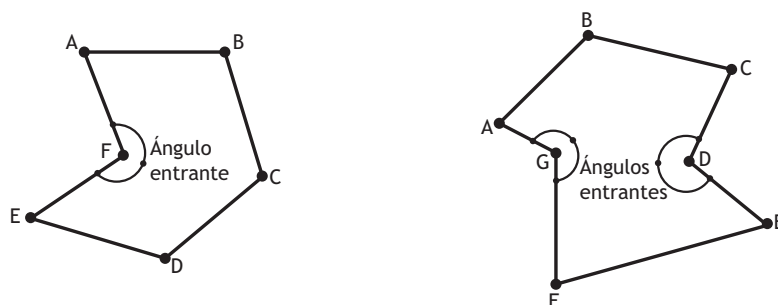


Figura 4.2 Ejemplos de polígonos cóncavos.

Polígono **convexo** es aquel que no contiene ángulos internos entrantes, es decir, cuando la medida de cada ángulo interno es menor que 180° .

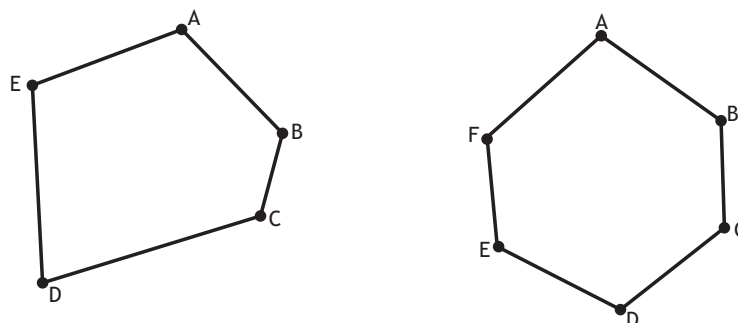


Figura 4.3 Ejemplos de polígonos convexos.

Clasificación según lados y ángulos iguales: Por sus lados y ángulos iguales se clasifican en **regulares e irregulares**.

Polígono **regular** es aquel equiangular y equilátero, es decir, cuando tienen lados iguales y ángulos internos iguales.

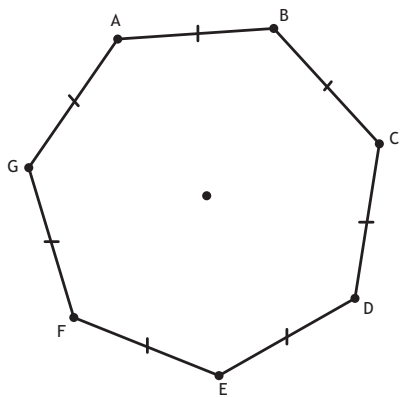


Figura 4.4 Polígono regular.

Polígono **irregular** es aquel que no es regular, o sea, que pueden tener lados desiguales o ángulos desiguales o ambos.

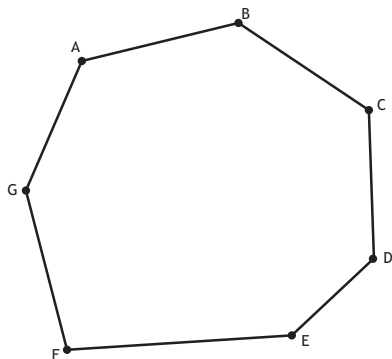
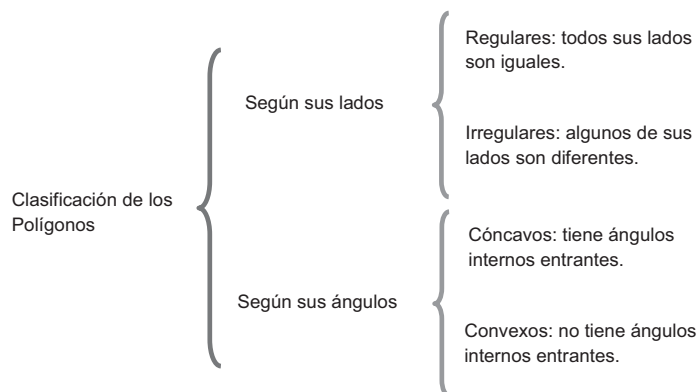


Figura 4.5 Polígono irregular.

El siguiente cuadro sinóptico nos resume a la clasificación de los polígonos tomando en cuenta sus lados y sus ángulos, y nos será de mucha ayuda para poder recordar la clasificación



Existe una clasificación por el número de lados que tiene un polígono o nomenclatura por el número de lados. Cabe mencionar que la siguiente clasificación te será de mucha utilidad para la aplicación de las propiedades de los polígonos, por lo tanto tómalala en cuenta en todo momento. Se presenta a continuación.

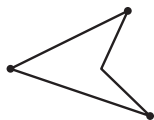


Nombre	Numero de lados
Triángulo	3
Cuadrilátero	4
Pentágono	5
Hexágono	6
Heptágono	7
Octágono	8
Eneágono o nonágono	9
Decágono	10
Endecágono o undecágono	11
Dodecágono	12
Tri decágono	13
Tetra decágono	14
Pentadecágono	15
Hexadecágono	16
Heptadecágono	17
Octodécágono	18
Enea decágono	19
Icoságono	20
Triacontágono	30
Tetracontágono	40
Pentacontágono	50
Hexacontágono	60
Heptacontágono	70
Octacontágono	80
Eneacontágono	90
Heptacontágono	100

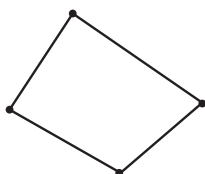
Ya que sabemos la definición de polígono así como su clasificación lo que haremos será aplicarlo en la siguiente actividad la cual te ayudará a reforzar dichos conceptos

Actividad de aprendizaje 2

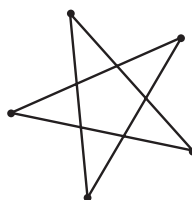
En cada uno de los siguientes polígonos, escribe sobre primera línea el nombre del polígono según el número de sus lados y en la segunda línea el nombre según el tipo de ángulo interno.



Lados= _____
Ángulos= _____



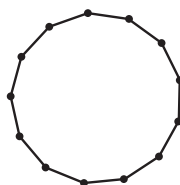
Lados= _____
Ángulos= _____



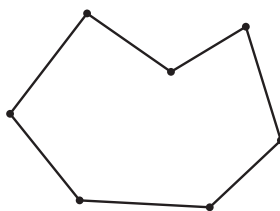
Lados= _____
Ángulos= _____



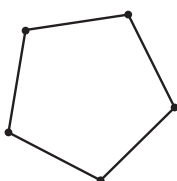
Lados= _____
Ángulos= _____



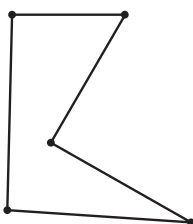
Lados= _____
Ángulos= _____



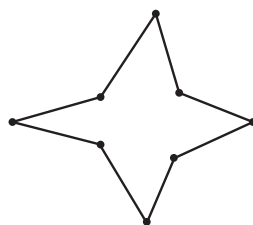
Lados= _____
Ángulos= _____



Lados= _____
Ángulos= _____



Lados= _____
Ángulos= _____



Lados= _____
Ángulos= _____

Sesión B: Reconoce las propiedades y elementos de los polígonos



Desarrollo de saberes

Del Saber:

- Reconozco los elementos de un polígono como son el radio, la apotema, diagonales, vértices y ángulos.

Del Saber hacer:

- Utilizo las propiedades y relaciones de los polígonos para calcular la cantidad de segmentos relevantes en los mismos
- Aplico las propiedades y relaciones de los polígonos para la resolución de problemas

Del Saber ser:

- Valoro la importancia de reconocer los elementos de los polígonos
- Actuo de manera propositiva al resolver los ejercicios planteados



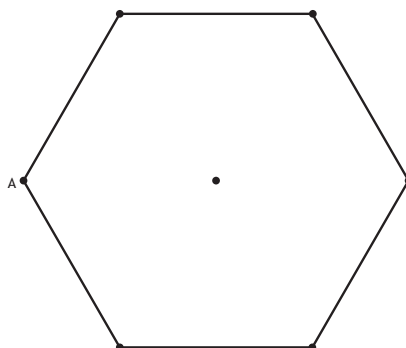


Problematización

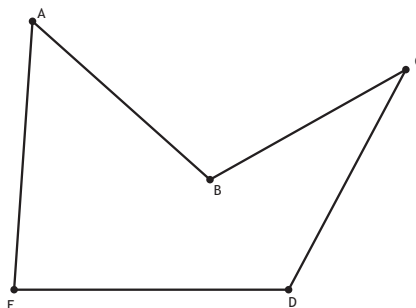
En la sesión anterior definimos a un polígono así como su clasificación, en ésta sesión lo que haremos será trabajar con ellos tomando en cuenta a sus **elementos** los cuales definiremos más adelante. Para iniciar con ésta sesión se te pide resolver la siguiente actividad, la cual nos servirá como base en nuestro desarrollo de criterios.

Actividad de aprendizaje 3

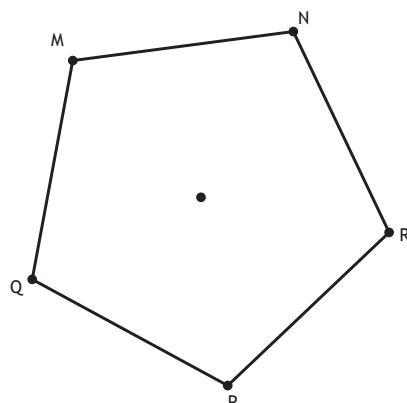
1. En la siguiente figura traza todas las diagonales y responde, en base a tus resultados, los cuestionamientos que se encuentran en la parte de abajo.



- a) ¿Cuántas diagonales en total trazaste en el siguiente polígono?
 - b) Tomando en cuenta el vértice A, ¿Cuántas diagonales trazaste desde ese vértice?
 - c) ¿Qué relación puedes inferir del total de diagonales que trazaste en el vértice A y el número de lados que tiene el polígono?
 - d) En base a la conjetura que obtuviste en la pregunta anterior, ¿Qué sucedería si le multiplicas el número de lados del polígono?
 - e) En base a todo lo anterior, ¿Puedes hacer una conjetura sobre el modo de obtener el número total de diagonales que tiene un polígono?
2. Para cada una de las siguientes figuras dadas, encuentra los elementos que se piden y anota sus nombres en las líneas correspondientes.
 - a) En el polígono ABCDE, sus ángulos interiores son _____ y la suma de los ángulos interiores es _____.



- b) En el polígono MNRPQ, cuántos ángulos pueden trazarse desde el centro a cada uno de los vértices del polígono _____ cuánto mide cada uno de esos ángulos _____.



Elementos de un polígono regular

Recuerda que anteriormente habíamos mencionado que los polígonos se aplican de diversas formas en el medio en el que nos desenvolvemos, con tan solo mirar a nuestro alrededor podemos señalar a algún polígono de la variedad que tenemos, las preguntas que nos hacemos ahora es ¿Por qué son tan importantes? ¿De qué manera aplicamos a los diferentes polígonos? ¿Qué elementos y propiedades del polígono debemos considerar para su aplicación? Seguramente tendrás alguna respuesta para las diferentes preguntas y así mismo además de los lados y los vértices conoces algunos otros elementos del polígono. Ahora, en ésta parte de la sesión, lo que haremos será definirlos a cada uno y deducir las propiedades que nos ayudarán en la solución de problemas.

Los elementos que se encuentran en un polígono se presentan en las siguientes figuras y los definimos de la siguiente manera.

Considerando a los elementos que son segmentos de recta tenemos:

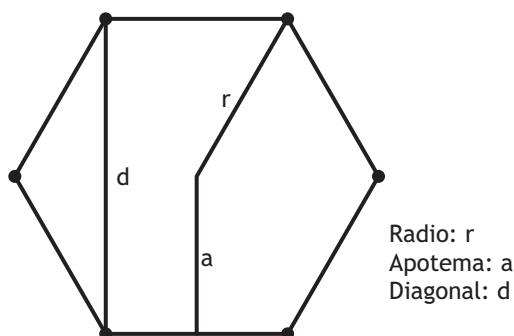


Figura 4.6 **Radio:** es el segmento de recta que une el centro del polígono con uno de sus vértices.



Apotema: es el segmento de recta perpendicular que va del centro del polígono a uno de sus lados.

Diagonal: es el segmento de recta que une dos vértices no consecutivos del polígono.

Considerando a los ángulos que se encuentran en un polígono tenemos:

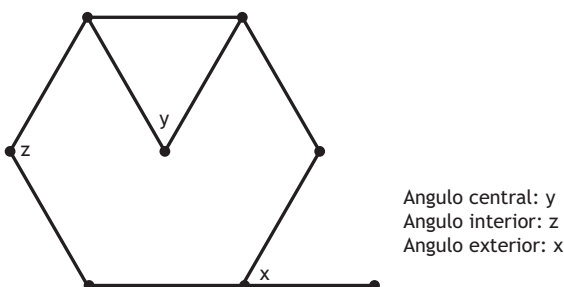


Figura 4.7

Angulo central: es el ángulo formado por dos radios del polígono.

Angulo interior: es el ángulo formado por dos lados del polígono.

Angulo exterior. es el ángulo formado por un lado y la prolongación de su lado adyacente de un polígono.

Después de haber definido cada uno de los elementos que se encuentran en un polígono, lo que haremos a continuación es determinar las propiedades para poder encontrar el valor de los elementos, es decir, deduciremos las fórmulas que nos ayudarán a encontrar el valor de los ángulos en el polígono o cuántas diagonales tiene en total, recuerda que en actividades anteriores se te pidió encontrar el valor de algunos ángulos y trazar todas las diagonales de un polígono y al comparar tus respuestas con la de tus compañeros algunas de ellas eran diferentes, ahora, al deducir las fórmulas y aplicarlas, todos tendremos las mismas respuestas.

Diagonales en un polígono regular

Analizaremos primero lo que podemos deducir de las diagonales de un polígono. Tomando en cuenta que en un polígono se pueden trazar diagonales desde cada uno de sus vértices, al sumarlos todos obtenemos el total de las diagonales.

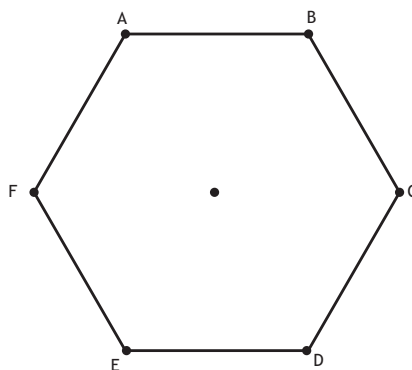


Figura 4.8

Tracemos todas las diagonales posibles desde el vértice A y analicemos la figura.

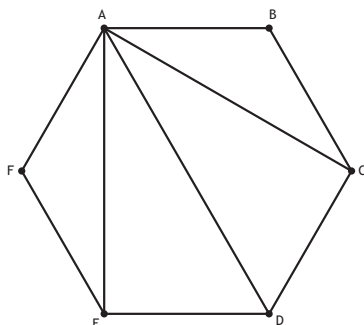


Figura 4.9

Para dicho análisis estamos considerando a un hexágono regular, es decir un polígono de 6 lados, de donde obtuvimos 3 diagonales desde el vértice A., a continuación se te pide que realices la siguiente actividad para poder deducir la propiedad de manera general.

Actividad de aprendizaje 4

Dados los siguientes polígonos, encuentra el número de diagonales que se pueden trazar desde un vértice.

Polígono	Numero de lados	Diagonales desde un vértice
Pentágono		
Heptágono		
Decágono		
Dodecágono		
Icoságono		

Ya que tienes los resultados, observarás que el número de diagonales está relacionado con el número de lados del polígono, el cual se encuentra en una diferencia de 3, es decir, el número de lados es mayor al número de diagonales en una diferencia de 3, por lo tanto podemos deducir, que el número de diagonales que se pueden trazar desde un vértice, en un polígono regular, es igual al numero de lados menos 3, es decir, $d = n - 3$ donde d es el número de diagonales desde un vértice.

Ahora lo que haremos será deducir el número total de diagonales que se pueden trazar desde un vértice como aparece en la siguiente figura:

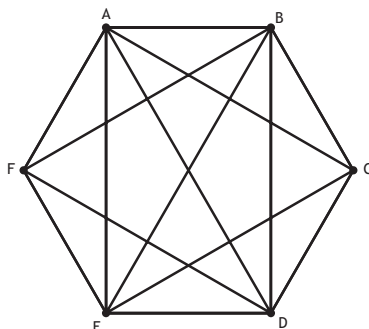


Figura 4.10

Para determinar la propiedad que nos dé el número total de diagonales en un polígono regular, nos basaremos en la propiedad anterior que nos dice que las diagonales que se pueden trazar desde un vértice esta dada por $d = n - 3$ $d = n - 3$, considerando que un polígono de n n lados tiene n n vértices, podríamos determinar la suma de las diagonales desde cada vértice y tendríamos que dicha suma estará dada por $sd = n(n-3)$ $sd = n(n-3)$, ahora, analizando la figura podemos darnos cuenta que la diagonal AE se encuentra trazada en el vértice A y también en el vértice E, es decir trazamos la diagonal AE y la diagonal EA, si analizas las demás diagonales podrás darte cuenta de que cada una de ellas está trazada dos veces, por lo tanto la relación $n(n-3)$ $n(n-3)$ nos está dando el doble del número total de diagonales y lo que nosotros queremos es el total, por lo tanto lo único que debemos

hacer es dividir entre dos dicho resultado obteniendo $D = \frac{n(n-3)}{2}$ donde D D es el número total de diagonales que se pueden trazar en un polígono regular.

De lo anterior hemos obtenido las siguientes propiedades:

$d = n - 3$ $d = n - 3$ Número de diagonales trazadas desde un vértice en un polígono.

$D = \frac{n(n-3)}{2}$ Número total de diagonales trazadas en un polígono.

A continuación, lo que haremos será resolver una serie de ejemplos en los cuales aplicaremos las propiedades obtenidas en la solución de problemas. Analiza la solución de cada uno de ellos ya que te ayudarán en la solución de ejercicios que se presentarán más adelante.

Ejemplos:

1. Determina el número de diagonales que se pueden trazar desde un vértice, de un:

a) Dodecágono

Solución. Tenemos que la fórmula para hallar el número de diagonales desde un vértice es $d = n - 3$ $d = n - 3$ y como se trata de un dodecágono tendremos que el valor de n n es 12, al sustituir en la fórmula nos quedará $d = 12 - 3 = 9$ $d = 12 - 3 = 9$ por lo que se pueden trazar 9 diagonales desde un vértice.

b) Pentadecágono

Solución. Para éste ejemplo el valor de n es 15 al sustituir en la fórmula tendremos $d = 15 - 3 = 12$ $d = 15 - 3 = 12$ por lo que se pueden trazar 12 diagonales

2. Calcula el número de lados de un polígono si desde uno de sus vértices se pueden trazar:

a) 8 diagonales

Solución. En éste ejemplo nos piden determinar el valor que tendrá n para poder definir al polígono que tenga 8 diagonales trazadas desde un vértice, por lo que el dato que conocemos es $d = 8$ al sustituir en la fórmula $d = n - 3$ $d = n - 3$ tendremos:

$$8 = n - 3 \quad 8 = n - 3 \text{ despejamos y obtenemos:}$$

$$8 + 3 = n \quad 8 + 3 = n \text{ por lo tanto:}$$

$11 = n$ $11 = n$ de donde deducimos que el número de lados es 11, por lo tanto se trata de un endecágono o undecágono.

- b) 13 diagonales

Solución. Para éste ejemplo el dato que conocemos es $d = 13$ $d = 13$ al sustituir tendremos:

$$13 = n - 3 \quad 13 = n - 3 \quad \text{despejamos:}$$

$$13 + 3 = n \quad 13 + 3 = n \quad \text{de donde:}$$

$16 = n$ $16 = n$ el número de lados obtenidos es 16 por lo tanto se trata de un hexadecágono.

3. Encuentra el total de diagonales que es posible trazar en un:

- a) Octágono

Solución. Como el polígono dado es un octágono tendremos que el valor de n es 8, utilizaremos la fórmula para hallar el número total de diagonales la cual es

$$D = \frac{n(n-3)}{2} \quad \text{realizamos la sustitución y obtenemos} \quad D = \frac{8(8-3)}{2} = \frac{8(5)}{2} = \frac{40}{2} = 20$$

por lo tanto se pueden trazar 20 diagonales en total, en un octágono.

- b) Heptágono

Solución. Para éste ejemplo tenemos que $n = 7$ al sustituir en la fórmula obten-

$$D = \frac{7(7-3)}{2} = \frac{7(4)}{2} = \frac{28}{2} = 14$$

dremos por lo tanto podemos trazar 14 diagonales en total, en un heptágono.

4. Hallar el número de lados y el nombre del polígono, si el total de diagonales que se pueden trazar son:

- a) 27 diagonales

Solución. En éste ejemplo nos piden encontrar al polígono en el que se pueden trazar 27 diagonales en total, por lo tanto el valor que se desconoce es el de n y el dato que conocemos es el número total de diagonales que en este caso es 27 por lo tanto tenemos que $D = 27$ $D = 27$, sustituimos en la fórmula y obtenemos:

$$27 = \frac{n(n-3)}{2} \quad \text{despejamos al denominador}$$

$$2(27) = n(n-3) \quad \text{resolvemos las multiplicaciones y obtenemos}$$

$$54 = n^2 - 3n \quad \text{despejamos igualando a cero}$$

$$n^2 - 3n - 54 = 0 \quad \text{factorizamos al trinomio}$$

$$(n-9)(n+6) = 0 \quad \text{igualamos a cero y despejamos cada expresión}$$

$$n - 9 = 0 \quad n + 6 = 0$$

$$n = 9 \quad n = -6$$

5. En éste ejercicio obtenemos dos respuestas pero sólo una es la correcta, analizándolas podemos ver que la respuesta correcta es $n = 9$ $n = 9$ y no $n = -6$ $n = -6$ ya que no existe un polígono regular que tenga -6 lados, por lo tanto el polígono buscado es un nonágono.



a) 44 diagonales

Solución. Para este ejemplo tendremos que $D = 44$ $D = 44$ sustituimos en la fórmula y realizamos las operaciones necesarias para obtener el valor de n .

$$44 = \frac{n(n-3)}{2}$$

$$2(44) = n(n-3)$$

$$88 = n^2 - 3n$$

$$n^2 - 3n - 88 = 0$$

$$(n-11)(n+8) = 0$$

$$n-11 = 0 \quad n+8 = 0$$

$$n = 11 \quad n = -8$$

El valor de $n = 11$ $n = 11$ es la respuesta correcta por lo tanto el polígono en el que se pueden trazar 11 diagonales en total es el undecágono

1. Hallar el número de diagonales que se pueden trazar desde un vértice. Si el número de lados es el doble de sus diagonales.

Solución. En éste ejemplo nos presentan un dato diferente con respecto a los ejemplos anteriores, ya que no nos dicen la cantidad de lados o las diagonales del polígono sino lo que hacen es relacionar ambos datos, nos mencionan que el número de lados es el doble de sus diagonales desde un vértice, es decir tendríamos que $n = 2d$ $n = 2d$, al sustituirlo en la fórmula nos quedará:

$$d = n - 3$$

$$d = 2d - 3 \quad \text{despejamos términos y tendremos}$$

$$d + 3 = 2d$$

$$3 = 2d - d \quad \text{resolviendo nos quedará}$$

$d = 3$ por lo tanto se pueden trazar 3 diagonales desde un vértice del polígono mencionado.

2. Hallar el número de diagonales totales, si el número de diagonales totales es el triple de su lados.

Solución. Considerando los datos de éste ejemplo tendríamos que $D = 3n$ $D = 3n$ al sustituir en la fórmula tendremos:

$$D = \frac{n(n-3)}{2}$$

$$3n = \frac{n(n-3)}{2} \quad \text{despejamos al denominador y resolvemos la multiplicación del numerador}$$

$$2(3n) = n(n-3)$$

$$6n = n^2 - 3n \quad \text{despejamos y agrupamos términos semejantes}$$

$$n^2 - 3n - 6n = 0$$

$$n^2 - 9n = 0 \quad \text{factorizamos}$$

$$n(n-9) = 0 \quad \text{igualamos a cero y despejamos}$$

$$n - 9 = 0$$

$$n = 0 \quad n = 9$$

La solución es $n=9$ ya que $n=0$ nos estaría indicando a un polígono de cero lados lo cual no es correcto, ya que dicho polígono no existe, por lo tanto se trata de un nonágono.

Después de haber analizado los ejemplos anteriores te corresponde resolver los ejercicios correspondientes a ésta parte de la sesión para reforzar los conocimientos adquiridos.

Actividad de aprendizaje 5

Resuelve en tu cuaderno los siguientes ejercicios.

- En cada uno de los siguientes polígonos, determina el número de diagonales que se pueden trazar desde uno de sus vértices, así como el total de diagonales.
 - Decágono
 - 25 lados
 - Icoságono
 - Octágono.
- En cada uno de los ejercicios, se te proporciona el total de diagonales que podemos trazar desde un solo vértice del polígono. Encuentra en cada uno de ellos el nombre del polígono que cumple con las características indicadas.
 - $d = 9$
 - $d = 12$
 - $d = 20$
 - $d = 8$
- En cada uno de los ejercicios, se te proporciona el total de diagonales que podemos trazar en un polígono. Encuentra en cada uno de ellos el nombre del polígono que cumple con las características indicadas.
 - $D = 20$
 - $D = 44$
 - $D = 35$
 - $D = 9$

Ángulos en un polígono regular

Ya que determinamos las propiedades correspondientes al cálculo de las diagonales en un polígono regular, ahora deduciremos las propiedades correspondientes a los ángulos que definimos como elementos del polígono.

Para encontrar la relación que nos permita encontrar el valor del ángulo central de un polígono, lo que haremos será inscribir al polígono en una circunferencia y trazamos al ángulo central del polígono, la figura nos queda de la siguiente manera:

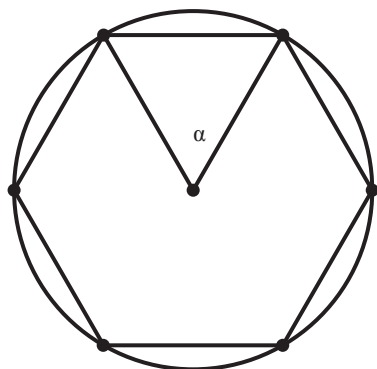


Figura 4.11



Recordemos que una circunferencia tiene como medida 360° , lo que haremos ahora será trazar todos los ángulos centrales del polígono por lo que la figura nos quedará de la siguiente manera:

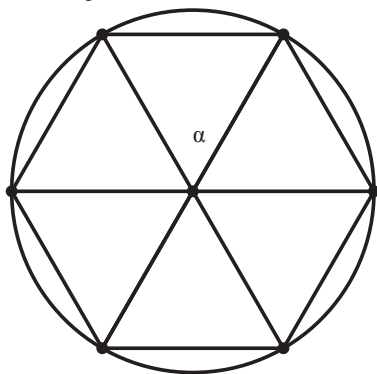


Figura 4.12

Analizando la figura, podemos observar que el número de ángulos centrales del polígono es el mismo que el número de sus lados, además de que estamos dividiendo a la circunferencia en partes iguales y dichas partes corresponden al mismo número de ángulos centrales, por lo tanto la suma de los ángulos centrales será igual a 360° , es decir, si tenemos a un polígono de n lados y llamamos α al ángulo central tendremos que $n\alpha = 360^\circ$

$$\alpha = \frac{360}{n}, \text{ por lo tanto en valor del ángulo central será } \alpha = \frac{360^\circ}{n}$$

Ahora deduciremos la fórmula para encontrar a un ángulo interior de un polígono. Consideremos primero la figura y marquemos a los ángulos interiores del polígono regular.

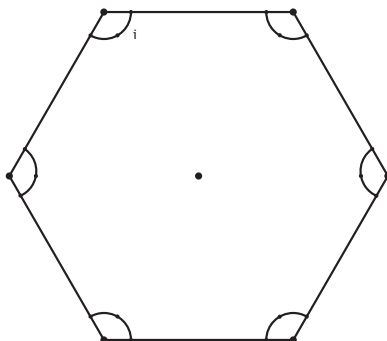


Figura 4.13

Ahora lo que haremos será trazar los radios del polígono, de donde obtendremos puros triángulos isósceles cuyos ángulos de la base son iguales.

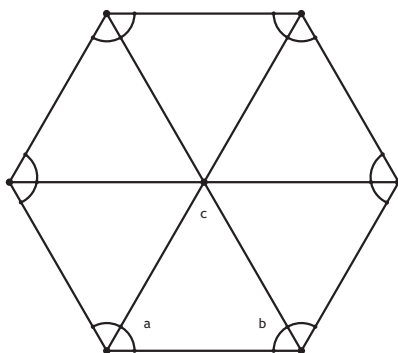


Figura 4.14

Podemos observar que un radio divide a un ángulo interior del polígono a la mitad, por lo tanto los ángulos de la base de un triángulo formado en el polígono por dos radios, equivalen cada uno a la mitad de un ángulo interior, así los dos ángulos de la base equivalen a un ángulo interior. En la figura tendríamos que $\angle a + \angle b = \angle i$, y considerando al ángulo central $\angle c$ y tomando en cuenta que la suma de los ángulos interiores en un triángulo es igual a 180° tendremos la siguiente relación:

$$\angle a + \angle b + \angle c = 180^\circ \quad \text{sustituimos en la igualdad que } \angle a + \angle b = \angle i$$

$$\angle i + \angle c = 180^\circ \quad \text{sustituimos al ángulo central por su igualdad } \angle c = \frac{360^\circ}{n}$$

$$\angle i + \frac{360^\circ}{n} = 180^\circ \quad \text{despejamos y obtenemos}$$

$$\angle i = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n} \quad \text{resolvemos la resta de fracciones y obtenemos}$$

$$\angle i = \frac{180^\circ n - 360}{n} \quad \text{factorizamos a los } 180^\circ \text{ y tendremos finalmente}$$

$$\angle i = \frac{180^\circ (n - 2)}{n} \quad \text{donde } n \text{ es el número de lados del polígono regular.}$$

Ahora deduciremos la fórmula para encontrar un ángulo exterior de un polígono regular. Consideremos la siguiente figura:

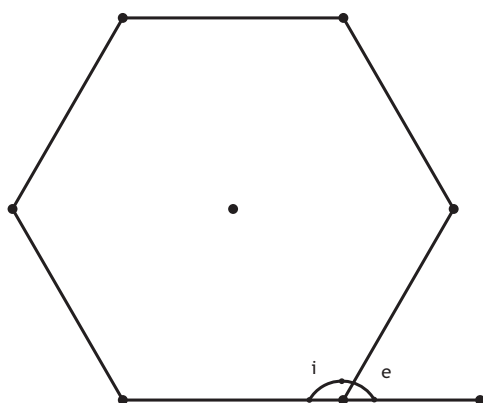


Figura 4.15

En la figura observamos que el ángulo exterior y un interior son suplementarios, es decir $\angle i + \angle e = 180^\circ$

En los procedimientos anteriores obtuvimos la igualdad $\angle i + \angle c = 180^\circ$ de donde se deduce que un ángulo interior y el ángulo central son suplementarios también, igualando ambas expresiones tendremos:

$$\angle i + \angle e = 180^\circ = \angle i + \angle c$$

$$\angle i + \angle e = \angle i + \angle c \quad \text{eliminando términos tendremos que}$$

$$\angle e = \angle c \quad \text{considerando que el ángulo central tiene como medida } \angle c = \frac{360^\circ}{n}$$

Se deduce que un ángulo exterior tiene por medida $\angle e = \frac{360^\circ}{n}$ donde n es el número de lados del polígono.



Suma de los ángulos que se forman en un polígono

Ya definimos a las igualdades o fórmulas que nos ayudarán a encontrar la medida de los ángulos que se forman en un polígono las cuales fueron:

$$\angle c = \frac{360^\circ}{n}$$

Para el ángulo central

$$\angle e = \frac{360^\circ}{n}$$

Para el ángulo exterior

$$\angle i = \frac{180^\circ(n-2)}{n}$$

Para el ángulo interior

Lo que haremos ahora será establecer las propiedades para la suma de dichos ángulos. Si consideramos que un polígono de n lado tiene n ángulos centrales, tendremos

$$sc = nc = n \left(\frac{360^\circ}{n} \right) = 360^\circ$$

que la suma de los ángulos centrales sc será igual a 360° de donde obtenemos la siguiente propiedad "la suma de los ángulos centrales de un polígono regular es igual a 360° ". Como los ángulos exteriores tienen la misma propiedad que un ángulo central,

es decir, $\angle e = \frac{360^\circ}{n}$, se deduce que "la suma de los ángulos exteriores de un polígono es igual a 360° ".

Del mismo modo consideramos que un polígono de n lados tiene n ángulos interiores

y que un ángulo interior tiene la propiedad $\angle i = \frac{180^\circ(n-2)}{n}$ tendremos que la suma de

$$si = ni = n \left(\frac{180^\circ(n-2)}{n} \right) = 180^\circ(n-2)$$

los ángulos interiores estará determinada por $si = 180^\circ(n-2)$, por lo tanto la suma de los ángulos interiores en un polígono quedará definido por $si = 180^\circ(n-2)$ donde n es el número de lados del polígono regular.

Ejemplos

1. Calcular en un heptágono regular:

a) La suma de los ángulos interiores.

Solución: Al tratarse de un heptágono tendremos que el valor de n es igual a 7, al sustituir dicho valor en la fórmula para la suma de los ángulos interiores tendremos:

$$Si = 180^\circ(n-2) = 180^\circ(7-2) = 180^\circ(5) = 900^\circ \text{ por lo tanto la suma de los ángulos interiores de un heptágono es igual a } 900^\circ.$$

b) La suma de los ángulos exteriores.

Solución: Recordemos que la propiedad de la suma de los ángulos exteriores de cualquier polígono es $Se = 360^\circ$, por lo tanto la suma de los ángulos exteriores del heptágono es 360° .

- c) Un ángulo interior.

Solución: Recordemos que el dato que tenemos es $n=7$ al sustituirlo en la fórmula del ángulo interior tendremos $i = \frac{180^\circ(n-2)}{n} = \frac{180^\circ(7-2)}{7} = \frac{540^\circ}{7} = 77.143^\circ$, por lo tanto un ángulo interior de un heptágono tiene por medida 77.143° .

- d) Un ángulo exterior.

Solución: Tomando en cuenta que el número de lados del heptágono es 7 al sustituirlo en la fórmula tendremos $e = \frac{360^\circ}{7} = 51.429^\circ$, por lo tanto su ángulo central mide 51.429° .

2. Un ángulo central.

Solución: Tomando en cuenta que un ángulo central tiene la misma propiedad que un ángulo exterior y en el inciso anterior encontramos la medida del ángulo exterior del heptágono, el cual fue 51.429° , tendremos que la medida del ángulo central es 51.429° .

- e) ¿Cuántos lados tiene un polígono regular cuyos ángulos interiores suman 1440° ?

Solución: Consideramos la fórmula de la suma de los ángulos interiores $Si = 180^\circ(n-2)$ el dato que conocemos es $Si = 1440$ lo que haremos será sustituirlo en la fórmula lo que nos quedará: $1440^\circ = 180^\circ(n-2) = 180^\circ n - 360^\circ$ despejamos a n y obtendremos $n = \frac{1440^\circ + 360^\circ}{180^\circ} = \frac{1800^\circ}{180^\circ} = 10$ por lo tanto al obtener que el valor de n es 10 se concluye que se trata de un decágono.

3. ¿Cuántos lados tiene un polígono regular cuyo ángulo interior es de 60° ?

Solución: De manera similar al ejemplo anterior tenemos que el dato que conocemos es $i = 60^\circ$ el cual vamos a sustituir en la fórmula $i = \frac{180^\circ(n-2)}{n}$ de

donde obtendremos $60^\circ = \frac{180^\circ(n-2)}{n}$ despejamos al denominador y realizamos la multiplicación del numerador para obtener $n \cdot 60^\circ = 180^\circ(n-2) = 180^\circ n - 360^\circ$ agrupamos términos semejantes $180^\circ n - 60^\circ n = 360$ resolvemos $120^\circ n = 360^\circ$

despejamos a n y obtenemos $n = \frac{360^\circ}{120^\circ} = 3$ por lo tanto se concluye que se trata de un triángulo.

A continuación se te presenta una serie de ejercicios como repaso para reforzar los conocimientos adquiridos en esta sesión.

Actividad de aprendizaje 6

Resuelve, en tu cuaderno, los siguientes ejercicios.

1. En los siguientes casos, se proporciona el número de lados de un polígono convexo. ¿En cuántos triángulos dividen al polígono las diagonales trazadas desde uno de los vértices?
 - a) 10
 - b) 25
 - c) X



2. En los siguientes casos, se proporciona el número de lados de un polígono convexo. Encuentra la suma de las medidas de los ángulos de los polígonos:
- 6
 - 12
 - 24
 - 100
 - P
3. En los siguientes casos, se proporciona la suma de las medidas de los ángulos interiores. Encuentra el número de lados del polígono:
- $7,020^\circ$
 - $1,980^\circ$
 - $6,120^\circ$
 - $1,800^\circ$
 - $1,260^\circ$
 - $3,420^\circ$
4. En los siguientes casos, se proporciona el número de lados de un polígono regular. Encuentra la medida de cada ángulo: interior y exterior del polígono:
- 7
 - 9
 - 10
 - 20
 - 100
5. Completa la siguiente tabla. Procede por renglones:

Polígono regular	Número de lados	Diagonales por cada vértice	Triángulos del polígono	Suma de ángulos interiores	Medida de cada ángulo interior	Total de diagonales
Triángulo						
Cuadrado						
Pentágono						
Hexágono						
Heptágono						
Octágono						
Nonágono						
Decágono						

A continuación se te presenta una serie de ejercicios de aplicación, correspondientes a los conceptos adquiridos en este bloque, resuélvelos tomando en cuenta las indicaciones de tu profesor, considera todas las propiedades y relaciones para darle solución a los ejercicios... Manos a la obra.



Realimentación

Actividad de aprendizaje 7

Resuelve en tu cuaderno los siguientes ejercicios:

1. Hallar el número de diagonales que se pueden trazar desde uno de los vértices de un polígono, si el número de lados es el doble de sus diagonales.
2. Hallar el número de diagonales totales si éstas resultan el triple de sus lados.
3. La razón de la suma de los ángulos interiores de un polígono, a la suma de los ángulos exteriores es de 5:1 ¿De qué polígono se trata?
4. La suma de los ángulos interiores de un polígono es igual a cuatro veces la suma de los ángulos exteriores de dicho polígono. ¿De qué polígono se trata?
5. Si un polígono regular tiene 12 lados y cada lado mide 4.5 cm ¿Cuánto mide su perímetro?
6. La suma de los ángulos interiores de un polígono es igual a cuatro veces la suma de sus ángulos exteriores. ¿Cuántos lados tiene el polígono?
7. Calcula el total de diagonales que se pueden trazar en un eneágono.
8. Si el total de diagonales que se pueden trazar en un polígono es de 90. Calcula la medida de cada ángulo interno.
9. Si total de diagonales que se pueden trazar en un polígono es igual al cuádruplo del número de diagonales que se pueden trazar desde un vértice ¿Cuál es el nombre del polígono?
10. ¿Existe algún polígono regular que admita cinco diagonales? Justifica tu respuesta.
11. En la figura, ABCDE representa un pentágono regular (de 1 cm de lado) y ABP es un triángulo equilátero. ¿Cuántos grados mide el ángulo $\angle BCP$?

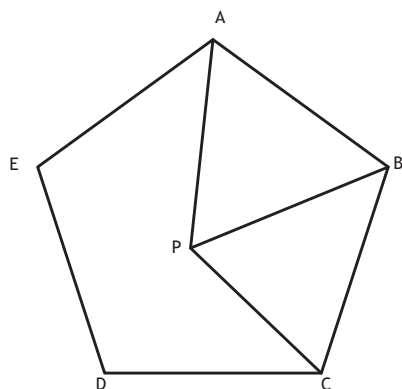


Figura 4.16

a) 45°	b) 54°	c) 60°	d) 66°	e) 72°
---------------	---------------	---------------	---------------	---------------



1. ¿Cuál es la longitud de x en la figura?

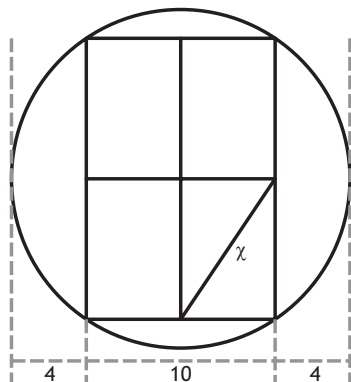


Figura 4.17

	a) $\sqrt{116}$		b) $4\sqrt{10}$		c) 9		d) 12		e) 18	
--	-----------------	--	-----------------	--	------	--	-------	--	-------	--

12. La estrella de la figura toca cada lado del hexágono regular en el punto medio (los lados de la estrella son paralelos a los del hexágono). Si el área de la estrella es 6, ¿cuál es el área del hexágono?

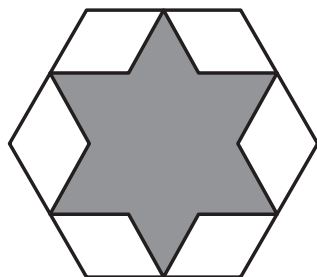


Figura 4.18

a) 8	b) 9	c) 12	d) 15	e) 18
------	------	-------	-------	-------

¿Qué proporción guardan las áreas de las dos regiones grises marcadas en el rectángulo PQRS, si M es un punto cualquiera de la diagonal?

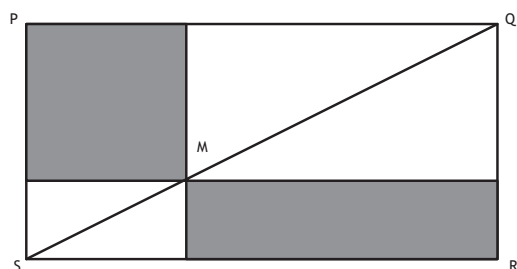


Figura 4.19

(a) La de arriba es más grande	(b) La de abajo es más grande	(c) Son iguales	(d) Sólo son iguales si M es el punto medio	(e) No hay suficientes datos
--------------------------------	-------------------------------	-----------------	---	------------------------------

En el rectángulo de la figura, **M** y **N** son los puntos medios de **AD** y **BC**, respectivamente, y **P** y **Q** son las respectivas intersecciones de **AC** con **BM** y con **ND**. Suponiendo que **AD** mide 5cm y que **AB** mide 3cm, ¿cuántos centímetros tiene de superficie el cuadrilátero **MPQD**?

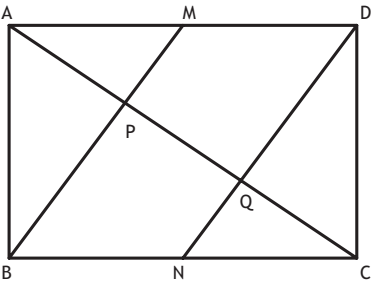


Figura 4.20

(a) 2.75	(b) 3	(c) 3.25	(d) 3.75	(e) 4
----------	-------	----------	----------	-------

En ésta parte de los ejercicios, el propósito es que seas honesto y que resuelvas a nivel individual, los 3 ejercicios de la Evaluación diagnóstica. A cada una de tus operaciones o soluciones debes darle una argumentación sólida de por qué se debe realizar de esa manera el ejercicio. Una vez que hayas terminado y que estés convencido de lo que has realizado, consulta con tu profesor las respuestas obtenidas y que analice el porqué de tus argumentaciones. Utiliza la misma regla vista en la reflexión para darte los puntajes y ubicarte. Todo esto te servirá para que tú solo te des cuenta en qué nivel te encuentras, al terminar el bloque. Así que a continuación coloca una X en el nivel apropiado y sigue preparándote para superarlo.

Me encuentro en este nivel.				
Pre-formal	Inicial	Básico	Autónomo	Estratégico



Mi proyecto del bloque

Proyecto: Mi modelo didáctico
Problema: Elaborar un modelo didáctico que nos permita visualizar las propiedades de los ángulos y diagonales de un polígono regular.
Duración: Una semana.
Puntuación: 15 puntos.
Competencias: Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos en la aplicación de las propiedades de los ángulos y diagonales de un polígono.
Actividades: En equipos formados por ustedes o por tu profesor, elaborarán un modelo didáctico correspondiente a los conceptos adquiridos en éste bloque. Cada equipo elaborará su modelo enfocándose a un solo polígono, que el profesor te indicará para trabajar. El modelo didáctico estará diseñado de tal manera que en él se puedan visualizar las propiedades de los ángulos y diagonales de un polígono, así como utilizarlo para la solución de ejercicios. El modelo didáctico debe incluir todas las propiedades de los ángulos y diagonales del polígono designado Podrán utilizar cualquier tipo de material que sea necesario, el diseño y creatividad quedará a libertad de cada equipo.
Recursos: Libros de texto, de consulta, guía de matemáticas 2, material para la elaboración y diseño.
Normas: Deberá de entregarse en la fecha indicada por el docente y en caso de que un miembro del equipo falte, se resolverá con el criterio de su profesor. El trabajo se entregará con los elementos básicos requeridos, aunque pudiera contener elementos extra. Cada miembro del equipo trabajará y explicará lo necesario cuando se le pregunte.

Ya hemos llegado al final del bloque y es necesario que tu proyecto haya concluido.

Revisa que nada te falte. En la siguiente tabla encontrarás los lineamientos a evaluar:

Rúbrica del proyecto			
Producto logro o desempeño	Nivel de logro o desempeño		
	5	3	1
Conocimientos	Aplico de manera correcta las propiedades de los ángulos y las diagonales de un polígono, en el diseño del modelo didáctico.	Aplico de manera inconsistente las propiedades de los ángulos y las diagonales de un polígono, en el diseño del modelo didáctico.	No aplico las propiedades de los ángulos y las diagonales de un polígono, en el diseño del modelo didáctico.
Habilidades	El modelo didáctico contiene elementos decorativos y originales. Establezco de manera adecuada los elementos necesarios para su elaboración. Respondo de manera correcta y apporto ideas a las preguntas planteadas al exponer lo realizado.	El modelo didáctico contiene algunos elementos decorativos y originales. Establezco de manera inconsistente los elementos necesarios para su elaboración. Respondo en pocas ocasiones y apporto algunas ideas al exponer lo realizado.	El modelo didáctico no contiene elementos decorativos y originales. No establezco los elementos necesarios para su elaboración. No Respondo de manera correcta ni apporto ideas a las preguntas planteadas al exponer lo realizado.
Actitudes	Tengo un alto compromiso con mi equipo y con la resolución del problema, de forma que colaboro con él en todo momento. Prevengo errores que mi equipo pueda generar y los corrijo acertada y oportunamente, con tacto. Mantengo una actitud positiva en todo momento del trabajo, además de que expreso mis ideas y aportaciones con un lenguaje digno en todo momento.	Tengo compromiso con mi equipo y con la resolución del problema de forma que colaboro la mayoría del tiempo con él. Observo errores que mi equipo pueda generar y los corrijo en ocasiones con lenguaje impropio. Mantengo una actitud positiva del trabajo además de que expreso, ocasionalmente, mis ideas y aportaciones.	Tengo muy poco compromiso con mi equipo y con la resolución del problema de forma que no colaboro con él. No prevengo errores que mi equipo pueda generar. Mantengo una actitud negativa durante el trabajo y no expreso ni ideas ni aportaciones.



Evaluación de la competencia

Finalmente te presento la rúbrica del bloque completo que resume lo que deberás cumplir.

Rúbrica para la evaluación del bloque					
Producto, logro o desempeño	Nivel de logro o desempeño				
	5 Estratégico	4 Autónomo	3 Básico	2 Inicial	1 Pre-formal
Conocimientos	Reconozco de manera correcta a los polígonos mediante su clasificación tomando en cuenta a los lados y ángulos. Defino de manera correcta a todos los elementos de un polígono regular. Reconozco de manera correcta las propiedades correspondientes a las diagonales y ángulos en un polígono regular	Reconozco a los polígonos mediante su clasificación tomando en cuenta a los lados y ángulos. Defino algunos elementos de un polígono regular. Reconozco algunas propiedades correspondientes a las diagonales y ángulos en un polígono regular	Reconozco de manera inconsistente a los polígonos mediante su clasificación tomando en cuenta a los lados y ángulos. Defino de manera inconsistente a los elementos de un polígono regular. Reconozco de manera inconsistente las propiedades correspondientes a las diagonales y ángulos en un polígono regular	Reconozco a algunos polígonos mediante su clasificación tomando en cuenta a los lados y ángulos. Defino a algunos elementos de un polígono regular. Reconozco a algunas propiedades correspondientes a las diagonales y ángulos en un polígono regular	No reconozco a los polígonos mediante su clasificación tomando en cuenta a los lados y ángulos. No defino a todos los elementos de un polígono regular. No reconozco las propiedades correspondientes a las diagonales y ángulos en un polígono regular
Habilidades	Aplico de manera correcta la clasificación de los polígonos según sus lados y ángulos. Utilizo de manera correcta los elementos de un polígono para aplicarlos en la solución de problemas. Resuelvo correctamente ejercicios de aplicación utilizando las propiedades de las diagonales y ángulos en un polígono	Aplico la clasificación de los polígonos según sus lados y ángulos. Utilizo los elementos de un polígono para aplicarlos en la solución de problemas. Resuelvo ejercicios utilizando las propiedades de las diagonales y ángulos en un polígono	Aplico de manera inconsistente la clasificación de los polígonos según sus lados y ángulos. Utilizo de manera inconsistente los elementos de un polígono para aplicarlos en la solución de problemas. Resuelvo de manera inconsistente ejercicios de aplicación utilizando las propiedades de las diagonales y ángulos en un polígono	Aplico en algunas ocasiones la clasificación de los polígonos según sus lados y ángulos. Utilizo algunas veces los elementos de un polígono para aplicarlos en la solución de problemas. Resuelvo algunos ejercicios utilizando las propiedades de las diagonales y ángulos en un polígono	No aplico la clasificación de los polígonos según sus lados y ángulos. No utilizo los elementos de un polígono para aplicarlos en la solución de problemas. No resuelvo ejercicios utilizando las propiedades de las diagonales y ángulos en un polígono

Rúbrica para la evaluación del bloque					
Producto, logro o desempeño	Nivel de logro o desempeño				
	5 Estratégico	4 Autónomo	3 Básico	2 Inicial	1 Pre-formal
Actitudes	Considero la importancia de la clasificación de los polígonos según sus lados y ángulos en la solución de ejercicios Aprecio la utilidad de las propiedades de los elementos de los polígonos relacionadas con sus ángulos y diagonales en la solución de situaciones reales Demuestro siempre respeto hacia las ideas de mis compañeros en un ambiente socialmente tolerable y apporto ideas.	Considero la importancia de la clasificación de los polígonos según sus lados y ángulos. Aprecio la utilidad de las propiedades de los elementos de los polígonos relacionadas con sus ángulos y diagonales. Demuestro respeto hacia las ideas de mis compañeros en un ambiente socialmente tolerable.	Considero necesario la clasificación de los polígonos según sus lados y ángulos en la solución de ejercicios Tomo en cuenta la utilidad de las propiedades de los elementos de los polígonos relacionadas con sus ángulos y diagonales. Demuestro siempre respeto hacia las ideas de mis compañeros.	Considero no muy importante la clasificación de los polígonos según sus lados y ángulos en la solución de ejercicios Casi no aprecio la utilidad de las propiedades de los elementos de los polígonos relacionadas con sus ángulos y diagonales. Casi no demuestro respeto hacia las ideas de mis compañeros	No considero la importancia de la clasificación de los polígonos según sus lados y ángulos en la solución de ejercicios No aprecio la utilidad de las propiedades de los elementos de los polígonos relacionadas con sus ángulos y diagonales en la solución de situaciones reales No demuestro respeto hacia las ideas de mis compañeros en un ambiente socialmente tolerable y apporto ideas.



Bloque V. Emplea la circunferencia

Atributos de las competencias genéricas:

- 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
- 5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
- 5.4 Construye hipótesis, diseña y aplica modelos para aplicar su validez.
- 5.6 Utiliza las tecnologías de información y comunicación para procesar e interpretar la situación.
- 6.1 Elige las fuentes de información más relevantes para un propósito específico y discrimina entre ellos, de acuerdo a su relevancia y confiabilidad.
- 7.1 Define metas y da seguimiento a sus procesos de construcción de conocimientos.
- 8.1 Propone manera de solucionar un problema y desarrolla un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.
- 8.2 Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.
- 8.3 Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.

Competencias disciplinares básicas

- 1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
- 2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
- 3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
- 4. Argumenta la solución obtenida de un problema con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales; mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
- 5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural, para determinar o estimar su comportamiento.
- 6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente, las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
- 7. Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno y, argumenta su pertinencia.
- 8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.



Dinamización y motivación



Contextualización

En el bloque anterior trabajamos el concepto de polígono, sus elementos, propiedades y áreas; en algún momento involucramos a la circunferencia con el polígono, al inscribirlo o circunscribirlo a él. Partamos de esto último para iniciar los contenidos del presente bloque; sugerimos realices las siguientes actividades y resuelva algunas situaciones planteadas y así medir tus conocimientos iniciales.

- a) Los ángulos consecutivos $\angle 2x$, $\angle 3x$ y $\angle 7x$, forman un ángulo llano ¿Cuál es el valor de x en grados?

a) 12°	b) 20°	c) 30°	d) 35°
---------------	---------------	---------------	---------------

- b) ¿Cuánto mide el ángulo interior de un hexágono regular?

a) 30°	b) 60°	c) 90°	d) 120°
---------------	---------------	---------------	----------------

- c) Sea el $\triangle ABC$ un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 4 cm, calcula el valor de la hipotenusa.

a) $\sqrt{8}$	b) $\sqrt{16}$	c) $\sqrt{28}$	d) $\sqrt{32}$
---------------	----------------	----------------	----------------

- d) ¿Cuánto mide el perímetro del círculo circunscrito a un cuadrado de lado igual a 6 cm?

a) $2\sqrt{72}\pi$	b) $\sqrt{72}\pi$	c) $\sqrt{36}\pi$	d) $2\sqrt{36}\pi$
--------------------	-------------------	-------------------	--------------------

- e) Los lados de un ángulo inscrito en una circunferencia cortan un arco de 76° . ¿Cuánto mide el ángulo inscrito?

a) 76°	b) 32°	c) 38°	d) 152°
---------------	---------------	---------------	----------------

Autoevaluación

Cada inciso corresponde a la resolución de las situaciones planteadas.

	Afirmación	Falso	Verdadero	Argumentación
a)	Los ángulos consecutivos que sumados dan 180° , son también suplementarios.			
b)	En un hexágono regular, la medida de un lado equivale al radio de la circunferencia circunscrita.			

	Afirmación	Falso	Verdadero	Argumentación
c)	La diagonal de un cuadrado circunscrito a una circunferencia equivale al diámetro de dicha circunferencia.			
d)	El perímetro de un círculo es igual a su circunferencia			
e)	El ángulo inscrito en una circunferencia es aquel que tiene su vértice en un punto de la misma.			

Análisis de la actividad

Calificación: 1 punto por cada respuesta correcta. 1 punto por una argumentación pertinente.	Subraya el puntaje alcanzado.	Significado de los resultados para iniciar el desarrollo de los contenidos del Bloque I del programa.
Estratégico	9-10	Identifica, comprende y aplica los principios sobre polígonos regulares y el círculo, sus relaciones métricas y angulares; e inclusive, reconoce ángulos inscritos en una circunferencia.
Autónomo	7-8	Reconoce las relaciones métricas entre polígonos regulares y el círculo, aplicando adecuadamente sus principios.
Básico	5-6	Reconoce las relaciones métricas entre polígonos regulares y el círculo, pero no aplica adecuadamente sus principios.
Inicial-receptivo	2-4	Distingue los diferentes tipos de ángulos y aplica adecuadamente sus propiedades
Nivel pre-formal	0-1	Distingue los diferentes tipos de ángulos, pero no aplica adecuadamente sus propiedades

A partir de los resultados obtenidos en la actividad desarrollada, estamos en condiciones de establecer los objetivos y metas a alcanzar de acuerdo a las unidades de competencia establecidas, para ello se proponen los siguientes niveles de aprovechamiento, los cuales serán determinados mediante la autoevaluación, co-evaluación y la heteroevaluación, a lo largo del bloque V; y, a través de las actividades propuestas en las sesiones que abarcan los contenidos del programa de Matemáticas II.

Autoevaluación

Nivel estratégico: Resuelvo problemas diversos utilizando la imaginación espacial para visualizar circunferencias y sus elementos en objetos y figuras, en dos y tres dimensiones, aplicando sus propiedades mediante modelos aritméticos, algebraicos y gráficos, en forma razonada.	100%
Nivel autónomo: Utilizo la imaginación espacial para visualizar circunferencias, sus elementos en objetos y figuras en dos y tres dimensiones, aplicando este conocimiento en la resolución de problemas.	80%
Nivel resolutivo: Aplico las propiedades y relaciones de segmentos, ángulos, arcos y rectas en la resolución de problemas.	60%
Nivel inicial-receptivo: Utilizo las propiedades de segmentos, ángulos, arcos y rectas ligados a la circunferencia, para establecer sus relaciones y medidas.	30%
Nivel pre-formal: Identifico y describo las propiedades y características de los elementos asociados a una circunferencia: Radio, Cuerda, Diámetro, Arco, Tangente, Ángulos: Central, Inscrito, Seminscrito, Interior y Exterior.	10%

Es muy importante trabajar en equipo cuando así sea requerido, comparando los resultados obtenidos en las actividades desarrolladas. Deberás entregar los productos solicitados en cada una de las actividades sugeridas. Algo muy importante para no olvidar, es respetar la participación de los compañeros y el tiempo establecido para las sesiones.



Problematización

Antes de dar inicio formalmente al desarrollo de los contenidos del bloque V de la asignatura de matemáticas II, te propongo, trates de resolver el siguiente dilema:

El reactivo es de tipo PISA y se titula “Chatear”.

Mark (de Sydney, Australia) y Hans (de Berlín, Alemania) se comunican a menudo por internet mediante el chat. Tienen que conectarse a Internet a la vez para poder “chatear”.

Para encontrar una hora apropiada para chatear, Mark buscó un mapa con horario mundial y halló lo siguiente:

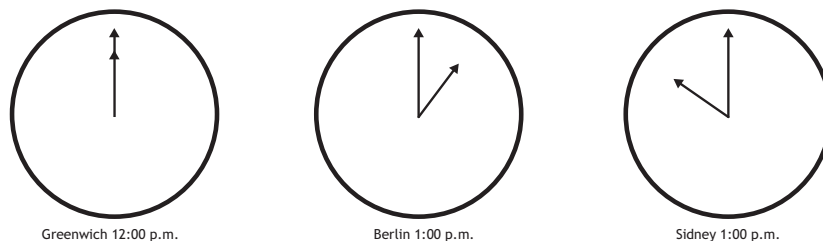


Figura 5.1

Preguntas:

- a) Cuando son las 7 de la tarde en Sídney, ¿qué hora es en Berlín?
- b) Mark y Hans no pueden chatear entre las 9:00 de la mañana y las 4:30 de la tarde, de sus respectivas horas locales, porque tienen que ir al colegio. Tampoco pueden desde las 11:00 de la noche hasta las 7:00 de la mañana, de sus respectivas horas locales porque estarán durmiendo.
- ¿A qué hora podrían chatear Mark y Hans?

Madrid, 2005, Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo (INECSE).
www.lnce.mec.es.

Sesión A: Elementos de la circunferencia y círculo



Desarrollo de saberes

Del saber

- Describo las propiedades de los elementos asociados a una circunferencia: Radio, Cuerda, Diámetro, Arco, Tangente y Secante.

Del saber hacer

- Distingo los diferentes tipos de segmentos, rectas y ángulos asociados a la circunferencia.
- Utilizo las propiedades de segmentos, ángulos, arcos y rectas ligados a la circunferencia, para establecer sus relaciones y medidas.
- Aplico las propiedades y relaciones de segmentos, ángulos, arcos y rectas en la resolución de problemas.
- Utilizo la imaginación espacial para visualizar circunferencias y sus elementos en objetos y figuras, en dos y tres dimensiones.

Del saber ser

- Valoro la importancia de establecer las relaciones que existen entre ángulos, arcos y segmentos en una circunferencia.
- Actúo de manera propositiva al resolver los ejercicios planteados.
- Promuevo de manera creativa la resolución de problemas.



Contextualización

Para comenzar el análisis de los elementos del presente bloque, te sugiero realizar una actividad, no sin antes mencionarte que la circunferencia y sus propiedades han sido tema de discusión, reflexión y estudio durante muchos años. Desde la antigüedad, los dedicados a realizar cálculos observaron una relación estrecha entre el perímetro de una circunferencia y su diámetro.

En el siglo XVII la relación recibió el nombre de π , el cual proviene del vocablo que los antiguos griegos le daban al perímetro del círculo *Periphēria*. Seguramente, en cursos básicos de matemáticas tuviste contacto con este concepto e incluso, lo empleaste para realizar algunos cálculos; sin embargo, sólo para descubrir su comportamiento y comprender el tema y la dinámica de la evolución del número.





Problematización

Actividad de aprendizaje 1

La actividad consiste en llenar la siguiente tabla. Es importante comentar que no tendría sentido tomar la información de alguna fuente, sino realizar las mediciones necesarias tú mismo; y así, apropiarte de las habilidades de manera significativa.

En la tabla observarás varios objetos que tienen alguna forma circular. Realiza las mediciones y las operaciones necesarias para obtener la información.

Objeto	Diámetro	Perímetro	Perímetro/ Diámetro.
Lata de refresco			
CD			
Vaso desechable			
Plato			
Neumático			
Moneda			

Empleando la última columna, organiza con ayuda de tu profesor un debate y comenten lo siguiente:

1. ¿Qué relación pueden establecer entre el perímetro de la circunferencia y su diámetro? ¿Son parecidos los valores que aparecen en la columna entre sí? ¿Te recuerdan el valor de π que has usado en otras ocasiones? ¿Cuál sería tu definición del número π ?
2. Como podrás observar, existe un elemento común en todos los casos, y es que la razón de la circunferencia al diámetro es una constante, no importa el tamaño, esta constante es la que llamamos π (π). Para la mayoría de los usos prácticos, la aproximación de 3.1416 es suficiente, se sabe que existen cálculos mediante computadoras altamente sofisticadas que ubican su valor con cifras de más de dos billones y medio de decimales.

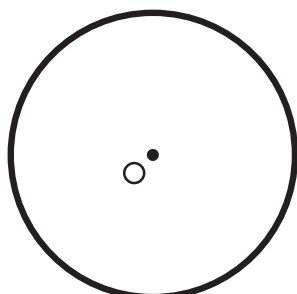
Veamos qué dicen los expertos acerca de la circunferencia y el círculo, no sin antes comentarte que en Holanda, el matemático alemán Ludof van Ceulen pidió que al morir, en su lápida pusieran como epitafio las 35 cifras del número π , que había podido calcular.

Circunferencia y círculo

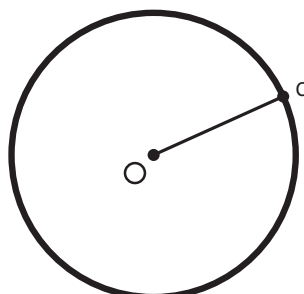
Las figuras geométricas son también aquellas que están formadas por líneas curvas, siendo la más simple la circunferencia. Es común que se utilicen circunferencia y círculo como sinónimos, sin embargo, aunque estos conceptos están muy ligados, tienen significados distintos que hacen posible distinguirlos y no causar confusión al momento de aplicarlos.

La *circunferencia* es una curva cerrada que tiene la condición de que todos sus puntos están situados a la misma distancia de otro punto fijo del mismo plano, llamado centro.

Para nombrar una circunferencia, podemos usar la letra que corresponde al centro o bien por las letras que corresponden, una al centro y otra a algún punto de la circunferencia.



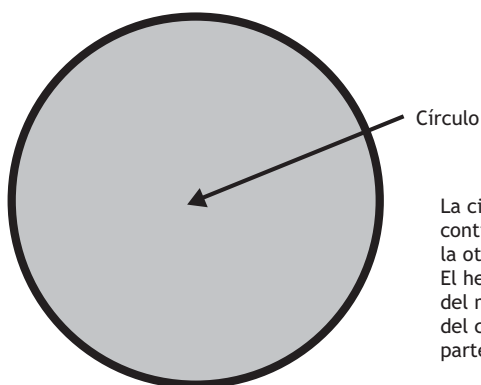
Circunferencia O



Circunferencia OC

Figura 5.2

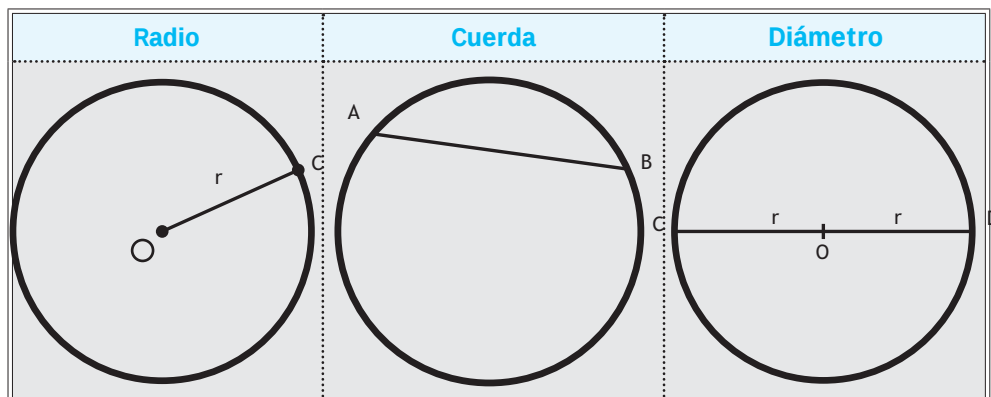
El *círculo* es una figura plana, cuya superficie se encuentra delimitada por la circunferencia y los puntos de la circunferencia también forman parte del círculo.

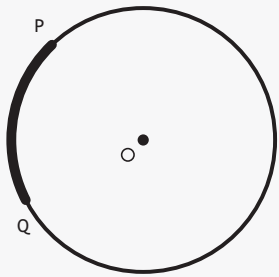
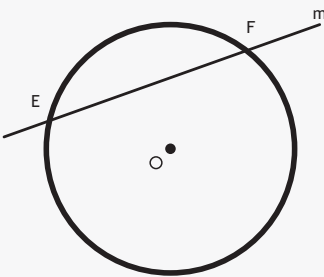
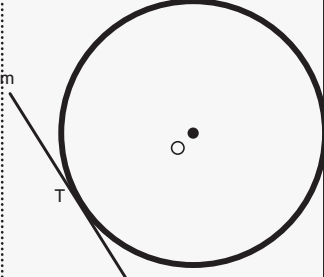


La circunferencia divide al plano que la contiene en dos partes: una exterior y la otra interior, que es el círculo. El hecho de que la circunferencia esté del mismo color que los demás puntos del círculo, es para hacer notar que es parte de él.

Figura 5.3

Es fundamental para el estudio del círculo, la circunferencia y sus propiedades, conocer los segmentos y rectas asociados a él. A continuación se describe cada uno.



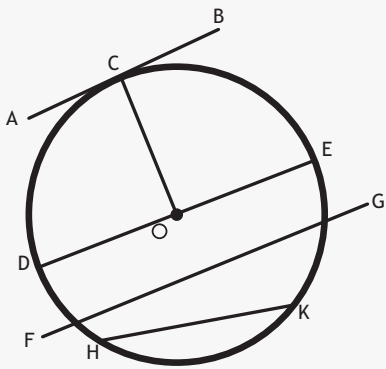
Es el segmento que une el centro de la circunferencia con cualquier punto de ella. En el ejemplo $\overline{OC}$ = radio .	Es el segmento de recta interior al círculo que une dos puntos de la circunferencia. $\overline{AB}$ = cuerda .	Es la cuerda de mayor longitud en el círculo; pasa por el centro y equivale a dos radios. Divide al círculo en dos partes iguales, la semicircunferencia y el semicírculo. $\overline{CD}$ = diámetro .
Arco	Secante	Tangente
		
Segmento de la circunferencia limitada por dos puntos. En el ejemplo $\widehat{PQ}$ = arco .	Recta que corta a la circunferencia en dos puntos.	Recta que toca en un punto a la circunferencia. Al punto de contacto se le denomina "punto de tangencia".

También es conveniente considerar a la **recta exterior** a una circunferencia, que evidentemente no la cortará, aunque se encuentre cerca de ella.

Las definiciones anteriores varían entre los autores, sin embargo, la parte esencial es la que incluimos en el cuadro anterior.

Actividad de aprendizaje 2

1. Escribe el nombre de los elementos que se te indica en la circunferencia.



AB = _____

CO = _____

HK = _____

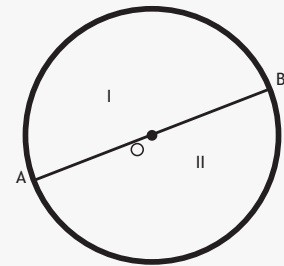
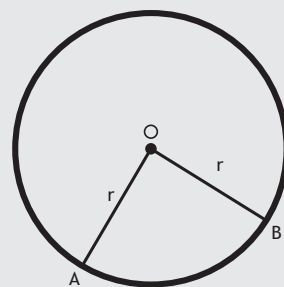
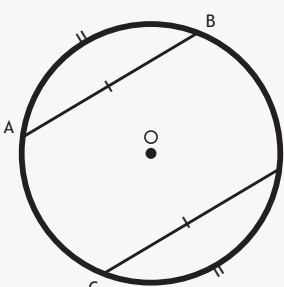
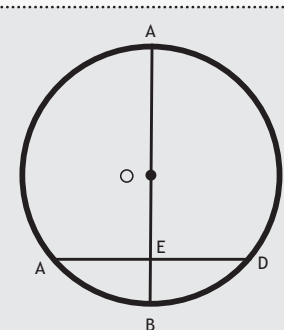
DE = _____

FG = _____

Propiedades de los segmentos

En la presente sección se proporcionan algunos postulados relativos a segmentos del círculo que te ayudarán en la solución de problemas y situaciones, tanto prácticas como teóricas.

Postulados:

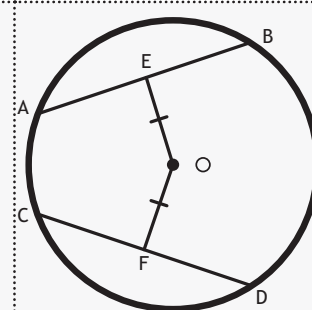
1.- Un diámetro divide al círculo en dos partes iguales o congruentes. AB es un diámetro. $I \cong II$	
2.- Los radios y diámetros de un círculo o de círculos congruentes, son congruentes. OA y OB son radios: $OA \cong OB$	
3.- En un círculo o en círculos congruentes, cuerdas congruentes delimitan arcos congruentes. $\overline{AB} = \overline{CD}$ $\widehat{AB} = \widehat{CD}$	
4. En un círculo, el diámetro perpendicular a una cuerda la bisecta al igual que al arco que delimita. $\overline{AB}$ es diámetro $\overline{CD}$ es diámetro	



5. En un círculo o en círculos congruentes, las cuerdas congruentes se encuentran a la misma distancia del centro.

Si $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ entonces

$$\overline{EO} \cong \overline{FO}$$

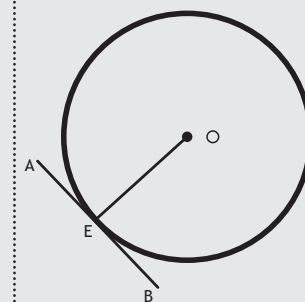


6. El radio de un círculo es perpendicular a la tangente en su punto de contacto.

$\overline{AB}$ es tangente

$\overline{OB}$ es radio

$$\overline{AB} \perp \overline{OE}$$



Veamos cómo estos postulados pueden emplearse, en las siguientes situaciones:

Ejemplo 1

En la siguiente figura, determina el valor de x.

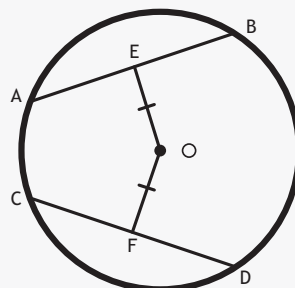


Figura 5.4

Datos:

$$\overline{EO} = 14$$

$$\overline{OF} = 2x - 10$$

Se tiene que:

$$2x - 10 = 14, \text{ por el postulado 5.}$$

$$2x = 24, x = 12.$$

Ejemplo 2

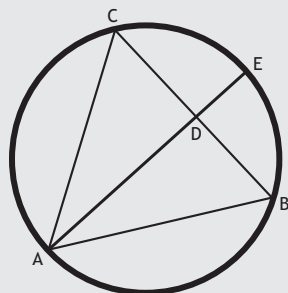
Determina los valores de a y b .


Figura 5.5

Datos:

 $\overline{AE}$ es diámetro

 $\overline{AE} \perp \overline{BC}$
 $\overline{AB} = 2a + 3$
 $\overline{AC} = 15$
 $\angle B = 65^\circ$
 $\angle C = 3b - 25^\circ$

Dado que $\overline{AE}$ es diámetro, tenemos el siguiente razonamiento:

Afirmaciones	Justificaciones
$\overline{BD}$ es congruente con $\overline{CD}$	Por el postulado 4
$\overline{AD}$ es congruente con $\overline{AD}$	Reflexividad
Ángulos $\angle ACD$ y $\angle ADB$ son rectos	Definición de perpendicularidad
$\angle ADC \cong \angle ADB$	Su medida es de 90°
$\triangle ADC \cong \triangle ADB$	Criterio L.A.L.
$\overline{AB} = \overline{AC}$ $\angle B = \angle C$	En todo triángulo, a lados iguales se oponen ángulos iguales y viceversa.
$2a + 3 = 15$	Sustituyendo
$2a = 15 - 3$ $a = 6$	Despejando a Respuesta

$3b - 25^\circ = 65^\circ$	Sustituyendo
$3b = 65^\circ + 25^\circ$	Despejando b
$b = 30^\circ$	Respuesta

Actividad de aprendizaje 3

1. Realiza una investigación bibliográfica o en medios electrónicos, en la que incluyas los elementos que surgen de la división de un círculo por secciones (semicírculo, sector circular, segmento circular, cuadrante circular, trapecio circular y corona). Incluye las fuentes consultadas y comparte con tu clase el producto de la investigación.
2. Comprueba el siguiente enunciado: "las tangentes trazadas a un círculo, desde un punto P exterior al mismo, son congruentes".

Actividad de aprendizaje 4

Reúnete en binas y realiza lo siguiente:

3. Tomando como base un reloj de manecillas, en forma circular y sus números como puntos sobre la circunferencia, responde a las siguientes cuestiones.
 - a) El segmento que se encarga de unir los números 1 y 8 recibe el nombre de :

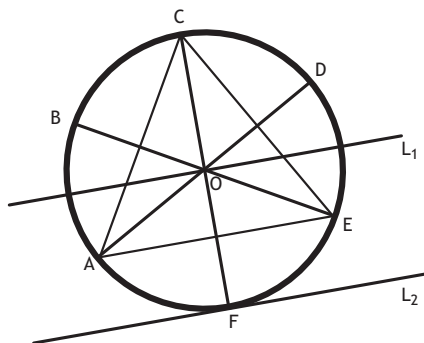
 - b) El segmento que une los números 6 y 12 se llama:

 - c) Los segmentos que unen los puntos 1 y 2 se llaman:

 - d) El segmento de circunferencia que une los números 8 y 12 mide:

 - e) Las cuerdas que unen cualquier par de números consecutivos son:

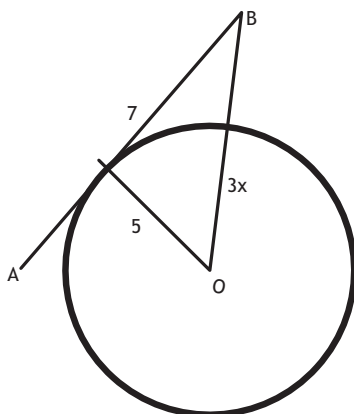
3. Observa la siguiente figura de la circunferencia y completa correctamente el siguiente cuadro, escogiendo y nombrando a cada elemento de ella, según su clasificación.



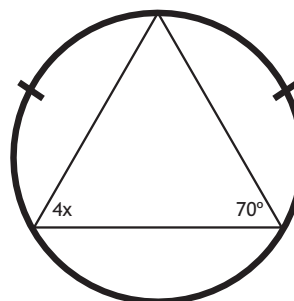
Elemento	Cantidad	Notación
Radios		
Arcos		
Diámetro		
Cuerdas		
Tangentes		
Secantes		

Determina los valores de las variables en cada caso:

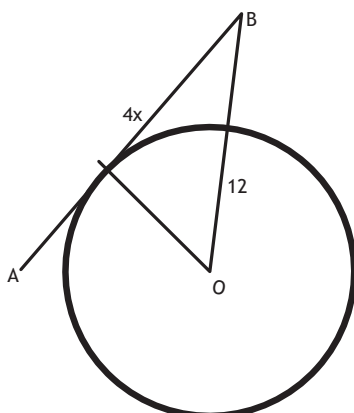
a) Sea el segmento AB una tangente



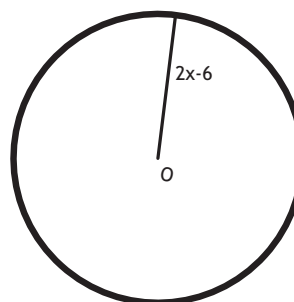
b)



c) Si el perímetro es 8π



d) Si el área es 16π



1. labora un esquema en el que incluyas los modelos para el cálculo del perímetro y área del círculo. La información deberás consultarla con tu docente y compartirla con tus compañeros de clase.
2. Comprueba la siguiente afirmación: “en todo círculo, dos paralelas interceptan arcos congruentes”.



Sesión B: Ángulos en la circunferencia



Desarrollo de saberes

Del saber

- Identifico las características y propiedades de los diversos tipos de ángulos en la circunferencia: Central, Inscrito, Seminscrito, Interior y Exterior.

Del saber hacer

- Distingo los diferentes tipos de segmentos, rectas y ángulos asociados a la circunferencia.
- Utilizo las propiedades de segmentos, ángulos, arcos y rectas ligados a la circunferencia, para establecer sus relaciones y medidas.
- Aplico las propiedades y relaciones de segmentos, ángulos, arcos y rectas en la resolución de problemas.
- Utilizo la imaginación espacial para visualizar circunferencias y sus elementos en objetos y figuras, en dos y tres dimensiones.

Del saber ser

- Valoro la importancia de establecer las relaciones que existen entre ángulos, arcos y segmentos en una circunferencia.
- Actuo de manera propositiva al resolver los ejercicios planteados.
- Promuevo de manera creativa la resolución de sus problemas.



Contextualización

Una vez identificados los segmentos y rectas del círculo, las propiedades y relaciones más importantes, estamos en posición para analizar otro elemento que resulta vital para la solución de problemas. Me refiero a los ángulos que se forman con los segmentos y rectas del círculo.

Para cada ángulo asociado con el círculo, es básico identificar sus elementos, como son el vértice y los lados del mismo, en relación con el círculo. Por ejemplo, si hablamos de los ángulos A y B de la siguiente figura, se observa una diferencia significativa entre los lados y vértice de uno con respecto al otro.

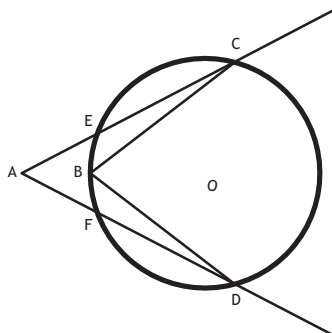


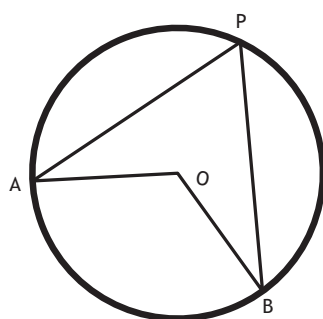
Figura 5.6

Aunque los dos están asociados al mismo arco, los lados de B son cuerdas, a diferencia de los lados de A que son secantes; lo cual, como veremos a lo largo de la sesión, hace que las medidas cambien drásticamente.

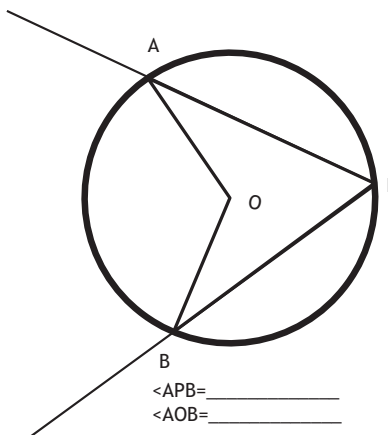


Problematización

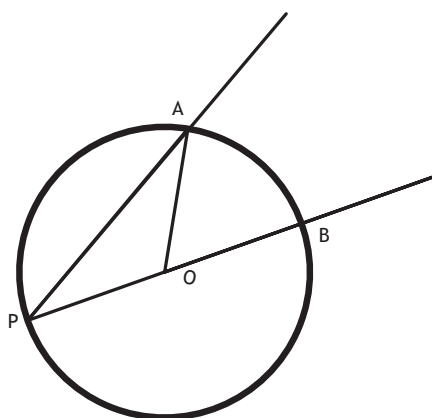
Antes de abordar los postulados relativos a las medidas de los ángulos en el círculo, te propongo la siguiente actividad: con la intención de poseer elementos de observación con respecto a los ángulos; en consenso con tus compañeros y docente, establezcan algunos de los postulados. Reproduce las siguientes figuras en tu libreta con la ayuda de un compás y una regla (esto te permitirá tomar medidas adecuadamente), utiliza un transportador y, en cada una mide el ángulo $\angle APB$ y el ángulo $\angle AOB$ correspondiente y anota las medidas obtenidas, toma en cuenta que O es el centro de la circunferencia.



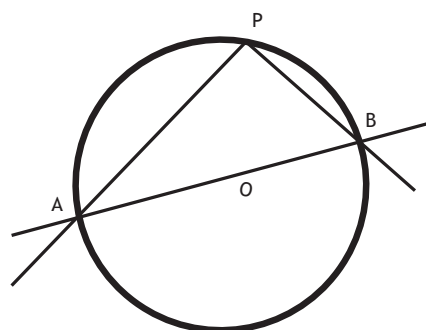
$\angle APB =$ _____
 $\angle AOB =$ _____



$\angle APB =$ _____
 $\angle AOB =$ _____



$\angle APB =$ _____
 $\angle AOB =$ _____



$\angle APB =$ _____
 $\angle AOB =$ _____

Figura 5.7

En plenaria, comenta con tus compañeros lo siguiente:

¿Puedes, a partir de las mediciones, realizar alguna conjetura de las medidas del $\angle APB$ y el $\angle AOB$? ¿Qué tipo de segmento o recta son los lados de cada uno?

Realicen otras gráficas con segmentos diferentes y realicen las mediciones de los ángulos que surjan, para seguir observando las relaciones entre ellos.

Anota tus observaciones en la libreta y compártelas con la clase para establecer el consenso general.





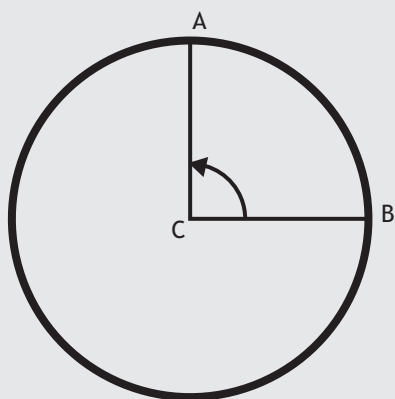
Desarrollo de saberes

Ángulos en la circunferencia

A continuación se presentan los ángulos del círculo que se generan a partir de los segmentos y rectas que se presentaron en la sección anterior. Resulta importante distinguir la ubicación del vértice, qué tipo de segmento son sus lados y por supuesto, el principio que se refiere a la medida de cada uno.

Los principales ángulos son los siguientes:

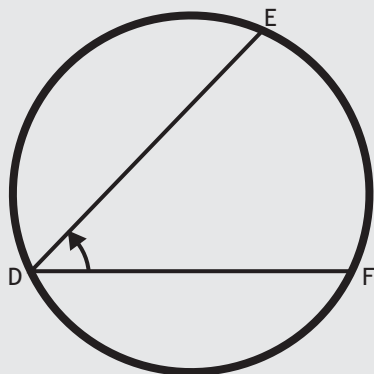
Ángulo central.- Es aquel que tiene su vértice en el centro del círculo y sus lados son radios.



La medida del ángulo central es igual al arco que le corresponde.

$$\angle ACB = \text{arco AB}$$

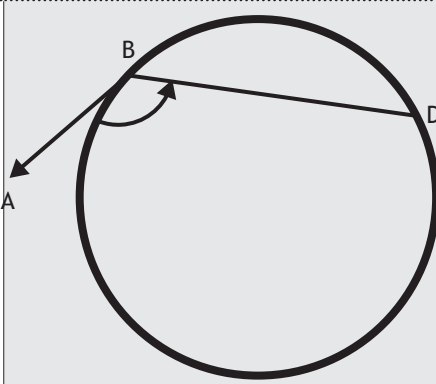
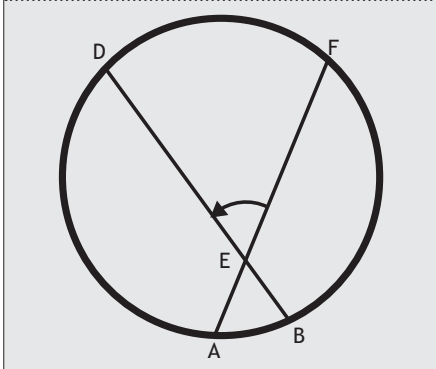
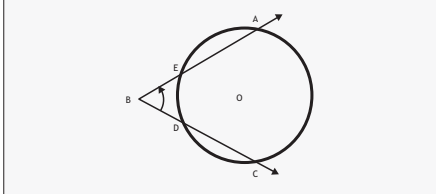
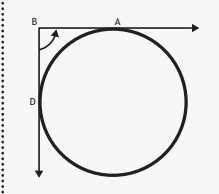
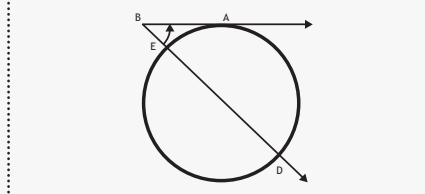
Ángulo inscrito.- Es aquel cuyo vértice es cualquier punto de la circunferencia y sus lados son cuerdas.



La medida del ángulo inscrito es la mitad del arco que le corresponde.

$$\angle EDF = \frac{1}{2} (\text{arco EF}).$$

Ángulo semi-inscrito.- Es aquel cuyo vértice es un punto de tangencia, ya que sus lados son una cuerda y una tangente, o una secante y una tangente.

	La medida del ángulo semi-inscrito es la mitad del arco que le corresponde. $\angle ABD = \frac{1}{2}(\text{ arco DB})$	
Ángulo interior.- Es aquel que se forma cuando dos cuerdas o dos secantes se intersecan en el interior del círculo.		
	La medida del ángulo interior, es igual a la semisuma de sus arcos correspondientes. $\angle DEF = \frac{1}{2} (DF + AB).$	
Ángulo exterior.- Es aquel cuyo vértice está en el exterior del círculo y puede estar formado por:		
Dos secantes	Dos tangentes	Una tangente y una secante
		
$\angle ABD = \frac{1}{2} (AC - DE).$	$\angle ABD = \frac{1}{2} (AD - DA).$	$\angle ABD = \frac{1}{2} (AD - AE).$
La medida del ángulo exterior al círculo es igual a la semidiferencia de sus arcos correspondientes.		



Ejemplo 1

Con los datos que a continuación se proporcionan determina el TKS y el Arco TS

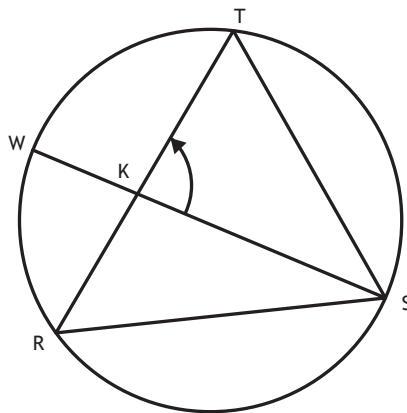


Figura 5.8

Datos:

$\overline{WS}$ es bisectriz del $\angle RST$

Arco RS = 120°

Arco WR = 62°

Afirmación	Justificación
$\angle WSR \cong \angle WST$	$\overline{WS}$ es bisectriz del $\angle RST$
Arco $\overline{WR} \cong$ Arco $\overline{WT}$	Ángulos congruentes cortan arcos congruentes y viceversa
$\angle WT = 62^\circ$	Por definición de bisectriz
Arco WR + Arco WT + Arco RS + Arco TS = 360°	La circunferencia contiene 360°
$62^\circ + 62^\circ + 120^\circ + \text{Arco TS} = 360^\circ$	Sustituyendo
Arco TS = 116°	Despejando
$\angle TKS = \frac{1}{2} (\text{Arco TS} + \text{Arco WR})$	Por ser un ángulo interior
$\angle TKS = \frac{1}{2} (116^\circ + 62^\circ)$	Sustituyendo
$\angle TKS = 89^\circ$	Efectuando operaciones

Ejemplo 2

En la siguiente figura, determina los siguientes ángulos y arcos: EBD, ABE, BAE, BED, Arcos AE, AB y BD.

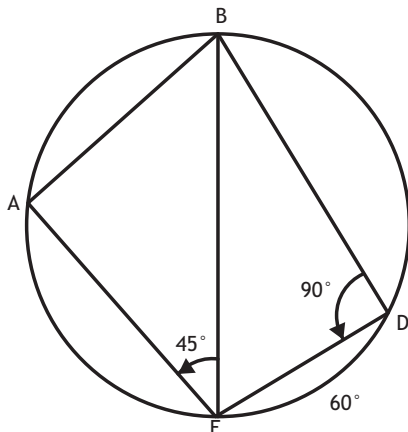


Figura 5.9

Afirmación	Justificación
$\angle EBD = \frac{1}{2} \text{ Arco ED}$	$\angle EBD$ es inscrito y corresponde al Arco ED
$\angle EBD = \frac{1}{2} (60^\circ), \angle EBD = 30^\circ$	Sustituyendo y efectuando operaciones
$\angle BDE = \frac{1}{2} \text{ Arco BAE}$	$\angle BDE$ es inscrito y corresponde al Arco BAE
$90^\circ = \frac{1}{2} \text{ Arco BAE}, \text{ Arco BAE} = 180^\circ$	Sustituyendo, despejando y efectuando operaciones
$\angle AEB = \frac{1}{2} \text{ Arco AB}$	$\angle ABD$ es inscrito y corresponde al Arco AB
$45^\circ = \frac{1}{2} \text{ Arco AB}, \text{ Arco AB} = 90^\circ$	Sustituyendo, despejando y efectuando operaciones
$\text{Arco AB} + \text{Arco AE} = \text{Arco BAE}$	$\angle BDE$ es inscrito y corresponde al Arco BAE
$90^\circ + \text{Arco AE} = 180^\circ, \text{ Arco AE} = 90^\circ$	Sustituyendo, despejando y efectuando operaciones
$\angle ABE = \frac{1}{2} \text{ Arco AE}$	$\angle ABE$ es inscrito y corresponde al Arco AE
$\angle ABE = \frac{1}{2} (90^\circ), \angle ABE = 45^\circ$	Sustituyendo y efectuando operaciones
$\text{Arco BAE} + \text{Arco BDE} = 360^\circ$	Por definición de semicircunferencia
$90^\circ + \text{Arco BDE} = 360^\circ, \text{ Arco BDE} = 180^\circ$	Sustituyendo, despejando y efectuando operaciones

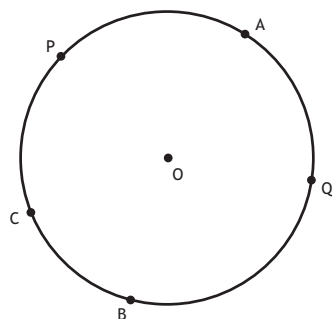
Afirmación	Justificación
$\angle BAE = \frac{1}{2} \text{ Arco BDE}$	$\angle BAE$ es inscrito y corresponde al Arco BDE
$\angle BAE = \frac{1}{2}(180^\circ)$, $\angle BAE = 90^\circ$	Sustituyendo y efectuando operaciones
Arco BD + Arco DE = Arco BDE	Por definición de semicircunferencia
Arco BD + $60^\circ = 180^\circ$, Arco BD = 120°	Sustituyendo, despejando y efectuando operaciones
$\angle BED = \frac{1}{2} \text{ Arco BD}$	$\angle BED$ es inscrito y corresponde al Arco BD
$\angle BED = \frac{1}{2}(120)$, $\angle BED = 60^\circ$	Sustituyendo y efectuando operaciones

Si involucras conocimientos y habilidades para calcular el valor de los ángulos interiores de un triángulo, podrás plantear la situación presentada de otra forma distinta y con algunos pasos menos, seguramente. Te invito a que lo hagas y compartas tu experiencia con la clase.

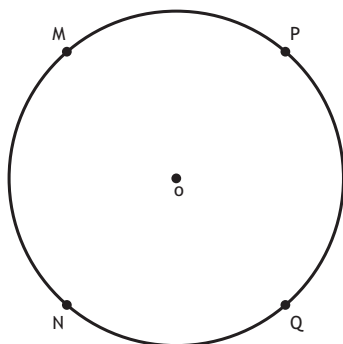
Actividad de aprendizaje 5

Realiza las siguientes actividades para contrastar las ideas desarrolladas en la actividad de medición, con los elementos teóricos relativos a ángulos del círculo

- En la siguiente circunferencia dibuja el segmento AB, la recta AC y el ángulo $\angle POQ$ y responde los cuestionamientos.



- ¿Qué nombre recibe el segmento AB?
 - ¿Qué nombre recibe la recta AC?
 - ¿Qué nombre recibe el ángulo $\angle POQ$?
 - ¿Qué nombre recibe el ángulo que forma la recta AC y la cuerda AB?
 - ¿Qué nombre recibe el ángulo que se formará al trazar el segmento AQ y BP?
- En la siguiente figura, traza los ángulos $\angle MON$, $\angle POQ$, y los segmentos MN y PQ. Encuentra las medidas en grados de los ángulos y encuentra la longitud de los segmentos y compáralas. Con base a todo lo indicado, responde los siguientes cuestionamientos:

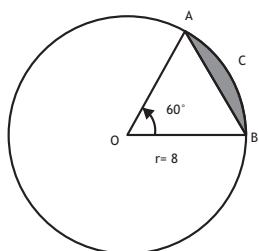


- ¿Qué nombre recibe los ángulos $\angle MON$ y $\angle POQ$?
- ¿Qué podemos decir sobre los resultados que obtuviste de los ángulos $\angle MON$, el $\angle POQ$ y su medida?
- ¿Qué podemos decir de la longitud de los segmentos MN y PQ ?
- ¿Qué relación guarda la medida de los ángulos con la medida de las cuerdas?
- ¿Qué conclusión podemos afirmar con base a todo lo observado?

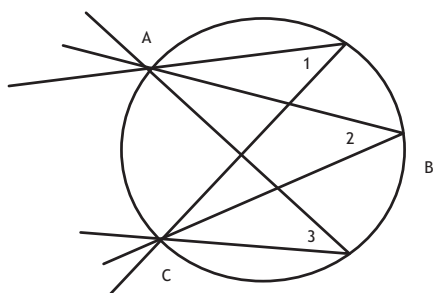
Actividad de aprendizaje 6

Realiza la siguiente actividad en trabajo colaborativo.

- Realiza una investigación bibliográfica o en medios electrónicos, referente a perímetros, áreas del círculo y las figuras que pueden formarse a partir de él; esto es, sectores circulares, segmentos circulares y trapecios circulares y las fórmulas para determinar sus áreas. Con esta información, elabora un esquema en el que incluyas los modelos correspondientes. Comparte con tu clase el esquema elaborado.
- ¿Qué nombre recibe el área sombreada en la siguiente figura? Calcula su área, recuerda la investigación realizada.



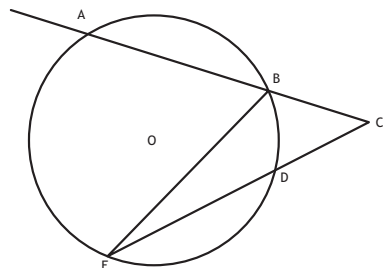
- Los tres ángulos inscritos que a continuación se ilustran, abarcan un mismo arco ABC. Compara las medidas de los tres ángulos midiéndolos en grados con la ayuda del transportador, de ser necesario, reproduce la figura en tu libreta para facilitar el uso del transportador. No olvides compartir con tus compañeros el resultado de las mediciones, es importante para llegar a conclusiones de grupo.



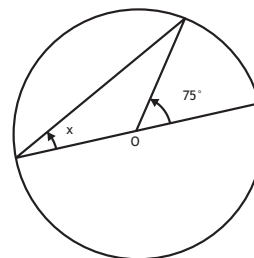
- a) ¿Cuánto mide cada uno de los ángulos?
 b) ¿Qué conclusión puedes afirmar en base a los resultados obtenidos? Enúnciala a manera de una propiedad de los ángulos inscritos en una circunferencia.

4. Determina los valores de las incógnitas que se indican en cada caso:

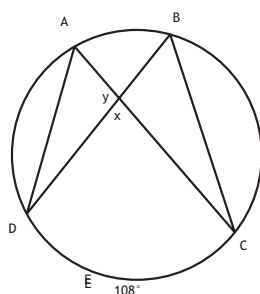
a) Sea el arco $BD = 15^\circ$ y el $\angle ABE = 55^\circ$
 Determina el valor del $\angle BCD$ y el arco AE



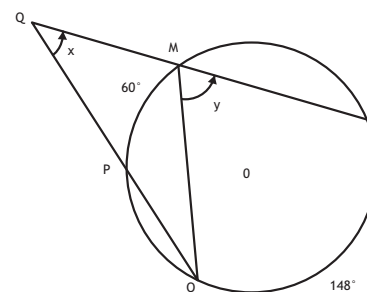
a) Encuentra el valor de x .



a) Encuentra el valor de x , y .

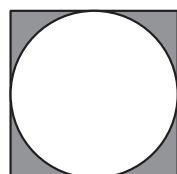


a) Encuentra el valor de x .



5. Determina el valor del área sombreada en las siguientes figuras.

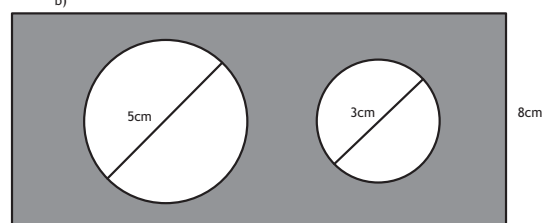
a)



10 cm

Área sombreada= _____

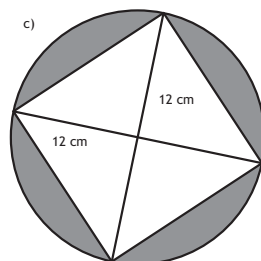
b)



20 cm

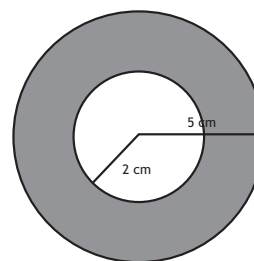
Área sombreada= _____

c)



Área sombreada= _____

d)



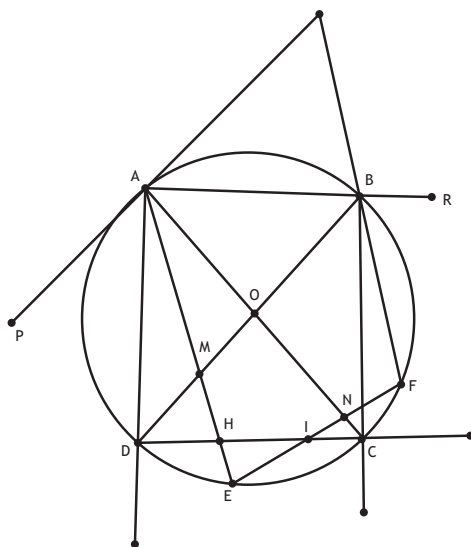
Área sombreada= _____



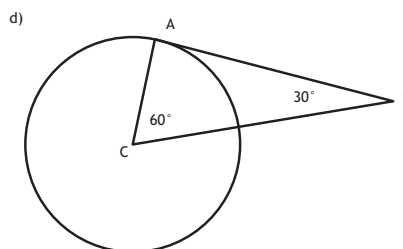
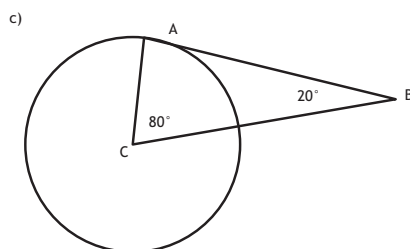
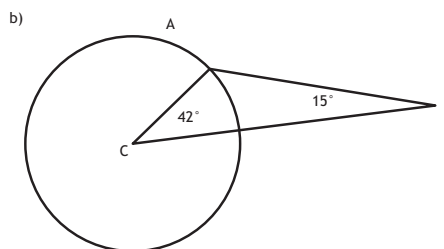
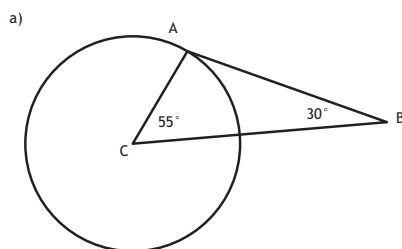
Realimentación

A continuación te propongo los siguientes ejercicios a manera de realimentación o repaso de los temas desarrollados en cada una de las sesiones del bloque V de la asignatura de Matemáticas II. Resuélvelos en tu libreta. Podrás considerarlos como parte de un portafolio de evidencias.

1. Observa la siguiente figura de la circunferencia y contesta correctamente las siguientes preguntas:

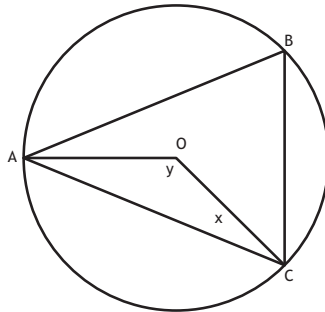


- a) ¿Cuáles son los ángulos inscritos?
 - b) ¿Cuáles son los ángulos semi-inscritos?
 - c) ¿Cuáles son los ángulos centrales?
 - d) ¿Cuáles son los ángulos interiores?
 - e) ¿Cuáles son los ángulos exteriores?
2. ¿En cuál de las siguientes figuras el segmento AB es tangente a la circunferencia?

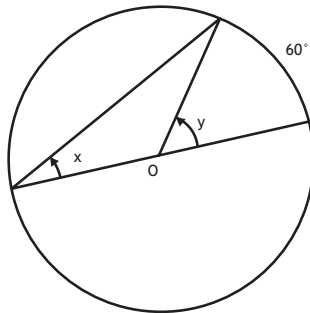


3. Resuelve correctamente lo que a continuación se te indica:

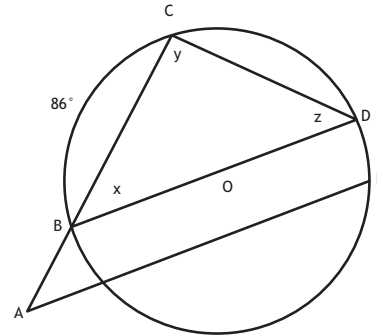
a) Sea el segmento CO bisectriz, el $\triangle ABC$ isósceles y $\angle B$ igual 65° . Calcular los ángulos $\angle A$, $\angle C$, $\angle x$ y el $\angle y$.



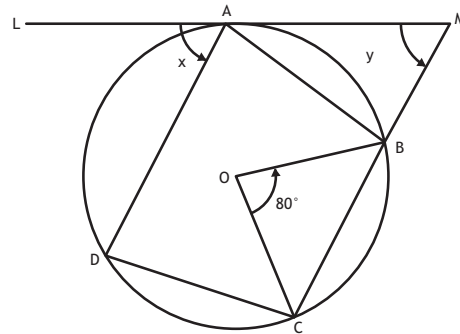
a) Calcular los ángulos $\angle x$, $\angle y$.



a) Sea el segmento BD paralelo a AC . Calcular los ángulos $\angle x$, $\angle y$ y el $\angle z$.



a) Sea el segmento AD paralelo a BC , y el arco AB igual a 85° . Calcular los ángulos $\angle x$ y $\angle y$.

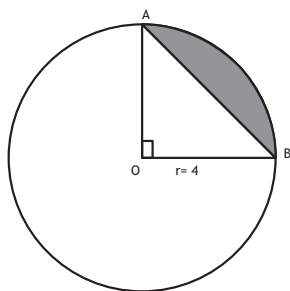


4. Resuelve los siguientes problemas aplicando las fórmulas de áreas y perímetros del círculo y circunferencia.

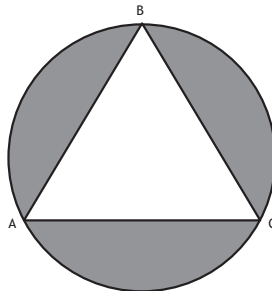
- Calcula la longitud de una circunferencia de 2.5 cm de diámetro.
- Si la longitud de una circunferencia mide 18.8496 m, halla el radio.
- Si la longitud de una circunferencia es 9.4248 m, halla su diámetro.
- Calcular el área de un círculo de 1.5 m de diámetro.
- Un círculo que tiene un área de 12.5664 m^2 , cuál es su radio.
- Un círculo que tiene un área de 25π , cuál es la longitud de la circunferencia.
- Hallar el valor del radio y el área de un círculo dado, si la longitud de la circunferencia es 16π . Calcule su valor en términos de π .
- Hallar el radio y la longitud de la circunferencia de un círculo dado si el área es 25π .

5. Resuelve correctamente lo que a continuación se te indica:

a) Calcula el área de un segmento circular si su ángulo central es recto y el radio mide 4.

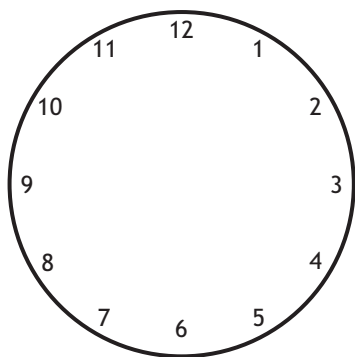


a) Calcula cada segmento circular formado por un triángulo equilátero inscrito, si el radio es igual 8.

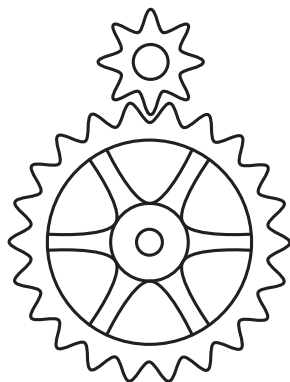


6. A continuación te presentamos algunos ejercicios que pondrán a prueba tus habilidades de razonamiento matemático.

a) Se trata de dividir esta esfera de reloj (véase la figura) en seis partes, de la forma que usted desee, pero haciendo que la suma de los números sea la misma.



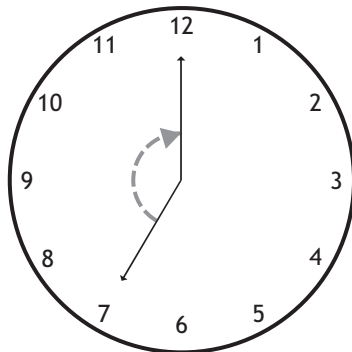
b) Una rueda dentada de 8 dientes está engranado a otra de 24 dientes (véase la figura). Al dar vueltas la rueda grande, la pequeña se mueve por la periferia.



¿Cuántas veces girará la rueda pequeña alrededor de su eje, mientras da una vuelta completa alrededor de la rueda dentada grande?

- | | | | | |
|--------------------|------|------|--------------------|------|
| a) $2 \frac{1}{2}$ | b) 3 | c) 4 | d) $5 \frac{1}{2}$ | e) 6 |
|--------------------|------|------|--------------------|------|

¿Qué medida tiene el ángulo formado por las flechas del reloj de la figura siguiente? Debe resolverse mentalmente, sin utilizar el transportador.



- | | | | | |
|---------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| a) 95° | b) 105° | c) 115° | d) 125° | e) 150° |
|---------------|----------------|----------------|----------------|----------------|

Me comí una rebanada de un pastel redondo que representaba el 15% del pastel, como indica la figura. ¿Cuál es el ángulo que abarca la rebanada del pastel?

INSERTAR FIGURA 3.45

- | | | | | |
|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| a) 15° | b) 36° | c) 45° | d) 54° | e) 60° |
|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|

Se tienen dos círculos con centro en el mismo punto, pero cuyos perímetros difieren un 1 cm. ¿Cuál es la diferencia entre sus radios?

- | | | | | |
|------------------|------------------|-------|-------|-------|
| a) $\frac{1}{2}$ | b) $\frac{1}{4}$ | c) cm | d) cm | e) cm |
|------------------|------------------|-------|-------|-------|

Un círculo cuyo radio mide 1 cm está inscrito en un cuadrado y éste, a su vez, está inscrito en otro círculo, como se muestra en la figura. ¿Cuántos centímetros mide el radio de éste último círculo?

- | | | | | |
|------|---------------|-------------------------|---------------|-------------------------|
| a) 1 | b) $\sqrt{2}$ | c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | d) $\sqrt{3}$ | e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
|------|---------------|-------------------------|---------------|-------------------------|



Evaluación de la competencia

Reúnete en binas y realicen lo siguiente:

En este caso, el proyecto consistirá en crear un modelo didáctico que sirva para comparar y probar que aunque un ángulo central y uno inscrito se asocien al mismo arco AB, la relación de sus medidas es 1:2. La motivación de la actividad es la duda que se presenta en estudiantes de nivel básico, ya que por lo general relacionan la medida de un ángulo con la abertura del mismo.

Incluye también, una prueba formal a fin que el producto pueda presentarse a más de un tipo de audiencia. Además, la intención es que emplees alguna herramienta informática para generar una representación electrónica del modelo.

¡Manos a la obra!

Rúbrica para la evaluación del proyecto

Logro	Nivel de desempeño		
	3	2	1
Habilidades de aplicación de conocimientos	Utiliza adecuadamente las propiedades y relaciones de los segmentos y ángulos en el círculo, para generar el modelo didáctico solicitado.	Utiliza las propiedades y relaciones de los segmentos y ángulos en el círculo, presentando inconsistencias de manejo y comprensión para generar el modelo didáctico solicitado	No utiliza las propiedades y relaciones de los segmentos y ángulos en el círculo para generar el modelo didáctico solicitado, además de presentar inconsistencias en la identificación de los mismos.
Creatividad	Los elementos que presenta en el desarrollo del modelo didáctico, contiene elementos innovadores que muestran claramente la creatividad empleada.	Los elementos que presenta en el desarrollo del modelo didáctico, contiene algunos elementos innovadores que muestran la creatividad empleada.	Los elementos que presenta en el desarrollo del modelo didáctico, no contienen elementos innovadores.
Manejo de tecnologías de información	Representa el modelo didáctico a través del uso de TIC's, resultando complemento del propósito del mismo.	Representa el modelo didáctico a través del uso de TIC's, resultando pertinente para el mismo, aunque no contribuye al propósito del modelo.	Emplea TIC's durante la actividad, pero no logra representar el modelo y las mismas, no contribuyen al propósito del modelo.

Logro	Nivel de desempeño		
	3	2	1
Actitudinal	Aprecia las propiedades y relaciones de los segmentos y ángulos del círculo para elaborar el modelo didáctico, aportando puntos de vista personales y considerando los de otras personas.	Muestra poco aprecio por las propiedades y relaciones de los segmentos y ángulos del círculo para elaborar el modelo didáctico, al igual que muestra pocas aportaciones personales y poca disposición ante los puntos de vista de otras personas.	No aprecia las propiedades y relaciones de los segmentos y ángulos del círculo para elaborar el modelo didáctico, al igual que aporta muy poco en lo personal y no considera los puntos de vista de otras personas.

A continuación recuperamos los criterios de evaluación que te planteamos al inicio del bloque V, para que en un ejercicio de autoevaluación te ubiques en un nivel de dominio de los saberes alcanzados hasta este momento; para ello, es importante incorporar algunos ejercicios de las actividades de aprendizaje desarrolladas a lo largo de las sesiones y conformar un *portafolio de evidencias* o bien, las actividades de la realimentación nos podrán servir para integrar dicho portafolio, debes llegar a un acuerdo con tu facilitador para que te puedas ubicar en algunos de los siguientes niveles de dominio con las actividades de aprendizaje realizadas.

Autoevaluación

Nivel estratégico: Resuelvo problemas diversos utilizando la imaginación espacial para visualizar circunferencias y sus elementos en objetos y figuras en dos y tres dimensiones, aplicando sus propiedades mediante modelos aritméticos, algebraicos y gráficos, en forma razonada.	100%
Nivel autónomo: Utilizo la imaginación espacial para visualizar circunferencias y sus elementos en objetos y figuras, en dos y tres dimensiones, aplicando este conocimiento en la resolución de problemas.	80%
Nivel resolutivo: Aplico las propiedades y relaciones de segmentos, ángulos, arcos y rectas en la resolución de problemas.	60%
Nivel inicial-receptivo: Utilizo las propiedades de segmentos, ángulos, arcos y rectas ligados a la circunferencia, para establecer sus relaciones y medidas.	30%
Nivel pre-formal: Identifico y describo las propiedades y características de los elementos asociados a una circunferencia: Radio, Cuerda, Diámetro, Arco, Tangente, Ángulos: Central, Inscrito, Semi-inscrito, Interior y Exterior	10%



Rúbrica para la evaluación de bloque

Para medir el dominio de los saberes del bloque, necesarios para el desarrollo de las competencias requeridas, se presenta la siguiente rúbrica de evaluación con la intención que midas tus niveles de desempeño y realimentes aquellos en los que presentes alguna proble

Rúbrica para la evaluación del bloque					
Producto, logro o desempeño	Nivel de logro o desempeño				
	5 Estratégico	4 Autónomo	3 Básico	2 Inicial	1 Pre-formal
Conocimientos	Identifico y describo correctamente los elementos asociados con la circunferencia, de manera conceptual y a partir de información contenida en gráficos, para un uso pertinente.	Logro identificar y describir los elementos asociados con la circunferencia, de manera conceptual y a partir de información contenida en gráficos, con algunas inconsistencias.	Logro identificar y describir los elementos asociados con la circunferencia, a partir de su descripción conceptual, pero no de manera visual o gráfica y con inconsistencias.	Logro identificar y describir algunos elementos asociados con la circunferencia.	No logro identificar y describir del todo algunos elementos asociados con la circunferencia.
Habilidades	Resuelvo problemas diversos utilizando la imaginación espacial para visualizar circunferencias y sus elementos en objetos y figuras, en dos y tres dimensiones, aplicando sus propiedades mediante modelos aritméticos, algebraicos y gráficos, en forma razonada.	Aplico las propiedades y relaciones de segmentos, ángulos, arcos y rectas en la resolución de problemas. Utilizo la imaginación espacial para visualizar circunferencias y sus elementos en objetos y figuras, en dos y tres dimensiones, aplicando este conocimiento en la resolución de problemas.	Utilizo la imaginación espacial para visualizar circunferencias y sus elementos en objetos y figuras, en dos y tres dimensiones, aplicando este conocimiento en la resolución de ejercicios.	Utilizo apropiadamente las propiedades de segmentos, ángulos, arcos y rectas, ligados a la circunferencia, para establecer sus relaciones y medidas.	Utilizo las propiedades de segmentos, ángulos, arcos y rectas ligados a la circunferencia, para establecer sus relaciones y medidas, con algunas inconsistencias en la aplicación.

Rúbrica para la evaluación del bloque					
Producto, logro o desempeño	Nivel de logro o desempeño				
	5 Estratégico	4 Autónomo	3 Básico	2 Inicial	1 Pre-formal
Actitudes	Valoro la importancia de establecer las relaciones que existen entre ángulos, arcos y segmentos en una circunferencia. Actuo de manera propositiva al resolver los ejercicios planteados. Promuevo de manera creativa la resolución de problemas, a través del trabajo colaborativo.	Valoro la importancia de establecer las relaciones que existen entre ángulos, arcos y segmentos en una circunferencia y, apporto ideas para resolver los ejercicios planteados, aunque no soy capaz de motivar la participación colaborativa y la creatividad para la resolución de problemas.	Valoro la importancia de establecer las relaciones que existen entre ángulos, arcos y segmentos en una circunferencia y apporto ideas para resolver los ejercicios planteados.	Valoro la importancia de establecer las relaciones que existen entre ángulos, arcos y segmentos en una circunferencia. Pero no soy capaz aún de aportar ideas para resolver los ejercicios planteados.	No valoro la importancia de establecer las relaciones que existen entre ángulos, arcos y segmentos en una circunferencia, lo que refleja una actitud poco o nada propositiva al resolver los ejercicios planteados.



Bloque VI. Relaciones trigonométricas para resolver triángulos rectángulos

Atributos de las competencias genéricas:

- 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
- 5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
- 5.4 Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez.
- 5.6 Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para procesar e interpretar información.
- 6.1 Elige las fuentes de información más relevantes para un propósito específico y discrimina entre ellas de acuerdo a su relevancia y confiabilidad.
- 7.1 Define metas y da seguimiento a sus procesos de construcción de conocimientos.
- 8.1 Propone manera de solucionar un problema y desarrolla un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.
- 8.2 Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.
- 8.3 Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.

Competencias disciplinares básicas

- 1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
- 2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
- 3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
- 4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
- 5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
- 6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
- 7. Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia.
- 8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.



Dinamización y motivación

En el presente Bloque estudiaremos algunos aspectos fundamentales de una rama de las Matemáticas conocida como Trigonometría, la cual estudia las relaciones que se presentan entre los lados y ángulos de un triángulo, y de manera particular las relaciones que se establecen en un triángulo rectángulo. Seguramente ya cuentas con algunas nociones respecto a este tipo de triángulo, en este primer momento recordaremos dos de sus características fundamentales: tiene un ángulo de 90° y en él se cumple que “el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de sus catetos ($c^2 = a^2 + b^2$)” como lo muestra la figura 6.1.

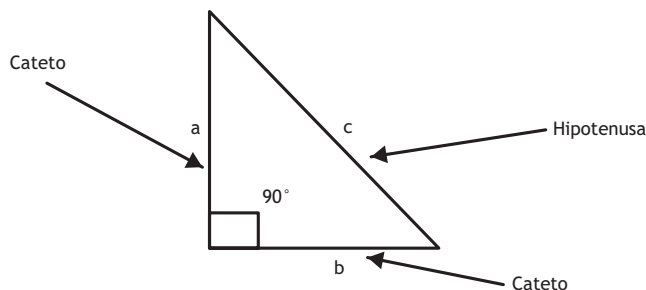
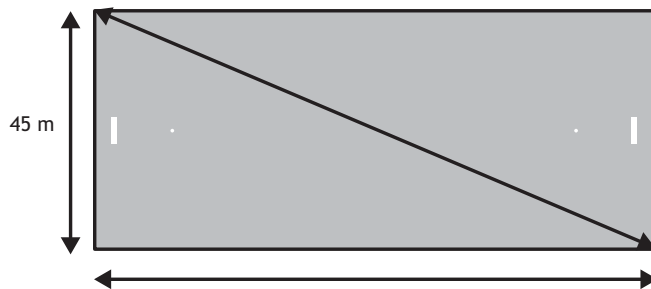


Figura 6.1

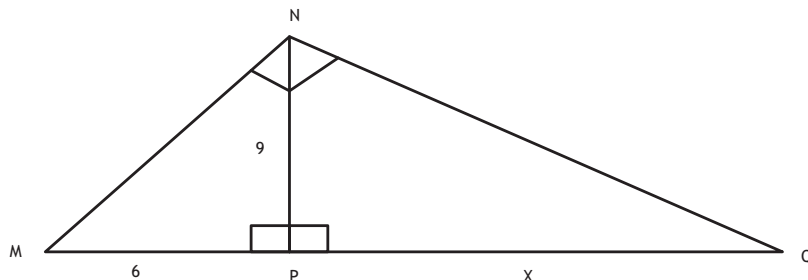
Aprovechando que en diversos cursos te has enfrentado al estudio de este triángulo, a continuación se te proponen situaciones cuyo objetivo es recordar ciertos elementos necesarios para comprender las relaciones que se generan entre los ángulos y lados del triángulo rectángulo y las diversas medidas de sus ángulos para que logres desarrollar una justificación respecto a todo aquello que por intuición sabes y que tiene como trasfondo una base matemática.

Resuelve cada una de las situaciones que a continuación se te plantean.

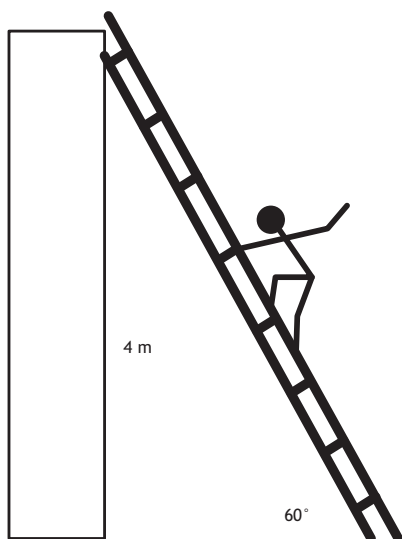
1. Don Gonzalo quiere saber cuál es la superficie de una cancha de fútbol que se encuentra en uno de sus terrenos para poder venderlo a un precio justo. En los planos de la propiedad la cancha de fútbol tiene las dimensiones que se muestran en la siguiente figura. ¿Calcula el área de la cancha?



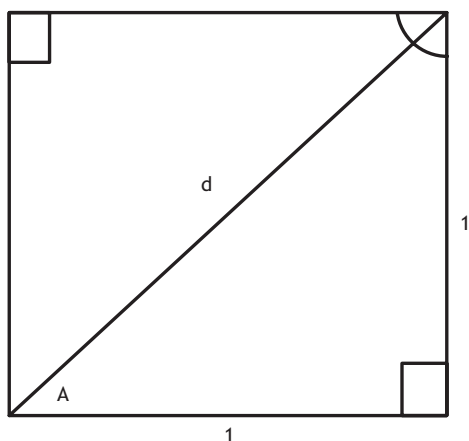
2. En un triángulo rectángulo al trazar la altura sobre la hipotenusa se divide al triángulo en dos triángulos semejantes. Encuentra el valor desconocido en la siguiente figura.



3. Se sabe que el ángulo 120° en otro sistema de medición es $\frac{2\pi}{3}$. En base a la información anterior, ¿qué valor tendrá el ángulo 330° en ese sistema?
4. Arturo quiere saber cuál es la longitud de la escalera que debe utilizar para llegar a la parte más alta del muro de su casa, sabiendo que éste tiene una altura de 4 metros y que el ángulo que forma la escalera con el suelo es de 60° . ¿Cómo puedes ayudar a Arturo a resolver su problema? Observa la siguiente figura que ilustra la situación.



5. En la siguiente figura se presenta un cuadrado al que se le ha trazado una diagonal. Determina el valor de la longitud de su diagonal y la razón trigonométrica $\cos A$.



Autoevaluación

Cada inciso corresponde a la resolución de las situaciones planteadas.

	Pregunta de reflexión	Falso	Verdadero	Argumentación
a)	El ejercicio se resuelve mediante el uso del teorema de Pitágoras.			
b)	La respuesta se consigue utilizando una relación de proporción entre las hipotenusas de los tres triángulos formados.			
c)	La solución del problema se obtiene mediante el uso de la regla de tres.			
d)	Para resolver el problema se utiliza únicamente el teorema de Pitágoras.			
e)	En la solución del problema es necesaria la definición de la razón: "Cateto adyacente entre la hipotenusa del triángulo rectángulo formado por la diagonal del cuadrado".			

Análisis de la actividad

Calificación: 1 Punto por cada respuesta correcta. 1 Punto por una argumentación pertinente.	Subraya el puntaje alcanzado	Significado de los resultados para iniciar el desarrollo de los contenidos del Bloque I del programa
Estratégico	9-10	Identifica, comprende y aplica completamente todas las razones trigonométricas en el momento de la resolución de problemas de aplicación o de situaciones donde se requiera la aplicación de las mismas. Identifica plenamente la relación entre los lados y los ángulos de un triángulo rectángulo y reconoce la importancia de los mismos. Usa su imaginación espacial como herramienta de apoyo para resolver cuestionamientos planteados.
Autónomo	7-8	Identifica plenamente las razones trigonométricas en los diversos problemas de aplicación y los usa para la resolución de los mismos.

Básico	5-6	Tiene nociones sobre algunas relaciones trigonométricas y logra identificarlas en situaciones planteadas.
Inicial-receptivo	2-4	Tiene nociones débiles sobre algunas relaciones trigonométricas y logra identificarlos en situaciones planteadas.
Nivel pre-formal	0-1	No logra reconocer las razones trigonométricas en las situaciones planteadas.

A partir de los resultados obtenidos en la actividad anterior, estamos en condiciones de establecer los objetivos y metas a alcanzar, de acuerdo a las unidades de competencia establecidas, para ello se proponen los siguientes niveles de aprovechamiento, los cuales serán determinados mediante la autoevaluación, coevaluación y la heteroevaluación a lo largo del bloque VI, y a través de las actividades propuestas en las sesiones que abarcan los contenidos del programa de Matemáticas II.

Autoevaluación

Nivel estratégico: Resuelvo completamente problemas utilizando la imaginación espacial para visualizar distintos tipos de razones trigonométricas en diversas figuras aplicando las propiedades y empleando modelos aritméticos, algebraicos y gráficos, en forma razonada.	100%
Nivel autónomo: Aplico las razones trigonométricas seno, coseno y tangente en triángulos rectángulos e identifico y aplico todos los elementos y razones para la resolución de problemas planteados.	80%
Nivel resolutivo: Aplico las razones trigonométricas seno, coseno, tangente y reconozco la mayor parte de los datos que permiten su uso en triángulos rectángulos.	60%
Nivel inicial-receptivo: Distingo algunos de los requerimientos esenciales que existen entre los lados y ángulos de un triángulo, y a partir de la información presentada en figuras realizo pocas inferencias y deducciones sobre el propio dibujo.	30%
Nivel pre-formal: Identifico de manera muy superficial el uso de las razones trigonométricas para resolver problemas en los que interviene el uso del triángulo rectángulo.	10%





Contextualización

Como recordarás, la Trigonometría se encarga del estudio de las relaciones que se establecen entre los lados y ángulos de un triángulo, y en especial del triángulo rectángulo; ahora bien, aunado a tus conocimientos previos profundizaremos en uno de los conceptos más importantes de esta disciplina: **las razones trigonométricas**.

Para lograr dicho objetivo, y a modo de apoyo, retomaremos los términos de **razón** y **proporción** con los que trabajamos en el curso de Matemáticas I, junto con el teorema de Pitágoras y sus propiedades vistos en el bloque III de esta *Guía de Matemáticas II*. A la par de la revisión de estos conceptos, realizaremos actividades que nos permitirán delimitar claramente sus vínculos con las razones trigonométricas. Nuestro propósito es que seas tú quien descubra como los conceptos, ideas y procesos que se definieron antes te permiten construir nuevos conceptos en Trigonometría y lograr la transferencia de tus conocimientos a situaciones en donde se requiera de relacionar ángulos y lados de un triángulo.

Recuerda que el trabajo en equipo es de vital importancia para revisar, comparar y reflexionar los procesos y resultados obtenidos durante las actividades. También deberás entregar los productos solicitados en cada una de las actividades sugeridas, ya que cuentas con una bitácora que te ayudará a ponderar tus conocimientos. Por último, respeta la participación de los compañeros y el tiempo establecido para las sesiones.

Sesión A: Unidades de medición de ángulos



Desarrollo de saberes

Del saber:

- Identifico diferentes unidades de medida de ángulos y describo las diferencias conceptuales entre ellas: angulares y circulares.

Del saber hacer:

- Realizo las conversiones de medidas de ángulos, de grados a radianes y viceversa.

Del saber ser:

- Valoro la importancia de las diferentes medidas de ángulos.
- Actúo de manera propositiva al resolver los ejercicios planteados.



Dinamización y motivación

Como habrás notado, para llegar a resolver las situaciones que anteriormente se te plantearon requieres de emplear el teorema de Pitágoras y de una herramienta que en Trigonometría se conoce como razones trigonométricas, las cuales se definen como las relaciones que se dan entre los ángulos y los lados del triángulo rectángulo. Nos adentraremos a ampliar este concepto y enunciar las propiedades que de él emanen ya que existen situaciones cotidianas en donde su uso es requerido.

Un ejemplo se encuentra en el desarrollo de las mediciones que los arqueólogos han realizado en la pirámide de Kukulcán, en Chichén Itzá. Te preguntarás cómo es que saben con exactitud la altura de la pirámide o el ángulo que forma su sombra. Pues bien, esas

medidas no fueron realizadas con una cinta métrica, sino que fueron empleados métodos matemáticos que nos proporcionan con exactitud dichos valores y uno de esos métodos es la utilización de las relaciones que ya te mencionamos (lados-ángulos). Para explicar claramente este proceso determinemos que el edificio de Kukulcán es una pirámide de cuatro lados que culmina en un templo en la cúspide, se asienta sobre una plataforma cuadrada de 55.5 metros de lado, tiene una altura de 24 metros más 6 metros de templete, con lo que alcanza una altura máxima de 30 metros como lo muestra la figura 6.2. ¿Cuál es la sombra que forma la pirámide si sabemos, por las aportaciones de los investigadores, que el ángulo de inclinación de la pirámide respecto al piso es de $47^\circ 13'$?

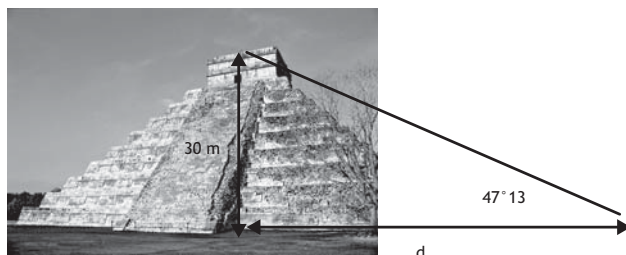


Figura 6.2

Analizando la situación y observando la figura proporcionada, descubrimos que el uso del teorema de Pitágoras no es suficiente para resolver el problema, ya que recordaras que para poder emplearlo necesitamos conocer dos lados del triángulo y en nuestro caso sólo tenemos uno. Sin embargo, nos proporcionan la medida de un ángulo con lo que podemos obtener el dato solicitado mediante la utilización de una razón que relaciona la altura de 30 metros, la sombra y el ángulo. En nuestro ejemplo a esa relación se le define como tangente, la cual equivale a la división del cateto opuesto entre el cateto adyacente, ¿recuerdas cuando lo estudiaste en tu curso de secundaria?, eso quiere decir que nuestra relación queda $\tan 47^\circ 13' = \frac{30}{d}$, y mediante un sencillo despeje nuestra relación se transforma $d = \frac{30}{\tan 47^\circ 13'} = 27.76 \text{ m}$. Ahora puedes observar qué gran utilidad tuvo en la resolución de este problema conocer las razones que se forman en el triángulo. Por este motivo es importante conocer esta forma de medir puesto que de otra manera tendríamos que invertir mucho tiempo y esfuerzo utilizando una cinta métrica.

Pero la resolución de este problema necesitamos conocer los ángulos y sus medidas, debido a que para la determinación de ciertas medidas no es suficiente saber utilizar las relaciones que se establecen entre los lados de un triángulo. En el primer bloque definimos lo que es un ángulo, sus características, clasificaciones y, de manera general, sus medidas. En esta sesión te presentaremos dos de los principales sistemas de medición de ángulos, el angular y el circular, que permiten realizar mediciones a partir de grados y radianes.

Para comenzar a observar estas relaciones, con ayuda de tu semicírculo, mide y contesta lo que se te pregunta en la siguiente actividad.

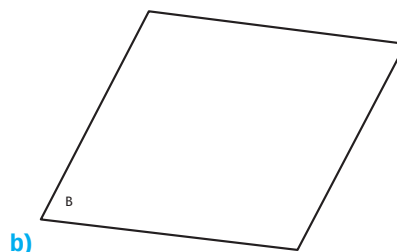
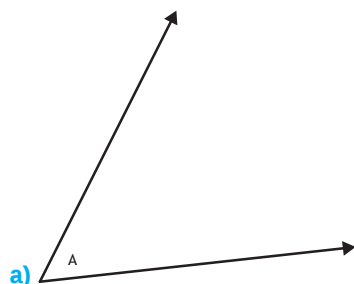




Problematización

Actividad de aprendizaje 1

Mide los ángulos que se te presentan con ayuda de tu semicírculo y contesta las preguntas que se te realizan.



1. ¿Qué valor tiene cada uno de los ángulos señalados en ambas figuras?
2. ¿Qué unidad de medida utilizaste en los ángulos que acabas de medir?
3. ¿Qué características o elementos importantes observaste al momento de usar tu semicírculo en la medición de los ángulos?
4. ¿Puedes decir que al medir tus ángulos, alguno de ellos tuvo valores enteros y fraccionados?

Medida angular

Para realizar cualquier medición debemos de tener una **unidad de medida** que sirva como referente o patrón de medida. En el caso de los ángulos, en primer lugar veremos aquel con el que has trabajado ya de manera intuitiva y que utiliza al **grado** como su unidad de medida: “la medida angular o el sistema de medición sexagesimal”.

El grado se define como el ángulo central de un círculo al que corresponde un arco que representa una trescientos sesentava parte de la circunferencia, es decir, un grado es un ángulo de los 360 ángulos centrales en que se divide a la circunferencia y se simboliza con ($^{\circ}$). A su vez, el grado se divide en 60 partes iguales, cada una llamada **minuto** y que se simboliza ($'$). Por su parte el minuto se divide en sesenta partes iguales, cada una llamada **segundo** y que se simboliza ($''$). En la figura 6.3 se ejemplifica nuestra definición.

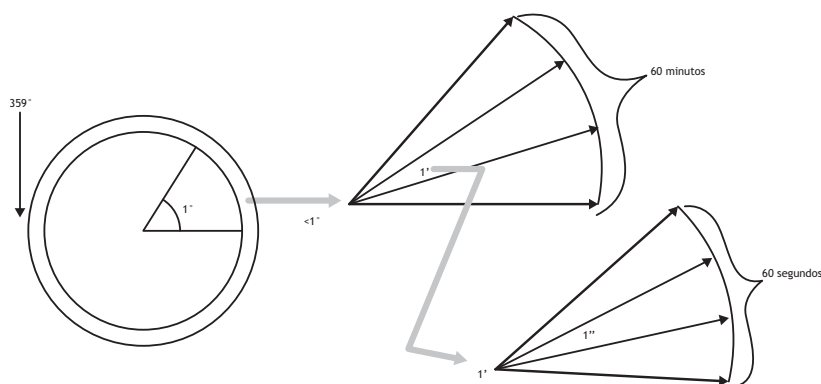


Figura 6.3

De esta forma tenemos que:

$1^\circ = 60'$ minutos. Se lee: un grado equivale a sesenta minutos.

$1' = 60''$ segundos. Se lee: un minuto es igual a sesenta segundos.

Ejemplo:

Escribe la equivalencia que correspondan a los siguientes ángulos:

1. $45^\circ 67' 70''$

Solución:

Observamos que $70''$ equivale a $1'$ y $10''$, por lo que como primer paso tendremos que nuestro ángulo se transforma: $45^\circ 68' 10''$.

Por otra parte $68'$ equivale a 1° y $8'$, por lo que como segundo paso tendremos que nuestro ángulo se transforma: $46^\circ 8' 10''$

Respuesta = El ángulo $45^\circ 67' 70''$ equivale a **$46^\circ 8' 10''$**

2. $\frac{1}{2}(32^\circ 21')$

Solución:

Como nos indica el ejercicio, nuestro ángulo está siendo dividido en 2 partes iguales, por lo tanto nuestro ángulo se transforma en $16^\circ 10.5'$ y como 0.5 es medio minuto, tenemos entonces que nuestro ángulo queda transformado: $16^\circ 10' 30''$

Respuesta = $\frac{1}{2}(32^\circ 21')$ equivale a **$16^\circ 10' 30''$**

Actividad de aprendizaje 2

Escribe la equivalencia de cada uno de los siguientes ángulos:

1. $68^\circ 66' 90''$
2. $100^\circ 58' 123''$
3. $\frac{1}{3}(123^\circ 66' 21'')$
4. $2(14^\circ 32' 40'')$
5. $\frac{3}{4}(12^\circ 6' 24'')$



Medida circular

La segunda unidad empleada es el radián, que pertenece al sistema de medición circular. Por definición se tiene que:

Un radián (rad) es la medida de un ángulo con vértice en el centro de un círculo y cuyos lados interceptan un arco de circunferencia de longitud igual al radio, como lo muestra la figura 6.4.

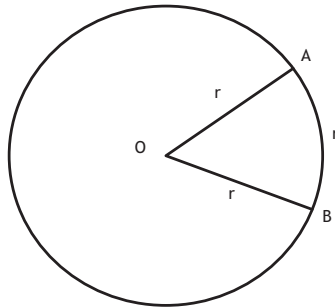


Figura 6.4

En la figura se tiene que el $\angle AOB = 1$ radián. A partir de lo anterior tenemos el siguiente razonamiento:

- La longitud del perímetro (circunferencia) en el círculo está dado por 2π y por consiguiente le corresponde un arco de 360° , por lo que un ángulo de 360° equivale 2π radianes, es decir, a 6.28, tomando $\pi=3.14$.
- Se tiene que 2 radianes $= 360^\circ$, por la definición de radián
- Así tenemos que $1 \text{ radián} = \frac{180^\circ}{\pi} = 57^\circ 17' 45''$
- Además utilizaremos $\pi = 180^\circ$, una equivalencia que será cotidiana en el estudio de la Trigonometría.

Equivalencia entre los grados y los radianes importantes:

$$\frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

$$\frac{\pi}{2} = 90^\circ$$

$$\pi = 180^\circ$$

$$2\pi = 360^\circ$$

Conversión de radianes a grado y viceversa

Recordemos que el factor de conversión de radianes a ángulo es $\frac{180^\circ}{\pi}$

Ejemplo 1:

Convierte el radián 3.3456 a ángulo.

Solución:

Multiplicando el radián por el factor de conversión tenemos que:

$$(3.3456) \left(\frac{180^\circ}{\pi} \right) = 191.69^\circ$$

Poniendo el ángulo ya transformado utilizando grados, minutos y segundos, nuestro ángulo se transforma en:

$$191^\circ + (0.69)(60') = 191^\circ 41'$$

$$\text{Respuesta: } 3.3456 = 191^\circ 41'$$

Ejemplo 2:

Convierte el radián $\frac{\pi}{3}$ a ángulo

Solución:

Multiplicando el radián por el factor de conversión tendremos que:

$$\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(\frac{180^\circ}{\pi}\right) = \left(\frac{180\pi}{3\pi}\right) = \frac{180}{3} = 60^\circ$$

$$\text{Respuesta: } \frac{\pi}{3} = 60^\circ$$

Ejemplo 3:

Convierte el ángulo 135° a radianes

Solución:

En éste tipo de conversión nuestro factor de conversión es $\frac{\pi}{180^\circ}$, tenemos entonces que si multiplicamos el ángulo dado con el factor de conversión obtenemos:

$$135^\circ \left(\frac{\pi}{180^\circ}\right) = \frac{3\pi}{4}$$

$$\text{Respuesta: } 135^\circ = \frac{3\pi}{4}$$

Actividad de aprendizaje 3

1. Transforma los siguientes ángulos a radianes

315°	48° 15'	78.24°	150°	300°
------	---------	--------	------	------

Transforma los siguientes radianes a ángulos.

0.8785	2.1214	5.5965	$\frac{2\pi}{9}$	$\frac{11\pi}{12}$
--------	--------	--------	------------------	--------------------

Calcula el complemento y suplemento de los ángulos que a continuación se te presentan

34° 56' 34"	$\frac{3\pi}{4}$	67° 15'	$\frac{\pi}{6}$	
-------------	------------------	---------	-----------------	--



Sean $A = 30^\circ$, $B = 54^\circ 50'$ y $C = 76^\circ 20' 30''$, calcula:

$2A + B$	$3C - B$	$5A + B + C$	$A - C + B$
----------	----------	--------------	-------------

Sesión B: Funciones trigonométricas



Desarrollo de saberes

Del saber:

- Identifico diferentes unidades de medida de ángulos y describe las diferencias conceptuales entre ellas: angulares y circulares.
- Defino y describo las funciones trigonométricas directas y recíprocas de ángulos agudos.
- Caracterizo los valores de las funciones trigonométricas para 30° , 45° y 60° y en general para múltiplos de 15° , utilizando triángulos.

Del saber hacer:

- Obtengo los valores de las funciones trigonométricas empleando tablas o calculadoras para ángulos entre 0° y 90° .
- Obtengo los valores de las funciones trigonométricas para ángulos de 30° , 45° , 60° y múltiplos de 15° sin ayuda de la calculadora o tablas matemáticas.
- Utilizo las funciones trigonométricas directas y recíprocas para la resolución de triángulos rectángulos.

Del saber ser

- Valoro la importancia de las funciones trigonométricas.
- Actúo de manera propositiva al resolver los ejercicios planteados.



Dinamización y motivación

Como lo mencionamos anteriormente, existen diversas razones que se obtienen al relacionar los lados y ángulos en los triángulos. Ya hemos abordado algunas relaciones que permiten encontrar la medida de diversos ángulos en un triángulo a partir de las medidas de los lados; ahora ampliaremos y conoceremos otras herramientas útiles para resolver problemas como el del inicio de la Sesión A, en el que determinamos la longitud de la sombra de la pirámide de Kukulcán. Quizás habrás tenido algunas dificultades en resolverlo, pero estoy seguro que tu habilidad, ingenio y conocimiento intuitivo de las razones te condujo a la solución del problema. Recuerda que la única herramienta que tenías a la mano para poder encontrar los valores desconocidos de lados de un triángulo rectángulo era el **teorema de Pitágoras** en el que no relacionabas los ángulos del triángulo.

El estudio de las relaciones de lados y ángulos de un triángulo es de suma importancia debido a que facilita el cálculo de una distancia, longitud o medida, la ubicación y orientación de un punto en el espacio o la ubicación de ángulos en triángulos.

A lo largo de la historia, se han desarrollado diversas teorías sobre la aplicación de las razones trigonométricas y de cómo podemos estudiarlas para que sean una herramienta útil para el entorno cotidiano.

A continuación realiza la siguiente actividad para comenzar tu análisis de las funciones trigonométricas. De modo general te hablamos de triángulos, pero nos evocaremos a trabajar de manera particular con el triángulo rectángulo, ya que de éste se obtienen las razones.



Problemática

Actividad de aprendizaje 4

En cada una de las siguientes situaciones planteadas, encuentra como primer elemento los valores desconocidos para resolver los cuestionamientos que se te realizan.

	Encontrar: La hipotenusa $c =$ _____
¿Cuál es el valor de la razón que se forma con los dos catetos?	
¿Cuál es el valor de la razón que se forma con el cateto y la hipotenusa?	
	Encontrar: La hipotenusa $r =$ _____
¿Cuál es el valor de la razón que se forma con los dos catetos?	
¿Cuál es el valor de la razón que se forma con el cateto y la hipotenusa?	

En base a los dos resultados anteriores y bajo un análisis, responde los últimos cuestionamientos:



1. ¿Qué puedes comentar sobre el valor de la razón entre los catetos del primer y segundo triángulo rectángulo?

2. ¿Qué puedes comentar sobre el valor de la razón entre el cateto y la hipotenusa del primer y segundo triángulo rectángulo?

3. En base a lo observado y analizado, ¿qué sucederá si el cateto del triángulo rectángulo isósceles fuese 8)

4. Si seguimos cambiando el valor del cateto de nuestro triángulo, ¿qué resultado obtendremos si deseamos saber la razón entre cateto-cateto y cateto-hipotenusa?

Funciones trigonométricas de un ángulo agudo

Antes de explicar las características de estas razones, es necesario hacer un señalamiento relacionado con la actividad anterior:

Si observas cuidadosamente en la figura 6.5 se te presenta un triángulo rectángulo y en ella podemos identificar 6 razones que se pueden establecer entre sus lados, siendo éstas:

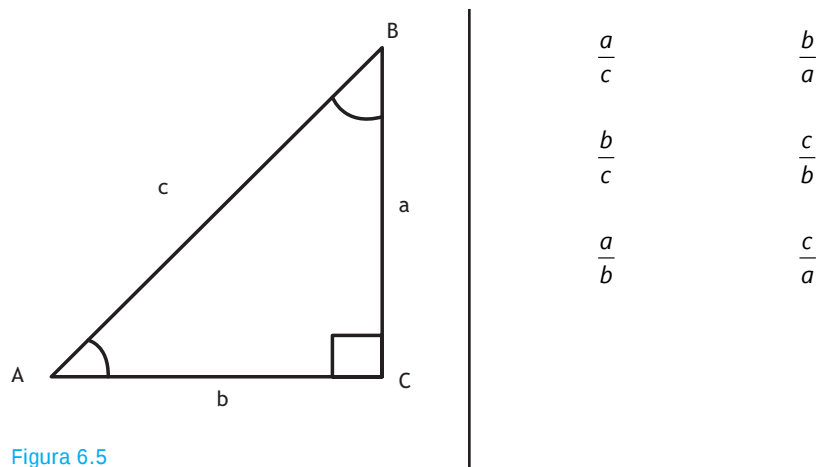


Figura 6.5

Según tus respuestas de la Actividad de aprendizaje 4 se puede concluir: “Las razones que establecemos, dependen del valor del ángulo y no de las medidas de los lados del triángulo”. En la figura 6.6 se muestra un triángulo rectángulo al que le fue trazado al cateto BC una recta paralela que origina dos triángulos semejantes. Por consiguiente sus lados son proporcionales, entonces se cumple:

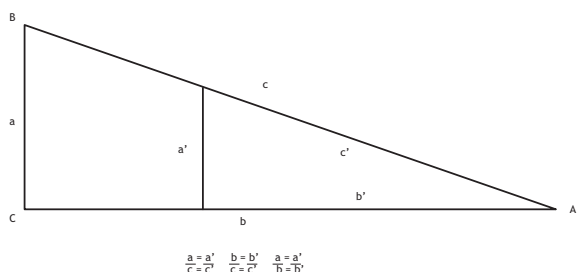


Figura 6.6

Este mismo suceso ocurre si comparamos las demás razones de ambos triángulos rectángulos. Luego las razones se establecen de manera única para el valor del ángulo A, por lo que afirmamos que esas razones son respecto del ángulo A.

De esta manera hemos establecido seis relaciones elementales entre el ángulo A del triángulo rectángulo ABC y sus lados. A estas relaciones se les conoce como razones trigonométricas: seno (sen), coseno (cos), tangente (tan), cotangente (cot), secante (sec) y cosecante (csc) que se definen y representan de la siguiente manera:

1. El seno de un ángulo es la relación entre el cateto opuesto y la hipotenusa.

$$\text{sen A} = \frac{a}{c} \quad \text{sen B} = \frac{b}{c}$$

2. El coseno de un ángulo es la relación entre el cateto adyacente y la hipotenusa.

$$\text{cos A} = \frac{b}{c} \quad \text{cos B} = \frac{a}{c}$$

3. La tangente de un ángulo es la relación entre el cateto opuesto y el cateto adyacente.

$$\text{tan A} = \frac{a}{b} \quad \text{tan B} = \frac{b}{a}$$

4. La cotangente de un ángulo es la relación entre el cateto adyacente y el cateto opuesto.

$$\text{cot A} = \frac{b}{a} \quad \text{cot B} = \frac{a}{b}$$

5. La secante de un ángulo es la relación entre la hipotenusa y el cateto adyacente.

$$\text{sec A} = \frac{c}{b} \quad \text{sec B} = \frac{c}{a}$$

6. La cosecante de un ángulo es la relación entre la hipotenusa y el cateto opuesto.

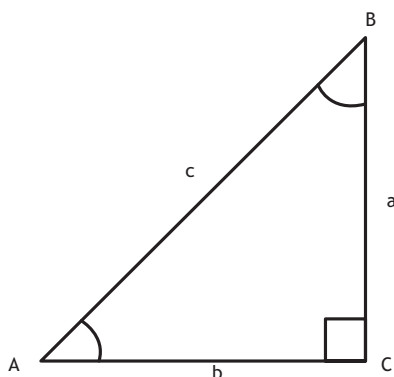
$$\text{csc A} = \frac{c}{a} \quad \text{csc B} = \frac{c}{b}$$

Es necesario que puntualicemos algunas observaciones de vital importancia al momento trabajar o usar cualquiera de estas razones:

- Estas relaciones, al igual que el teorema de Pitágoras, son válidas para triángulos rectángulos, debido a la naturaleza de los lados, los grados del mismo y a las afirmaciones realizadas para llegar a la definición de cada razón. A partir de las razones se puede observar que los lados están en relación con el ángulo del triángulo,

lo que nos permitirá determinar el valor de dichos lados derivado de alguna de las razones establecidas.

- El lado de mayor longitud en el triángulo rectángulo se le denomina **hipotenusa** y a los otros dos se les conoce como **catetos**. Cuando los catetos se asocian con alguno de los ángulos agudos del triángulo rectángulo pueden clasificarse como **adyacentes** al ángulo u **opuestos** a él. Observa la figura 6.7 para que verifiques lo mencionado.



Observando los lados y los ángulos del triángulo:

- 1.** **a** es el cateto opuesto al $\angle A$
- 2.** **b** es el cateto adyacente al $\angle A$
- 3.** **b** es el cateto opuesto al $\angle B$
- 4.** **a** es el cateto adyacente al $\angle B$
- 5.** **c** es la hipotenusa

Figura 6.7

- Observa la figura 6.8, a partir de las definiciones de las 6 razones trigonométricas, es importante notar que para el ángulo B, complementario al ángulo A se tiene que:

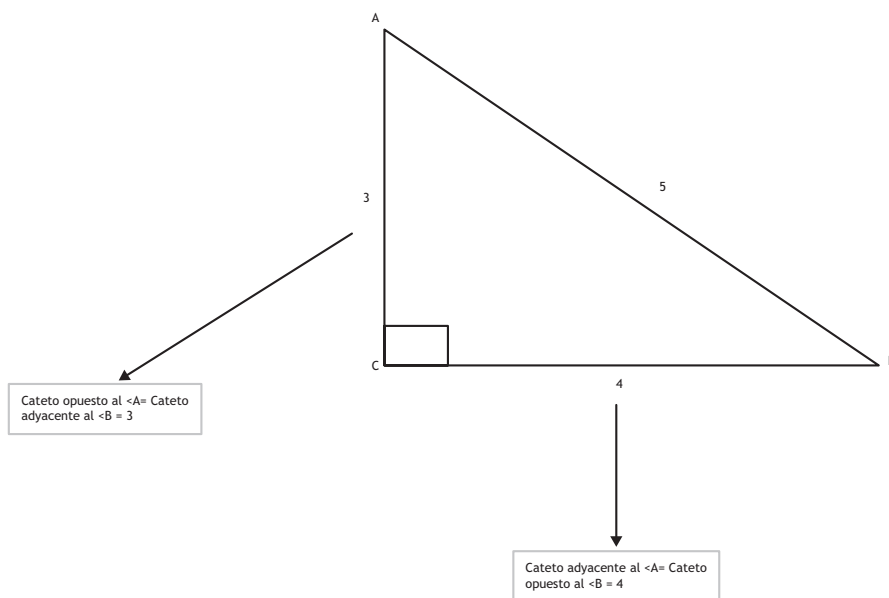


Figura 6.8

De aquí se desprende que, siendo A y B complementarios, se tiene que:

$\text{sen } A = \cos B$	$\text{tan } A = \cot B$	$\text{sec } A = \csc B$
--------------------------	--------------------------	--------------------------

A las relaciones anteriores se les conoce como *co-funciones de ángulos complementarios*

Ejemplo:

Tomando como referencia la figura 6.8, encuentra el valor de las 6 razones trigonométricas tomando como referencia:

a) $\angle A$

b) $\angle B$

Solución:

Siguiendo la definición de cada una de ellas, nuestras 6 razones son:

a) Con respecto al $\angle A$

$$\text{sen } A = \frac{4}{5} \quad \cot A = \frac{3}{4}$$

$$\cos A = \frac{3}{5} \quad \sec A = \frac{5}{3}$$

$$\tan A = \frac{4}{3} \quad \csc A = \frac{5}{4}$$

b) Con respecto al $\angle B$

$$\text{sen } B = \frac{3}{5} \quad \cot B = \frac{4}{3}$$

$$\cos B = \frac{4}{5} \quad \sec B = \frac{5}{4}$$

$$\tan B = \frac{3}{4} \quad \csc B = \frac{5}{3}$$

Al definir las 6 razones trigonométricas en el ejemplo, podemos observar que algunas guardan una relación con otras, por ejemplo el $\text{sen } A$ y $\csc A$, $\cos A$ y $\sec A$, así $\tan A$ y $\cot A$. ¿Descubriste a que me refiero?, la relación a la que hago referencia es la siguiente:

Dos cantidades son recíprocas cuando su producto es igual a la unidad, por lo tanto concluimos que:

$$(\text{sen } A)(\csc A) = \frac{4}{5} \times \frac{5}{4} = 1 \quad (\cos A)(\sec A) = \frac{3}{5} \times \frac{5}{3} = 1 \quad (\tan A)(\cot A) = \frac{4}{3} \times \frac{3}{4} = 1$$

De donde, para un ángulo agudo cualquiera, tendremos que:

$$\text{sen } A = \frac{1}{\csc A}; \quad \csc A = \frac{1}{\text{sen } A}$$

$$\cos A = \frac{1}{\sec A}; \quad \sec A = \frac{1}{\cos A}$$

$$\tan A = \frac{1}{\cot A}; \quad \cot A = \frac{1}{\tan A}$$

A estas relaciones se les conoce como **razones trigonométricas recíprocas**, las cuales nos permitirán hacer el cálculo de las tres primeras seno, coseno y tangente denominadas **directas** y a partir de ellas determinar el valor de las otras tres.



Ejemplo:

Dado que la $\sec A = 2$, calcula las demás razones trigonométricas.

Solución:

Para resolver el problema utilizaremos tres herramientas importantes: la definición de la razón secante, el teorema de Pitágoras y las relaciones recíprocas.

$$\sec A = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{2}{1}$$

La definición de $\sec A = \frac{2}{1}$, esto implica que ya conocemos la hipotenusa y el cateto adyacente de un triángulo rectángulo cuyo ángulo de referencia es A, como se muestra en la figura 6.9.

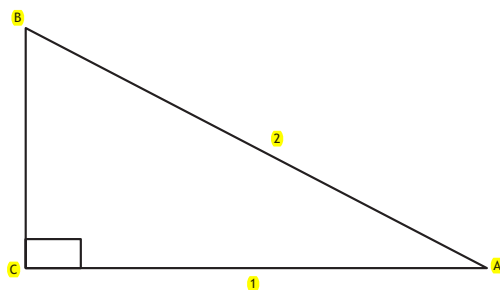


Figura 6.9

Para definir las 6 razones trigonométricas es necesario encontrar el lado que falta en el triángulo rectángulo, que en nuestro ejercicio es el cateto opuesto al ángulo A, para ello recurrimos al teorema de Pitágoras. Si llamamos al lado faltante “a”, entonces tenemos que:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 2^2 = a^2 + 1^2 \Rightarrow 4 = a^2 + 1 \Rightarrow a^2 = 4 - 1 \Rightarrow a = \sqrt{3}$$

Por la definición de las razones trigonométricas y la reciprocidad que mencionamos anteriormente, tenemos que:

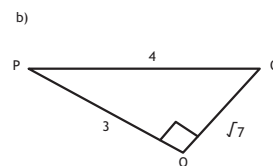
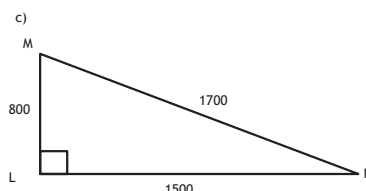
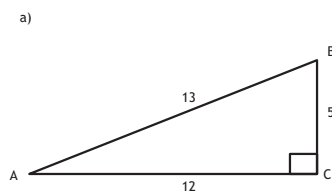
$$\begin{aligned} \sec A &= \frac{2}{1} \Rightarrow \cos A = \frac{1}{2} \\ \operatorname{sen} A &= \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \csc A = \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \tan A &= \frac{\sqrt{3}}{1} \Rightarrow \cot A = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Como puedes observar, la reciprocidad es de gran utilidad, ya que permiten resolver de forma más sencilla y rápida del problema en cuestión.

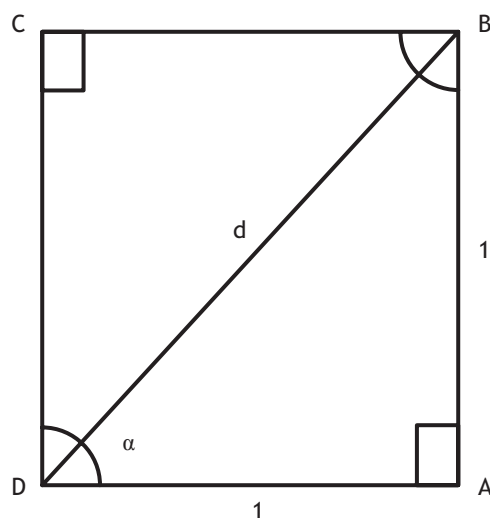
Actividad de aprendizaje 5

Resuelve cada uno de los siguientes ejercicios propuestos en tu libreta.

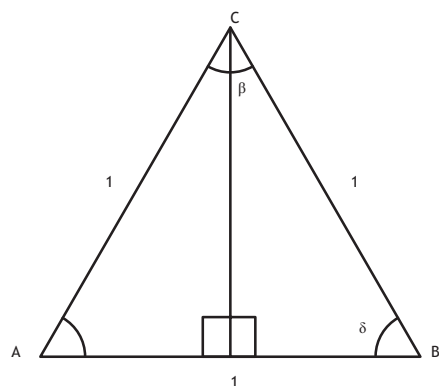
- Determina las razones trigonométricas directas y recíprocas para cada uno de los siguientes triángulos rectángulos.



2. Si la $\tan A = 1.5$, determina el valor de todas las razones trigonométricas.
3. Si la $\csc A = \frac{5}{3}$, determina el valor de todas las razones trigonométricas.
4. A partir de la siguiente figura resuelve en equipo las cuestiones y ejercicios planteados.



- a) Determina el valor de la diagonal (d) del cuadrado $ABCD$ de lado igual a la unidad.
 - b) Determina todas las funciones trigonométricas en base al $\angle ADB = \alpha$, con los datos del triángulo formado.
 - c) Determina el valor del $\angle ADB = \alpha$
5. A partir de la siguiente figura resuelve en equipo las cuestiones y ejercicios planteados.



- a) Determina el valor de la altura (h) sobre la base del triángulo equilátero ABC de lado igual a la unidad.
- b) Determina todas las funciones trigonométricas en base al $\angle \beta$ y con los datos obtenidos.
- c) Determina todas las funciones trigonométricas en base al $\angle \delta$ y con los datos obtenidos.
- d) Determina el valor del $\angle \beta$ y del $\angle \delta$.

Nota: Los ejercicios 4 y 5 de la actividad anterior corresponden a un tema especial que en Trigonometría llamamos “Razones trigonométricas de triángulos notables” donde los ángulos notables son 30° , 45° y 60° . Estos ángulos son importantes en la resolución de situaciones y problemas trigonométricos, sobre todo en los casos en los que no se cuenta con una calculadora científica.

De razones a funciones

Hemos establecido las razones trigonométricas para cualquiera de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo como el valor de una razón formada por los lados del mismo, que no depende del valor de los lados sino del propio ángulo de referencia.

Lo anterior puede resumirse de la siguiente manera: “El valor de cada razón trigonométrica es un valor único que le corresponde al ángulo agudo en cuestión”, por lo tanto podemos decir que las razones trigonométricas son correspondencias únicas entre el valor del ángulo y la razón entre los lados del triángulo.

Apartir del argumento anterior, las razones trigonométricas se definen como funciones trigonométricas, que asocian el valor del ángulo de un triángulo rectángulo con los correspondientes valores reales de las razones trigonométricas.

Es importante que centres tu atención en lo anterior, ya que las funciones trabajan sobre un ángulo y lo relaciona con un número real:

Ángulo	Función	Número real
45°	Seno	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

Los valores de las funciones trigonométricas para cada ángulo pueden obtenerse a partir de un triángulo rectángulo. Algunos de estos cálculos se analizarán a continuación, mientras que otros se pueden obtener con la ayuda de tablas trigonométricas y calculadoras científicas.

Ejemplo:

Determina el valor de las funciones trigonométricas directas, para el ángulo de $40^\circ 30'$ utilizando la calculadora.

Solución:

Realicemos una secuencia de pasos en tu calculadora científica para el cálculo de la función seno, entonces teclea:



Haciendo un proceso similar para el cálculo de coseno y tangente, tendremos $\cos 40^\circ 30' = 0.7604$ y $\tan 40^\circ 30' = 0.8540$

Actividad de aprendizaje 6

- Reúnete en equipo con tus compañeros de clase y resuelvan los siguientes ejercicios en la libreta. Encuentra el elemento que se indica en cada caso utilizando calculadora o tablas.
 - Si $\sin A = 0.2345$, encuentra $\angle A$
 - Si $\tan B = 1.73$, encuentra $\angle B$
 - Si $\cos M = 0.3435$, encuentra $\angle M$
- Utilizando la calculadora obtén el valor de las funciones trigonométricas para el ángulo que se indica. Redondea el resultado a cuatro cifras decimales.

Ángulo α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$	$\cot \alpha$	$\sec \alpha$	$\csc \alpha$
84°						
65°						
$30^\circ 45'$						
$58^\circ 42'$						
$75^\circ 51' 36''$						
$53^\circ 28' 30''$						

- Determina el valor de las siguientes expresiones, sin la ayuda de la calculadora o alguna tabla.

$\frac{\sin 45^\circ + \cos 45^\circ}{\sin^2 60^\circ}$	$\frac{\cos 30^\circ + \sin 30^\circ}{\cos 45^\circ}$	$\frac{\tan 30^\circ - \tan 60^\circ}{1 + \tan 30^\circ \tan 60^\circ}$
$2\sin 70^\circ + 3\cos 20^\circ - \frac{1}{\csc 70^\circ}$	$\frac{4\tan 35^\circ - 3\cot 55^\circ}{\cot 60^\circ}$	$\frac{\sec 30^\circ + 2\csc 60^\circ}{1 - \cot 45^\circ \cot 60^\circ}$

Determina los valores de las razones trigonométricas de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo si:

- $\tan A = \frac{1}{2}$
- $\cos A = \frac{3x}{2}$
- $\tan A = \frac{m+n}{m-n}$



Sesión C: Resolución de triángulos rectángulos y sus aplicaciones



Desarrollo de saberes

Del saber

- Identifico diferentes unidades de medidas de ángulos y describe las diferencias conceptuales entre ellas: angulares y circulares.
- Defino y describo las funciones trigonométricas directas y recíprocas de ángulos agudos.
- Caracterizo los valores de las funciones trigonométricas para 30° , 45° , 60° y en general múltiplos de 15° grados, utilizando triángulos.

Del saber hacer

- Realizo conversiones de medidas de ángulos, de grados a radianes y viceversa.
- Obtengo los valores de funciones trigonométricas empleando tablas o calculadoras para ángulos entre 0° y 90° .
- Obtengo los valores de funciones trigonométricas para ángulos de 30° , 45° , 60° y múltiplos de 15° grados sin ayuda de calculadora o tablas matemáticas.
- Utilizo las funciones trigonométricas directas y recíprocas para la resolución de triángulos rectángulos.
- Aplico las funciones trigonométricas directas y recíprocas en la resolución de problemas.

Del saber ser

- Valoro la importancia de las funciones trigonométricas.
- Actúo de manera propositiva al resolver los ejercicios planteados.



Dinamización y motivación

En la última parte de este bloque aplicarás las funciones trigonométricas en la solución de situaciones que involucran triángulos rectángulos. Algunas de ellas son de carácter teórico, mientras que otras de aplicación en entornos o contextos reales, como el problema de la sombra de la pirámide de Kukulcán del inicio del bloque.

Para resolver los problemas necesitas recordar los elementos descritos en las sesiones anteriores, debido a que el propósito del bloque es alcanzar el dominio de las funciones trigonométricas de ángulos agudos.

En la primera parte, resolveremos triángulos rectángulos, es decir, determinaremos las medidas de sus lados y ángulos. Para ello emplearemos herramientas como el teorema de Pitágoras, las propiedades expuestas en Geometría para las diversas figuras y las propiedades de funciones, directas, recíprocas y sus co-funciones. Posteriormente analizaremos situaciones de contextos reales en las que se obtiene la resolución de un problema a través de la solución de un triángulo rectángulo.



Problematización

Actividad de aprendizaje 7

Encuentra la altura de un triángulo equilátero cuyo lado es “a” como se muestra en la figura 6.10.

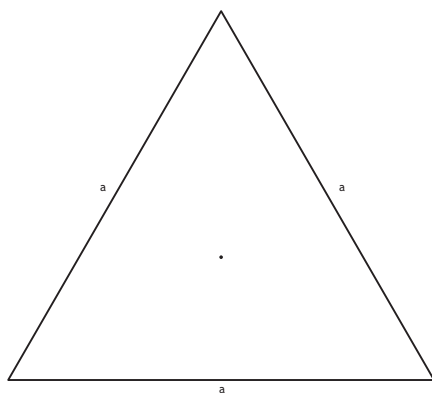


Figura 6.10

Datos:

- a) Se sabe que la medida de cada lado es “a”

Encuentra:

- b) La altura = _____

Responde:

- a) ¿Qué herramienta te sirvió para encontrar la altura del triángulo equilátero?

- b) ¿Qué triángulo fue el que usaste en realidad para encontrar dicha altura?

Esta actividad tiene por objetivo que reflexiones respecto a ciertos los elementos importantes a considerar al momento de resolver una situación en la que intervienen aspectos de trigonométricos. No se trata de darte una receta que tengas que seguir al pie de la letra, por el contrario es una guía para que analices, observes, adaptes e incluso mejores tus capacidades.

- Debes tener cuidado de que la figura geométrica en cuestión sea un triángulo rectángulo, de otro modo las funciones trigonométricas que hemos definido no aplican, así como tampoco el teorema de Pitágoras.
- En el caso de las situaciones reales, debes leer cuidadosamente y hacer una representación gráfica de la misma. Debes colocar en ella los datos que tiene el problema.
- Toma en cuenta los teoremas y propiedades geométricas aplicables a ángulos, triángulos y demás figuras geométricas.
- Recuerda que las funciones trigonométricas trabajan con ángulos y representa un valor real.
- Se recomienda no hacer supuestos que correspondan a elementos de los que carezcas de evidencia, por ejemplo, suponer que tienes lados o ángulos iguales sólo porque así parece en la representación de la figura.
- Como las herramientas a emplear contienen tres elementos del triángulo rectángulo, serán necesarios dos datos (además del ángulo recto) para trabajar con ellas. Entre esos dos datos podemos mencionar cuatro casos posibles: **dos catetos**, **cateto-hipotenusa**, **cateto-ángulo** e **hipotenusa-ángulo**.



Cuando se trata de triángulos rectángulos, como lo apuntamos antes, basta conocer dos de sus elementos para poder hallar los otros tres, veamos los siguientes ejemplos:

- Este caso corresponde al de **dos catetos**.

Ejemplo:

Si los catetos de un triángulo rectángulo están proporcionados, y basándote en la figura 6.11, resuelve el triángulo ABC.

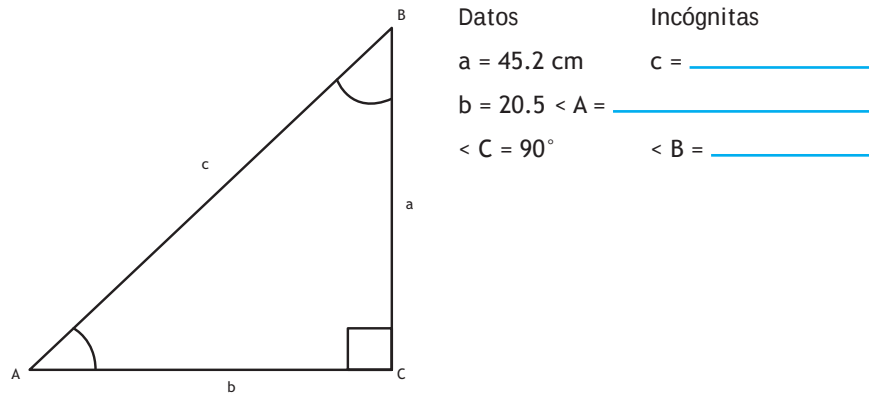


Figura 6.11

Solución:

Cálculo de c

$$\begin{aligned}
 c^2 &= (45.2)^2 + (20.5)^2 \\
 c &= \sqrt{2043.04 + 420.25} \\
 c &= \sqrt{2463.29} \\
 c &= 49.63 \text{ m}
 \end{aligned}$$

Cálculo de $< A$

$$\begin{aligned}
 \tan A &= \frac{45.2}{20.5} = 2.2049 \\
 A &= \tan^{-1} 2.2049 \\
 A &= 65^\circ 36'
 \end{aligned}$$

Cálculo de $< C$

$$\begin{aligned}
 C &= 90^\circ - 65^\circ 36' \\
 C &= 24^\circ 24'
 \end{aligned}$$

Nota: Es importante resaltar que la expresión $\tan^{-1} 2.2049$ se denomina tangente inverso y nos sirve para encontrar la medida del $< A$. Toma nota de esta cuestión ya que el $^{-1}$ no significa que es un exponente negativo, sino que nos referimos a una función que es invertida. De tal motivo si queremos representar una potencia negativa lo harías de la siguiente manera: $(\tan A)^{-1}$.

- Este caso corresponde al de **hipotenusa-ángulo**

Ejemplo:

Si la hipotenusa y ángulo de un triángulo rectángulo son conocidos, y basándote en la figura 6.12, resuelve el triángulo ABC.

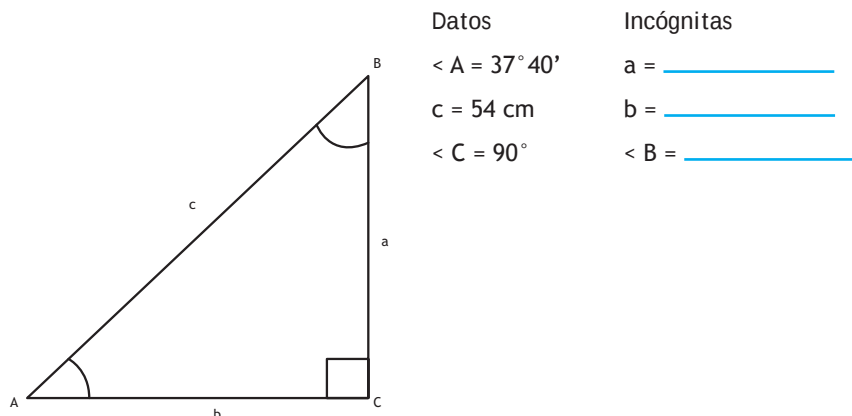


Figura 6.12

Solución:

Cálculo de c

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 37^\circ 40' &= \frac{a}{54} \\ a &= 54(\operatorname{sen} 37^\circ 40') \\ a &= 32.99 \text{ cm} \end{aligned}$$

Cálculo de $\angle A$

$$\begin{aligned} \cos 37^\circ 40' &= \frac{b}{54} \\ b &= 54(\cos 37^\circ 40') \\ b &= 42.74 \text{ cm} \end{aligned}$$

Cálculo de $\angle C$

$$\begin{aligned} C &= 90^\circ - 37^\circ 40' \\ C &= 52^\circ 20' \end{aligned}$$

Actividad de aprendizaje 8

Realiza los siguientes ejercicios en tu cuaderno

- Resuelve los siguientes ejercicios planteados tomando como referencia el triángulo MNP y encuentra en cada caso todos los valores restantes a dicho triángulo.

No.	Valores conocidos	Valores desconocidos	Figura de referencia
a.	$m = 5$ y $p = 12$	$n, \angle M, \angle P$	
b.	$m = 2.1$ y $\angle M = 32^\circ 14'$	p, n y $\angle P$	
c.	$n = 11.2$ y $p = 6.4$	$m, \angle M, \angle P$	
d.	$p = 4.52$ y $\angle M = 56^\circ 24'$	N, m y $\angle P$	
e.	$\angle P = 67^\circ 18'$ y $n = 16.12$	p, m y $\angle M$	

- Se presentará un problema en el contexto real y corresponde al caso de **cateto-ángulo**.

Basándonos de las definiciones de ángulo de elevación y depresión que viste en el bloque 1 de esta guía, te proponemos los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1:

Un turista que se encuentra de paseo en París observa la torre Eiffel a una distancia de 191 metros de la base. Observa que el ángulo de elevación a su cúspide de manera calculada, desde donde se encuentra parado a la altura de sus ojos, es de 60° . Determina la altura de la torre Eiffel si se sabe que la altura del turista es de 1.70 m. Usa como referencia la figura 6.13.

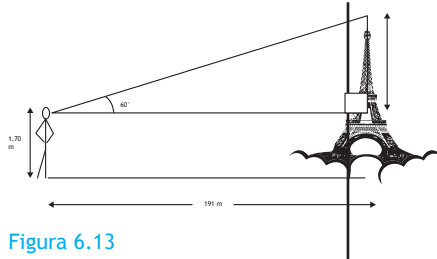


Figura 6.13

Datos

Distancia = 191 m

Altura del turista = 1.70 m

$\angle$ de elevación = 60°

Incógnitas

Altura de la torre =

Solución:

Encontrando una parte de la longitud de la torre Altura de la torre Eiffel

$$\tan 60^\circ = \frac{x}{191}$$

$$x = 191(\tan 60^\circ)$$

$$x = 330.82 \text{ m}$$

$$\text{Altura de la torre} = 330.82 + 1.70$$

$$\text{Altura de la torre} = 332.52$$

Ejemplo 2:

Desde la cúspide de un faro de 50 metros de altura sobre el nivel del mar se observa que el ángulo de depresión a un bote velero es de 20° . Calcula la distancia horizontal del faro al bote tomado en cuenta la figura 6.14.

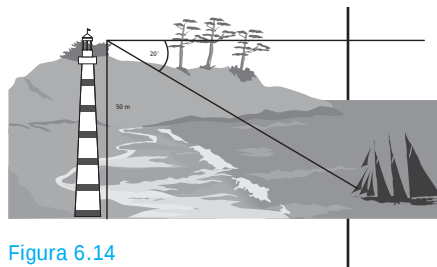


Figura 6.14

Datos

Altura del faro = 50 m

$\angle$ de elevación = 60°

Incógnitas

Distancia =

Solución:

Encontrando una parte de la longitud de la torre del faro al velero

Distancia

$$\tan 20^\circ = \frac{50}{d}$$

$$d = \frac{50}{\tan 20^\circ}$$

$$d = 137.37 \text{ m}$$

$$\text{Distancia} = 137.37 \text{ m}$$

Actividad de aprendizaje 9

Resuelve las siguientes situaciones

1. Determina el área de un triángulo isósceles, si se sabe que el ángulo de la cúspide mide 50° y cada lado igual mide 14 centímetros.
2. El ángulo de elevación de una persona que observa un ave en el cielo es de 75° . Si la

distancia de la persona al ave es de 350 metros, ¿a qué altura se encuentra el ave?

3. Un poste de alumbrado se mantiene vertical con la ayuda de un tensor, sujeto a 3 metros de la base del poste. Si el ángulo del cable que lo sujeta forma un ángulo de 32° con respecto al suelo, ¿cuál es la longitud del poste?
4. Los ángulos de depresión desde lo alto de una torre, hacia dos objetos en el piso son de 25° y 37° respectivamente. Si la altura de la torre es de 20 metros, ¿qué distancia hay entre un objeto y otro?
5. Pipo sale de su casa muy temprano con dirección al este. Después de dar 15 pasos, vira en dirección norte; camina 20 pasos y se detiene a esperar el paso de los automóviles para cruzar la calle. En ese momento, ¿cuántos pasos lo separan de su casa y en qué dirección con respecto a ella se encuentra?
6. Determina el área de un octágono regular inscrito en una circunferencia de radio 15 centímetros.
7. Se requiere alcanzar un objeto que se encuentra en la parte alta de un armario. Si colocamos contra la pared una escalera de 3 metros de longitud y la base de la misma queda a 1.5 metros del pie del armario, ¿cuál es el valor del ángulo que forma la escalera con el suelo?
8. La cantidad de cuerda empleada en el momento del vuelo de una cometa es de 120 metros. Si el ángulo de elevación de la cometa en ese momento es de $40^\circ 30'$. ¿A qué altura se encuentra la cometa?
9. Al momento del despegue, un avión se mantiene en la dirección 65° . Si después de cierto tiempo la altura del mismo es de 4 500 metros, ¿qué distancia ha recorrido desde su despegue?
10. El volumen de un cubo es de 64 centímetros cúbicos. Determina la longitud de su diagonal.



Realimentación

Actividad de realimentación

Resuelve cada una de las situaciones planteadas que tiene el objetivo de verificar todo lo aprendido a lo largo del presente bloque.

1. Transforma los siguientes ángulos a radianes

15°	30° 35'	85.15°	135°	330° 50'
-----	---------	--------	------	----------

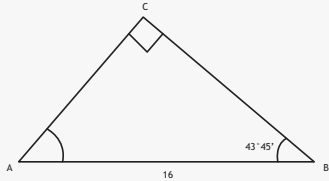
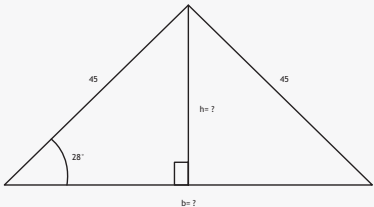
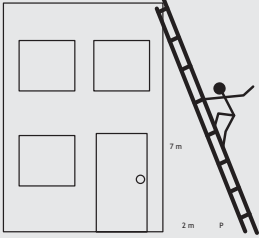
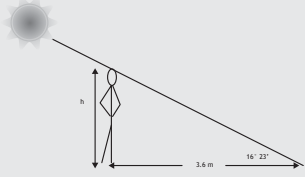
Transforma los siguientes radianes a ángulos.

0.5656 rad	3.1415	6.0203		
------------	--------	--------	--	--

Determina el valor de las siguientes expresiones, sin la ayuda de la calculadora o alguna tabla.

a) $\operatorname{sen} 60^\circ + \cos 30^\circ - \tan^2 45^\circ$	b) $1 - \frac{\operatorname{sen} 45^\circ + \cos 45^\circ}{\operatorname{sen} 30^\circ + \cos 60^\circ}$	c) $\frac{\sec^2 30^\circ - \csc^2 60^\circ}{1 - \tan^2 30^\circ \cot^2 60^\circ}$
--	--	--

En cada uno de los siguientes ejercicios, encuentra el valor que se te indica utilizando el teorema de Pitágoras y las razones trigonométricas según mejor te convenga.

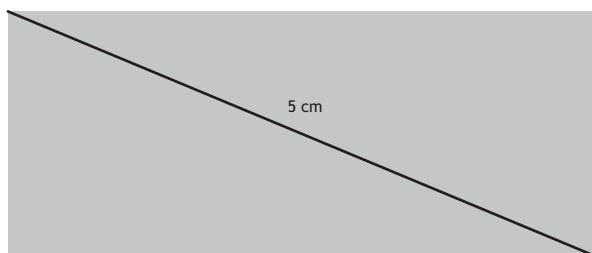
Encuentra el área del siguiente triángulo rectángulo ACB. 	Encuentra el área del siguiente triángulo. 
Calcula el ángulo P que forma la escalera con el suelo. 	Calcula la altura de la persona. 
El valor de la tangente de uno de los ángulos de un triángulo rectángulo es 0.6, determine el valor de los ángulos agudos.	La hipotenusa de un triángulo es 12 y uno de sus ángulos agudos es 40°. Determine la medida de los catetos.

Resuelven las siguientes situaciones planteados en contextos reales. Lee cuidadosamente y te sugerimos que realices un dibujo que represente dicho problema.

- Una escalera de 12.5 metros de longitud está apoyada sobre la pared de una casa. ¿Qué altura alcanza si el ángulo que forma la escalera con el suelo es de $68^\circ 30'$?
- Un rectángulo mide 12 centímetros de largo y 5 centímetros de ancho. Si se le traza una diagonal, calcula la longitud de la misma y el ángulo que forma la diagonal y el ancho del rectángulo.
- Francisco se encuentra de paseo en las playas de Cancún y caminando por la arena, observa la sombra que refleja. Él quiere saber la longitud que proyecta su sombra basándose de su altura que es de 1.75 metros y el ángulo de elevación del Sol, que en ese instante es de $25^\circ 45'$.
- Desde un punto sobre el patio de mi escuela, se observa el asta de bandera hasta su parte más alta que en ese instante tiene un ángulo de elevación de 40° . Si avanzo 3 metros en dirección recta al asta de bandera, el ángulo de elevación ahora es de $43^\circ 12'$. ¿Qué altura tiene el asta de bandera?
- Calcula la longitud de uno de los lados de una losa que tiene forma de un octágono regular y que para su construcción se circunscribe en un círculo de 40 centímetros de diámetro.

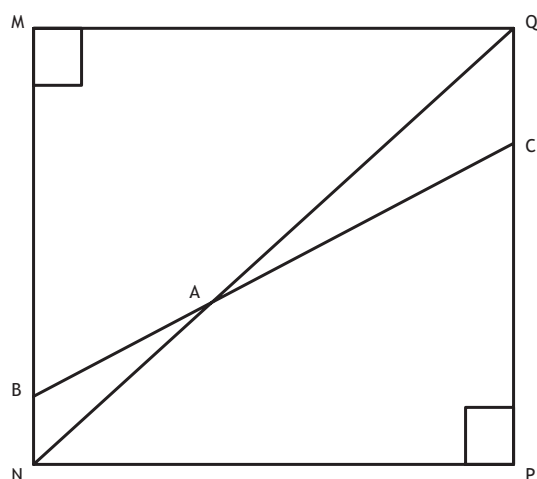
Resuelve cada uno de los siguientes problemas propuestos señalando la respuesta correcta. Te sugerimos que analices y leas cuidadosamente todas las opciones antes de escoger la correcta.

1. En la siguiente rectángulo se conoce que la longitud de su diagonal es 5 centímetros y el perímetro del rectángulo es de 24 centímetros, ¿cuál es el área del rectángulo?



- | | | | |
|-------|-------|-------|-------|
| a) 12 | b) 10 | c) 20 | d) 15 |
|-------|-------|-------|-------|

En la siguiente figura se te proporciona el cuadrado MNPQ y se sabe que el $\angle ABM = 60^\circ$, encuentra el valor del $\angle CAQ$

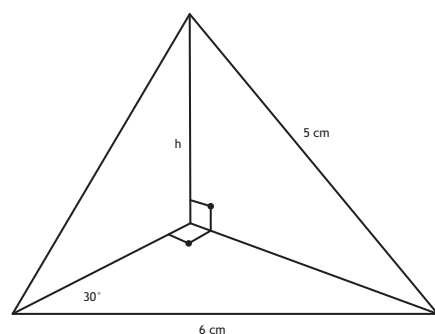


- | | | | |
|--------------|---------------|---------------|---------------|
| a) 5° | b) 15° | c) 10° | d) 20° |
|--------------|---------------|---------------|---------------|

Calcula el área de un triángulo equilátero si sabemos que la altura es $\sqrt{6}$

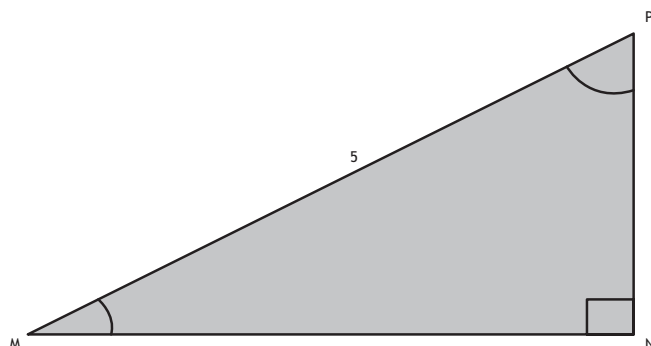
- | | | | |
|----------------|----------------|-------|----------------|
| a) $3\sqrt{3}$ | b) $2\sqrt{3}$ | c) 12 | d) $2\sqrt{2}$ |
|----------------|----------------|-------|----------------|

En la siguiente figura se te presentan 3 triángulos que son rectángulos, dos de ellos en forma vertical y que comparten el lado h y uno en forma horizontal cuyo ángulo agudo es 30° y de hipotenusa 6 cm. Encuentra la altura h .



a) $\sqrt{2}$	b) $\sqrt{3}$	c) 3	d) 4
---------------	---------------	------	------

En la siguiente figura se presenta el triángulo rectángulo MNP cuya hipotenusa es 5 centímetros y en donde la base y la altura guardan la razón 2:1. Determina el valor del $\angle M$



$65^\circ 37'$	$64^\circ 27'$	$26^\circ 33'$	$24^\circ 34'$
----------------	----------------	----------------	----------------

A continuación se te presenta una actividad en la que integrarás todos los conocimientos, habilidades y actitudes que desarrollaste a lo largo de este bloque. Se te sugiere trabajar en equipo poniendo toda tu creatividad y disposición para hacerlo lo mejor posible.

- En esta ocasión te proponemos realizar una investigación grupal para identificar “diferentes métodos para la medición de alturas”. La actividad deberá generar algún método que puedan implementar para medir alturas, por ejemplo de una persona, de un árbol, de tu edificio escolar, un templo, edificio de gobierno o cualquier otro elemento en el que puedan comprobar la eficacia del método. Pueden consultar diversas fuentes, lo importante no es la parte documental, que desde luego deberán entregar como parte de sus evidencias de aprendizaje, sino la utilidad del método y la evidencia de que funciona aunque tenga un pequeño margen de error.



Evaluación de la competencia

Rúbrica para la evaluación del bloque

Competencia	Nivel de logro o desempeño				
	5	4	3	2	1
Del Saber	Identifico completamente situaciones en donde es posible utilizar las funciones trigonométricas, las cuales defino y describo correctamente para ángulos expresados en diferentes unidades angulares y circulares, caracterizando las funciones trigonométricas de los ángulos agudos conocidos.	Identifico plenamente situaciones en donde es posible utilizar las funciones trigonométricas, las cuales defino y describo para ángulos expresados en diferentes unidades angulares y circulares, caracterizando las funciones trigonométricas de ángulos agudos conocidos.	Defino y describo las funciones trigonométricas identificando la mayoría de las situaciones en las que se pueden aplicar, y logro caracterizar los valores de dichas funciones para algunos ángulos conocidos.	Defino y describo las funciones trigonométricas pero logro identificarlas vagamente en las situaciones en las que se pueden aplicar, y logro caracterizar los valores de dichas funciones para algunos ángulos conocidos.	Defino y describo las funciones trigonométricas pero no distingo las situaciones en las que se pueden aplicar, lo que no me permite caracterizar los valores de dichas funciones para ángulos conocidos.
Del saber hacer	Aplico plenamente las definiciones de las funciones trigonométricas directas y recíprocas, las técnicas de conversión entre grados y radianes y los procedimientos para la obtención de valores de dichas funciones para solucionar problemas teóricos o prácticos.	Aplico la mayoría de las definiciones de las funciones trigonométricas directas y recíprocas, las técnicas de conversión entre grados y radianes y los procedimientos para la obtención de valores de dichas funciones para solucionar problemas teóricos o prácticos.	Aplico con algunas inconsistencias las definiciones de las funciones trigonométricas directas y recíprocas, las técnicas de conversión entre grados y radianes y los procedimientos para la obtención de valores de dichas funciones para solucionar algunos problemas teóricos o prácticos.	Aplico con mayores inconsistencias las definiciones de las funciones trigonométricas directas y recíprocas, las técnicas de conversión entre grados y radianes y los procedimientos para la obtención de valores de dichas funciones para solucionar la mayoría de los problemas teóricos o prácticos.	Aplico en algunas situaciones las definiciones de las funciones trigonométricas, las técnicas de conversión entre grados y radianes, pero no consigo desarrollar los procedimientos para resolver los problemas.
Del saber ser	Valoro completamente la importancia de las funciones trigonométricas en la resolución de problemas prácticos y teóricos, manteniendo una actitud completamente colaborativa y respetuosa en el aula.	Valoro completamente la importancia de las funciones trigonométricas en la resolución de problemas prácticos y teóricos, manteniendo una actitud mayormente colaborativa y respetuosa en el aula.	Valoro poco la importancia de las funciones trigonométricas en la resolución de problemas prácticos y teóricos, manteniendo una actitud mayormente colaborativa y respetuosa en el aula.	Muestro poca importancia a las funciones trigonométricas en la resolución de problemas prácticos y teóricos, mantengo una actitud poco colaborativa y respetuosa en el aula.	No aprecio la importancia de las funciones trigonométricas en la resolución de problemas prácticos y teóricos, y no mantengo una actitud respetuosa en el aula al momento de trabajar en el aula.

Bloque VII. Resuelve

Trigonometría II

Atributos de las competencias genéricas:

- 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
- 5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
- 5.4 Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez.
- 5.6 Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para procesar e interpretar información.
- 6.1 Elige las fuentes de información más relevantes para un propósito específico y discrimina entre ellas de acuerdo a su relevancia y confiabilidad.
- 7.1 Define metas y da seguimiento a sus procesos de construcción de conocimientos.
- 8.1 Propone manera de solucionar un problema y desarrolla un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.
- 8.2 Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.
- 8.3 Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.

Competencias disciplinares básicas:

- 1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
- 2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
- 3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
- 4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
- 5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
- 6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
- 7. Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia.
- 8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.



Dinamización y motivación

Nuevamente te presentamos unos ejercicios para que resuelvas y tu midas los conocimientos que tienes hasta ahora y que será necesario dominar para entender este bloque.

a) La coordenada A (-3, -4) se encuentra ubicada en el cuadrante.

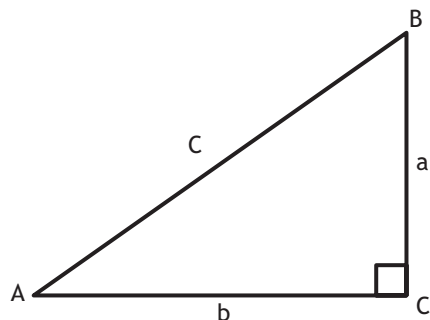
a) I

b) II

c) III

d) IV

b) En la siguiente figura y con los valores indicados en los segmentos, la función $\cot A$ es:

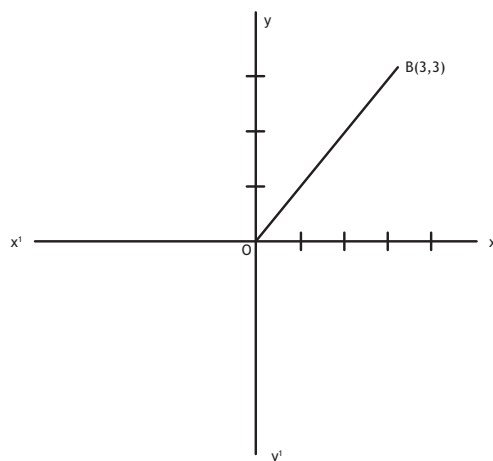


b/a	a/c	b/c	a/b
-------	-------	-------	-------

El valor de la igualdad trigonométrica $\text{Sen}^2 30^\circ + \text{Cos}^2 60^\circ =$

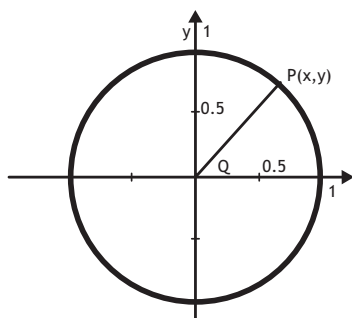
a) 2	b) $1/2$	c) 1	d) $\sqrt{3}$
------	----------	------	---------------

¿Cuál es el valor del ángulo XOB que se forma en el plano cartesiano con el segmento OB trazado al origen, sabiendo el valor de la coordenada B?



a) 30°	b) 45°	c) 60°	d) 40°
---------------	---------------	---------------	---------------

En el siguiente círculo unitario, localizado en el plano cartesiano, está ubicado un punto $P(x, y)$ sobre la circunferencia, entonces la función $\tan \angle Q$ es:



a) 0	b) 1	c) -1	d) α
------	------	-------	-------------

Autoevaluación

Cada inciso corresponde a la resolución de las situaciones planteadas.

	Pregunta de reflexión	Falso	Verdadero	Argumentación
a)	La coordenada se encuentra en el cuadrante II.			
b)	Los triángulos de la figura son congruentes.			
c)	En la resolución del ejercicio se aplicaron los valores de los ángulos especiales del triángulo rectángulo.			
d)	El valor del $\angle XOB$ es igual a 60°			
e)	El valor del ángulo es α ya que no tiene solución.			

Análisis de la actividad

Calificación: 1 punto por cada respuesta correcta. 1 punto por una argumentación pertinente.	Subraya el puntaje alcanzado.	Significado de los resultados para iniciar el desarrollo de los contenidos del Bloque del programa.
---	--------------------------------------	--

Estratégico	9-10	Identifica, comprende y aplica las propiedades de funciones trigonométricas, ubicándolas en el plano e inclusive lo utiliza para resolver problemas más complejos.
Autónomo	7-8	Identifica conceptos y estructura procesos de los temas de funciones trigonométricas, ubicándolas en el plano.
Básico	5-6	Tiene nociones sobre algunos conceptos de funciones trigonométricas ubicándolas en el plano.
Inicial-receptivo	2-4	Tiene pocas nociones sobre algunos conceptos de funciones trigonométricas ubicándolas en el plano.
Nivel pre-formal	0-1	No logra identificar la ubicación de un punto en el plano cartesiano para resolver funciones trigonométricas.

Con los resultados obtenidos en la actividad anterior, podemos establecer los objetivos y metas a alcanzar, de acuerdo a las unidades de competencia establecidas; para ello, se proponen los siguientes niveles de aprovechamiento.

Autoevaluación

Nivel estratégico: Resuelvo problemas utilizando la imaginación espacial para visualizar distintos tipos de ángulos que se forman en el plano cartesiano, aplicando las propiedades de las funciones trigonométricas y empleando modelos aritméticos, algebraicos y gráficos, en forma razonada.	100%
Nivel autónomo: Aplicó las propiedades de las funciones trigonométricas que se forman en el plano cartesiano para la resolución de problemas planteados.	80%
Nivel resolutivo: Aplicó las propiedades de las funciones trigonométricas que se forman en el plano cartesiano para la resolución de ejercicios.	60%
Nivel inicial-receptivo: Distingo las funciones trigonométricas que se forman en el plano cartesiano.	30%
Nivel pre-formal: Ubico coordenadas en el plano cartesiano e identifico los signos en los cuadrantes.	10%

Sesión A: Funciones trigonométricas de ángulos en general



Desarrollo de saberes

Del saber

- Escribo el valor de las funciones trigonométricas asociadas con un punto en el plano.
- Obtengo el valor de las funciones trigonométricas utilizando el ángulo de referencia, tablas o calculadora.
- Dado un ángulo en posición ordinaria en el plano cartesiano, obtengo los valores de las funciones trigonométricas.

Del saber hacer

- Expreso las funciones trigonométricas utilizando las coordenadas de un punto y su distancia en el origen.
- Establezco el comportamiento de las funciones trigonométricas, seno, coseno, y tangente en los cuatro cuadrantes.
- Obtengo gráficamente el valor de una función trigonométrica midiendo el segmento asociado a ella.

Del saber ser

- Aprecio la utilidad de las funciones trigonométricas extendidas para ángulos de cualquier magnitud.
- Actúo de manera propositiva al resolver los ejercicios planteados.
- Asumo una actitud constructiva; congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuento, en las actividades que me son asignadas.



Dinamización

Hasta ahora debes tener conocimiento de las funciones trigonométricas que se forman en el triángulo rectángulo, sus aplicaciones que nos son de gran utilidad para resolver un sin fin de situaciones cotidianas.

Ahora bien, te adentrarás más a la resolución de las funciones trigonométricas ubicándola en el plano.



Contextualización

¿Recuerdas el plano cartesiano y el sistema de coordenadas rectangulares? Sí, aquel que consiste en dos rectas perpendiculares llamadas ejes, que se cortan en un punto llamado origen. El eje horizontal corresponde al eje x o de las abscisas, el eje y el de las ordenadas.



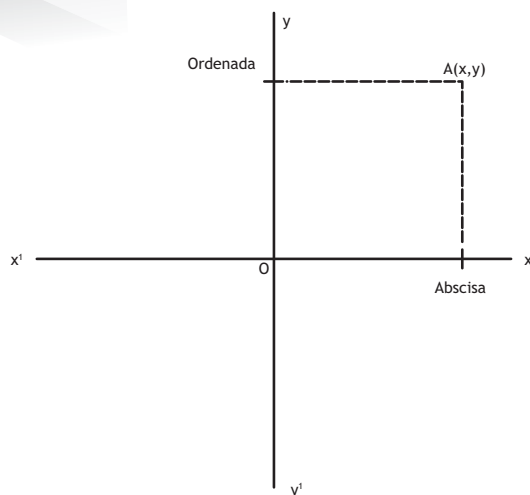


Figura 7.1

Actividad de aprendizaje 1

Bien, dibuja un plano cartesiano y ubica en él la coordenada $A(2,3)$. Une el punto con el origen a través de un segmento de recta. Si tomas al eje x como uno de los lados y el segmento que acabas de dibujar para unir el punto con el otro, tenemos un ángulo (digamos $\angle XOE$) cuyo vértice es el origen de las coordenadas.

Calcula las funciones trigonométricas básicas del ángulo, comparte tus observaciones con la clase.

¿Pueden las observaciones realizadas ayudar con las respuestas a las interrogantes que te he planteado acerca de los valores de las funciones trigonométricas de ángulos no agudos?

Adelante con la actividad.

Funciones trigonométricas para ángulos en general

Ángulos de diversas magnitudes

A pesar de que dos ángulos contengan los mismos lados de inicio y fin, se hayan elaborado con una rotación en el mismo sentido, pueden ser de diferente medida.

Por ejemplo, si queremos trazar un ángulo recto, marcamos el ángulo del vértice D hasta llegar al E , dando lugar al ángulo $\angle DOE = 90^\circ$ (véase figura 7.2).

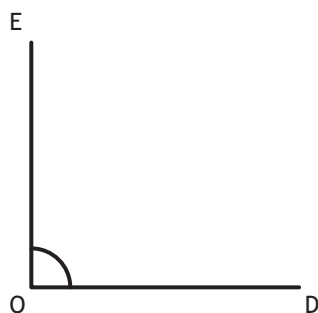


Figura 7.2

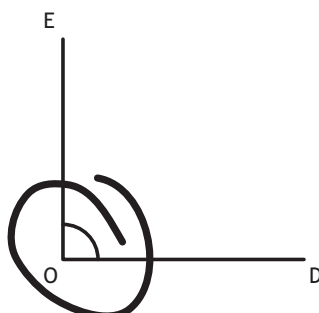


Figura 7.3

Ahora, si continuamos con el trazo dando una vuelta completa hasta llegar nuevamente a dicho ángulo, se habrá formado un ángulo de magnitud igual a la de cinco rectos que equivale a 450° . (Véase figura 7.3)

Así, podríamos seguir hasta formar más ángulos de magnitudes mayores, lo que nos permite observar que al dar más revoluciones aumenta el valor de dicho ángulo.

Tomando en cuenta al origen como el vértice del ángulo que se considere, se divide el plano cartesiano en cuatro partes llamadas cuadrantes, mediante dos rectas perpendiculares que se cortan.

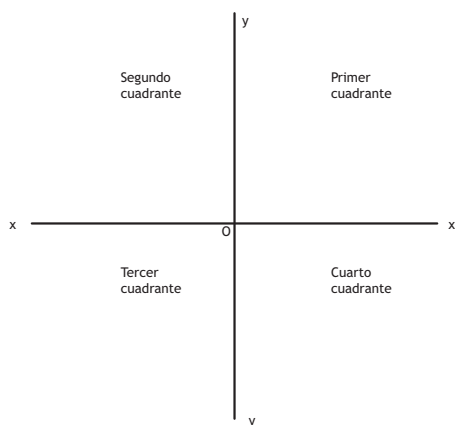


Figura 7.4

Veamos ahora unos ejemplos de trazos de ángulos en el plano cartesiano.

Utiliza tu semicírculo y traza:

Un ángulo de 70°

Un ángulo de 250°

Un ángulo de 410°



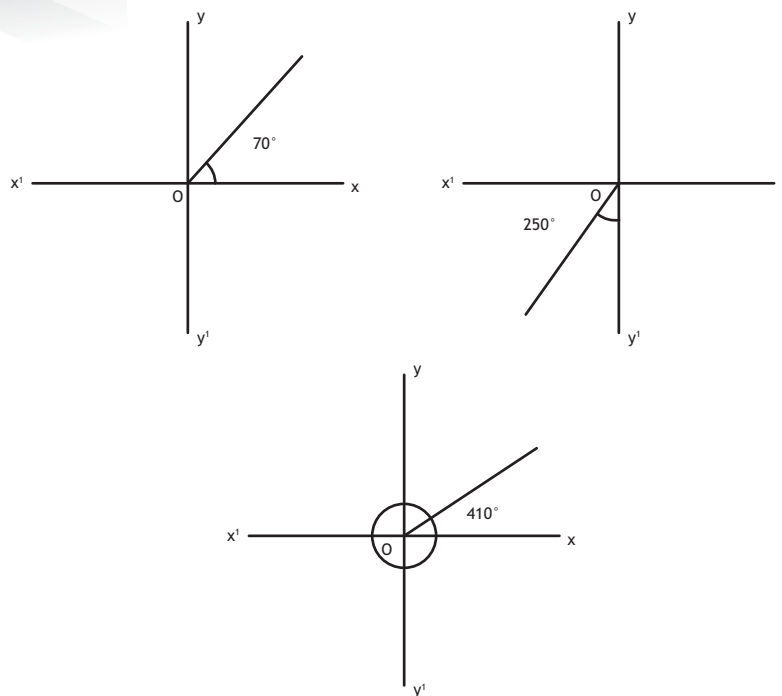


Figura 7.5 Trazos de los ángulos en los cuadrantes.

Te podrás dar cuenta que dependiendo de la magnitud del ángulo da lugar su posición en uno de los cuadrantes del plano cartesiano.

También, hay que conocer que se pueden trazar ángulos en sentido de las manecillas del reloj a los que se les llama ángulos negativos.

Por ejemplo: Traza un ángulo de -50°

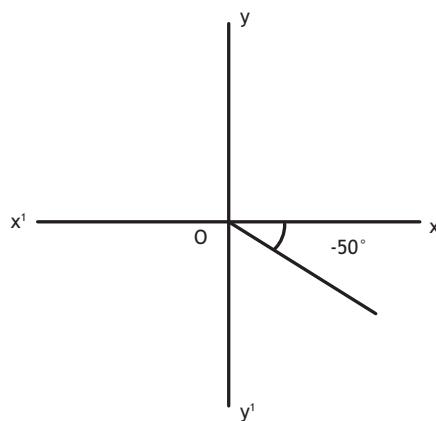


Figura 7.6 Ángulo negativo.

Como puedes notar, se localiza en el cuarto cuadrante.

Actividad de aprendizaje 2

Conociendo que los ángulos se trazan en sentido contrario al de las manecillas del reloj, pero que siguiendo el sentido se forman ángulos negativos, que también podrían engendrar diversas magnitudes, contesta lo que se te pide:

En un reloj ordinario (no digital) y utilizando la manecilla de los minutos.

a) ¿Cuántos ángulos rectos forma en una hora?

b) ¿Y en un día entero?

Actividad de aprendizaje 3

En la siguiente tabla, menciona en que cuadrante se encuentran los ángulos y traza su magnitud.

Ángulo	Cuadrante	Trazo
120°		
170°		
225°		
-110°		
315°		
545°		
-910°		



Actividad de aprendizaje 4

Para los siguientes ángulos, encuentra y traza otros que sean positivos y negativos pero que contengan sus mismos lados (inicial y final).

- a) 50°
- b) 80°
- c) 120°
- d) -100°

Ángulos en posición normal

Un ángulo se dice que está en posición normal, con respecto a un sistema de coordenadas rectangulares, cuando su vértice coincide con el origen del sistema cartesiano y su lado inicial coincide con el eje positivo de las x .

Un ángulo que se encuentra en el segundo cuadrante, está en posición normal ya que su lado inicial coincide con el eje x y su lado final o lado móvil está en el segundo cuadrante como se observa en la siguiente figura. Cabe señalar que este concepto tiene validez para cualquiera de los tres cuadrantes restantes.

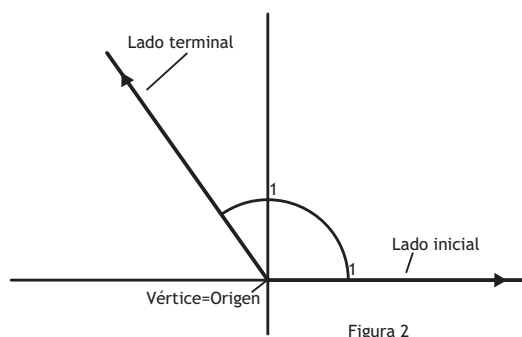


Figura 7.7

Ángulo de referencia

Todos los ángulos mayores de 90 se pueden expresar en términos de ángulos agudos positivos. Esto se hace mediante la utilización del ángulo de referencia o relacionado. El ángulo relacionado es el ángulo agudo positivo (en cualquier cuadrante) formado por su lado terminal y el eje " x ", con el cual se puede expresar todo ángulo, que no sea múltiplo de 90 .

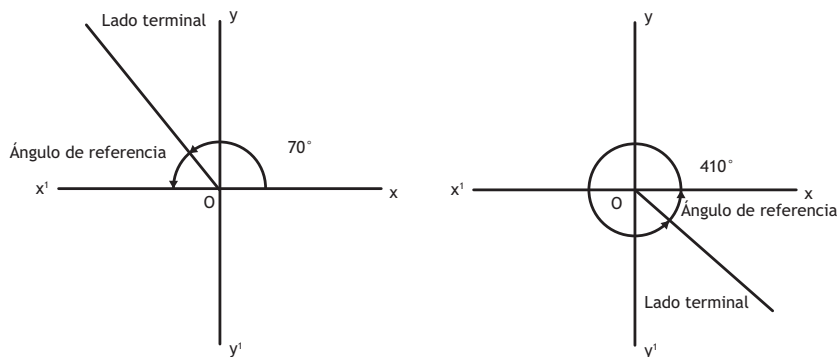


Figura 7.8 Ejemplos de ángulos de referencia.

Para hallar el ángulo de referencia se restan los ángulos normales a 180° y a 360° de la siguiente manera:

- a) En los cuadrantes II y III se resta 180° al ángulo normal utilizando como minuendo el número mayor.
- b) En el cuadrante IV se resta el ángulo normal a 360° .

Signos de las funciones trigonométricas en los cuadrantes del plano cartesiano

Las funciones trigonométricas se pueden hallar en el plano cartesiano; como hemos visto, se pueden localizar en alguno de los cuatro cuadrantes que forman los ejes coordenados, además puede tomar diferentes signos.

Y cumplen con lo siguiente:

- a) Las abscisas medidas del origen a la derecha son positivas y las medidas a la izquierda son negativas.
- b) Las ordenadas medidas del origen hacia arriba son positivas y las medidas hacia abajo son negativas.

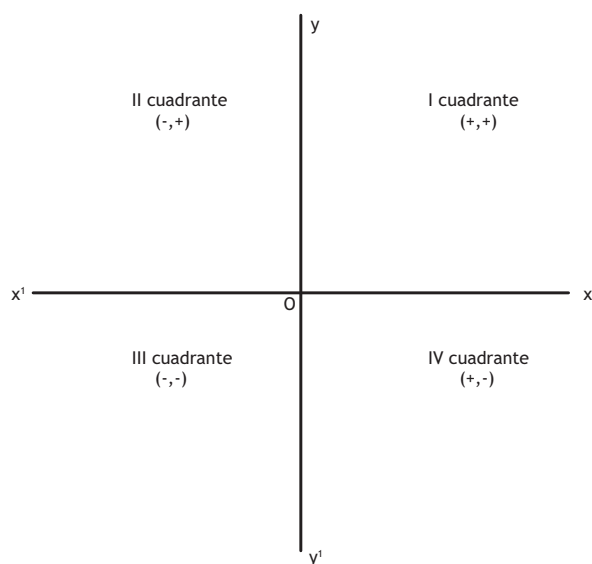


Figura 7.9 Los signos en los cuadrantes.

Tomando en cuenta los datos anteriores se puede trazar una figura en donde se muestran cuatro ángulos formados con las abscisas y ordenadas trazadas al origen, a un punto que se localiza en cada cuadrante.



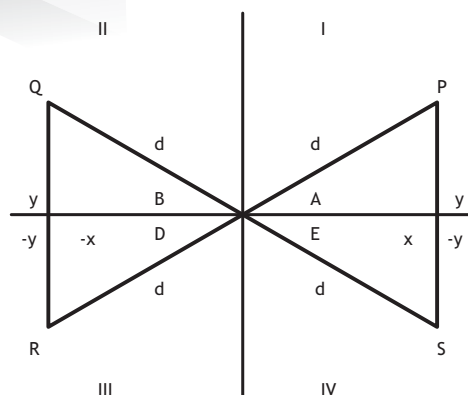


Figura 7.10

Con esta figura, asignándole valores a los lados de los ángulos que se forman y conociendo el valor (positivo y negativo) de las abscisas y ordenadas, podremos hallar las funciones trigonométricas en los cuatro cuadrantes. Hay que recordar que la distancia del punto al origen la podríamos hallar por el teorema de Pitágoras (ya antes visto) y es positiva.

Actividad de aprendizaje 5

Con los datos de la figura anterior, encuentra el valor de las funciones trigonométricas llenando la siguiente tabla. Anexa el signo correspondiente.

I cuadrante	II cuadrante	III cuadrante	IV cuadrante
Sen < A =	Sen < B =	Sen < D =	Sen < E =
Cos < A =	Cos < B =	Cos < D =	Cos < E =
Tan < A =	Tan < B =	Tan < D =	Tan < E =
Cot < A =	Cot < B =	Cot < D =	Cot < E =
Sec < A =	Sec < B =	Sec < D =	Sec < E =
Csc < A =	Csc < B =	Csc < D =	Csc < E =

En resumen, el comportamiento de los signos de las funciones trigonométricas en cada cuadrante es:

Cuadrante I.- Todas son positivas.

Cuadrante II.- Únicamente las funciones Seno y Cosecante son positivas.

Cuadrante III.- Únicamente las funciones Tangente y Cotangente son positivas.

Cuadrante IV.- Únicamente las funciones Coseno y Secante son positivas.

Con base a estos datos podrás determinar los signos de las funciones trigonométricas de cualquier magnitud.

Ejemplo 1:

Encuentra los signos de las funciones trigonométricas para la medida del ángulo

de 330° .

Solución:

Puesto que sabes que la medida del ángulo de 330° es $> 270^\circ$ pero $< 360^\circ$, entonces puedes deducir que se encuentra en el cuarto cuadrante; por lo tanto, las funciones positivas serían la coseno y secante y el resto negativas.

Ahora bien, conociendo un punto en el plano cartesiano (coordenada) y trazándolo al origen, podemos encontrar las funciones trigonométricas independientemente del cuadrante en que se localice este.

Ejemplo 2:

Encuentra las funciones trigonométricas del ángulo XO E (siendo XO el lado inicial) que se forma en posición normal en el plano cartesiano si la coordenada es E (-2, 3) y corresponde el lado terminal del ángulo.

Nota: Al nombrar el ángulo, el lado inicial X puede ser tomado tanto como positivo o negativo hacia el origen (O) hasta llegar al punto formando el lado final en este caso E.

Resolución:

Por teorema de Pitágoras:

$$\text{Hip}^2 = (3)^2 + (-2)^2$$

$$\text{Hip}^2 = 9 + 4$$

$$\text{Hip} = \sqrt{13}$$

Y las funciones trigonométricas quedarían así:

Sen $\angle$ XO E =	Cos $\angle$ XO E =	Tan $\angle$ XO E =	Cot $\angle$ XO E =	Sec $\angle$ XO E =	Csc $\angle$ XO E =
$\frac{3}{\sqrt{13}}$	$\frac{-2}{\sqrt{13}}$	$\frac{3}{-2}$	$\frac{-2}{3}$	$\frac{\sqrt{13}}{-2}$	$\frac{\sqrt{13}}{3}$

El mismo procedimiento sería utilizado para encontrar las funciones trigonométricas teniendo como dato la coordenada en el plano cartesiano.

Actividad de aprendizaje 6

Encuentra los signos de las funciones trigonométricas para las siguientes medidas de ángulos:

Ángulos:	Funciones Positivas:	Funciones negativas:
70°		
240°		



Ángulos:	Funciones Positivas:	Funciones negativas:
350°		
150°		
410°		

Actividad de aprendizaje 7

Encuentra las funciones trigonométricas del ángulo que se forma en posición normal en el plano cartesiano dadas las coordenadas que corresponde el lado terminal del ángulo.

A (4, 5) Resolución:			Gráfica:		
Sen < XOA =	Cos < XOA =	Tan < XOA =	Cot < XOA =	Sec < XOA =	Csc < XOA =
B (-3, -7) Resolución:			Gráfica:		
Sen < XOB =	Cos < XOB =	Tan < XOB =	Cot < XOB =	Sec < XOB =	Csc < XOB =

D (-2,6) Resolución:			Gráfica:		
Sen < XOD =	Cos < XOD =	Tan < XOD =	Cot < XOD =	Sec < XOD =	Csc < XOD =
E (8, - 10) Resolución:			Gráfica:		
Sen < XOE =	Cos < XOE =	Tan < XOE =	Cot < XOE =	Sec < XOE =	Csc < XOE =

Otro tipo de problema que suele presentarse, en la resolución de funciones trigonométricas en el plano cartesiano, es que se te de una función trigonométrica y tú encuentres las cinco restantes.

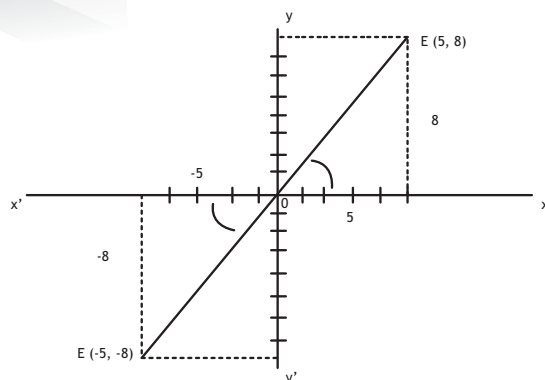
Veamos el siguiente ejemplo:

Dado que $\tan A = 5/8$, encuentra las funciones restantes y traza el ángulo que se forma en el plano.

Solución: Sabemos que $\tan A = \text{cateto opuesto/hipotenusa} = 5/8 = -5/-8$

Por lo tanto, los lados terminales pueden pasar por $x = 5$, $y = 8$, también pueden pasar por $x = -5$, $y = -8$ además por el teorema de Pitágoras $z = \sqrt{89}$ (representa el lado terminal) de tal forma que la grafica quedaría así:





Y se deduce que se ubican en el primer y tercer cuadrante; es evidente que hay un número infinito de ángulos positivos y negativos que pueden tomar un múltiplo del ángulo formado.

La tangente es positiva en los cuadrantes I y III de tal forma que las funciones quedarán:

	Sen < A =	Cos < A =	Cot < A =	Sec < A =	Csc < A =
Cuadrante I	$\frac{8}{\sqrt{89}}$	$\frac{5}{\sqrt{89}}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{\sqrt{89}}{5}$	$\frac{\sqrt{89}}{8}$
Cuadrante III	$\frac{-8}{\sqrt{89}}$	$\frac{-5}{\sqrt{89}}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{\sqrt{89}}{-5}$	$\frac{\sqrt{89}}{-8}$

Se recomienda delimitar el cuadrante que interesa encontrar de preferencia.

Actividad de aprendizaje 8

Dada la función trigonométrica, encuentra las 5 funciones faltantes.

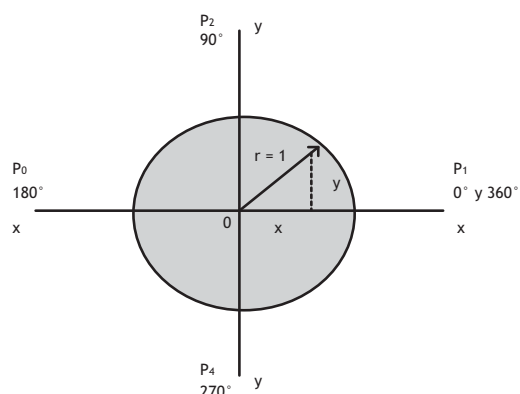
Sen < A = $\frac{6}{9}$ Si < A esta en el II cuadrante					
---	--	--	--	--	--

$\tan \angle A = \frac{12}{15}$ Si $\angle A$ está en el III cuadrante					
$\sec \angle A = \frac{7}{-4}$ Si $\angle A$ está en el IV cuadrante					
$\cos \angle A = \frac{16}{20}$ Si $\angle A$ está en el II cuadrante					

Las funciones trigonométricas como segmentos del círculo trigonométrico

Analizaremos el círculo trigonométrico y la relación de los segmentos de éste con los valores de las funciones trigonométricas.

Hay que mencionar que el círculo trigonométrico unitario es aquel cuyo radio es igual a la unidad, su centro coincide con el origen de la intersección de las rectas abscisa y ordenada en el plano cartesiano.



Ahora tomemos un punto sobre cada uno de los lados terminales de éstos ángulos, de tal modo que las coordenadas de estos puntos serían:

Ángulos	Representa el Punto	Cuyas Coordenadas son:
0° y 360°	P_1	$x = 1, y = 0$
90°	P_2	$x = 0, y = 1$
180°	P_3	$x = -1, y = 0$
270°	P_4	$x = 0, y = -1$

Las funciones de 0° y 360° son las mismas puesto que tienen el mismo lado final.

Te recuerdo que en la relación funcional de: $y = 1 / x$, el valor de y queda determinado cuando se le da un valor cualquiera excepto cero.

Puesto que si $x = 0$ la función se dice que se hace infinita y su abrevia $y = \alpha$.

Actividad de aprendizaje 9

Con base en lo explicado anteriormente, ahora te propongo que llenes la siguiente tabla con los valores de las funciones trigonométricas para estos ángulos.

0° y 360°	90°	180°	270°
Sen $0^\circ =$	Sen $90^\circ =$	Sen $180^\circ =$	Sen $270^\circ =$
Cos $0^\circ =$	Cos $90^\circ =$	Cos $180^\circ =$	Cos $270^\circ =$
Tan $0^\circ =$	Tan $90^\circ =$	Tan $180^\circ =$	Tan $270^\circ =$
Cot $0^\circ =$	Cot $90^\circ =$	Cot $180^\circ =$	Cot $270^\circ =$
Sec $0^\circ =$	Sec $90^\circ =$	Sec $180^\circ =$	Sec $270^\circ =$
Csc $0^\circ =$	Csc $90^\circ =$	Csc $180^\circ =$	Csc $270^\circ =$

Actividad de aprendizaje 10

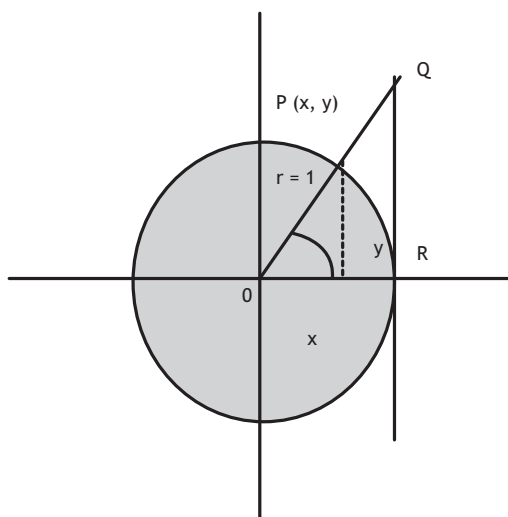
Conociendo ya los valores de las funciones trigonométricas de estos ángulos, demuestra las siguientes igualdades.

- $\cos 0^\circ + \csc 90^\circ = 2$
- $\sin 0^\circ + \cos 90^\circ = 0$
- $\cos 0^\circ + \tan 0^\circ = 1$
- $\sin 270^\circ - \sin 90^\circ = -2$
- $\sin 90^\circ + \csc 90^\circ + \cos 90^\circ + \cot 90^\circ = 2$

Para cerrar este apartado y conociendo ya la figura del círculo trigonométrico unitario, podemos hacerle unos trazos adicionales para encontrar unas expresiones llamadas identidades trigonométricas. Una identidad trigonométrica es una igualdad que contiene funciones trigonométricas, que es verdadera para todos los valores de los ángulos para los cuales están definidas las funciones.

En la siguiente figura tenemos que:

Se traza la tangente al círculo de tal forma que R , es el punto de tangencia y prolongamos la línea terminal del ángulo de tal forma que Q es el punto de intersección con la tangente.



Luego podemos establecer que:

Adicional a las relaciones anteriores, con la ayuda de los triángulos rectángulos que se tienen en el círculo trigonométrico, se obtiene lo siguiente:

Por el teorema de Pitágoras: $x^2 + y^2 = 1$

$$\text{Sen}^2 \alpha + \text{Cos}^2 \alpha = 1$$

La expresión anterior es una identidad trigonométrica llamada fundamental. A partir de ésta, se pueden deducir las siguientes:

$$\text{Tan}^2 \alpha + 1 = \text{Sec}^2 \alpha$$

$$\text{Cot}^2 \alpha + 1 = \text{Csc}^2 \alpha$$

A continuación te presento la demostración de la primera expresión y dejaré en ti la prueba de la segunda.

Demostrar que de la identidad fundamental $\text{Sen}^2 \alpha + \text{Cos}^2 \alpha = 1$, se obtiene la expresión $\text{Tan}^2 \alpha + 1 = \text{Sec}^2 \alpha$

Dividimos la identidad fundamental entre $\text{Cos}^2 \alpha$ y resulta:

$$\frac{\text{Sen}^2 \alpha + \text{Cos}^2 \alpha}{\text{Cos}^2 \alpha} = \frac{1}{\text{Cos}^2 \alpha} \quad \text{luego nos quedaría:}$$

$$\text{Tan}^2 \alpha + 1 = \text{Sec}^2 \alpha$$



Actividad de aprendizaje 11

Demostrar que de la identidad fundamental $\text{Sen}^2 \alpha + \text{Cos}^2 \alpha = 1$, se obtiene la expresión $\text{Cot}^2 \alpha + 1 = \text{Csc}^2 \alpha$

Actividad de aprendizaje 12

Demuestra las siguientes identidades trigonométricas.

a) $\text{Tan } A + \text{Cot } A = \text{Sec } A \cdot \text{Csc } A$

b) $\text{Tan } A \text{ Sen } A + \text{Cos } A = \text{Sec } A$

c) $\frac{\text{Sen } A}{\text{Cos } A} + \frac{\text{Cos } A}{\text{Sec } A} = 1$

Sesión B: Gráfica de las funciones trigonométricas



Desarrollo de saberes

Del saber:

- Reconozco las funciones trigonométricas en el círculo unitario como funciones de un segmento.

Del saber hacer:

- Construyo las identidades pitagóricas a partir de las definiciones de las funciones trigonométricas en el plano coordenado o en el círculo trigonométrico.
- Obtengo gráficamente el valor de las funciones trigonométricas midiendo el segmento asociado a ellas.

Del saber ser:

- Valoro la importancia de contar con recursos tecnológicos y tradicionales para la obtención de valores de las funciones trigonométricas para ángulos de cualquier magnitud.
- Actúo de manera propositiva al resolver los ejercicios planteados.
- Asumo una actitud constructivista; congruente con los conocimientos y habilidades con las que cuento, en las actividades que me son asignadas.



Dinamización y motivación

Como hemos observado, en sesiones anteriores, las funciones trigonométricas establecen una relación entre ángulos y sus correspondientes valores expresados en números reales.



Contextualización

Como recordarás, en tus cursos anteriores de matemáticas, a partir de una tabla de valores, puedes ubicar cada pareja (x, y) en un plano cartesiano, para después por medio de una línea unir los puntos y obtener la gráfica de la función.

Recordemos cómo se elabora una gráfica. Para ello, a partir de la relación que se te presenta entre x , determina los valores de la tabla que corresponden; a continuación ubica los valores en el plano cartesiano y traza la línea que los une para obtener su gráfico correspondiente.

$$y = 2x + 1$$

x	y
-2	
-1	
0	
1	
2	

1. ¿Qué valores establecerías en cada uno de los ejes, para graficar una función trigonométrica?
2. ¿Consideras necesaria una tabla similar a la anterior?
3. ¿Qué tipo de línea tendrá la función, será curva o recta?

Realiza una investigación con respecto a la graficación en general, y los elementos particulares que debes considerar para graficar funciones trigonométricas.

Gráfica de las funciones trigonométricas

La variación que tiene cada una de las funciones trigonométricas depende de cómo varíe el ángulo, se aprecia claramente mediante una gráfica. Las medidas circulares de estos valores se toman como abscisas, y los valores correspondientes de la función se toman como ordenadas. Estas funciones tienen un patrón repetitivo (son llamadas periódicas); es decir, se repiten cada dos unidades a medida que se mueve de izquierda a derecha respetando el mismo modelo.

Para que comprendas mejor como se obtienen los valores de la función y su gráfica, te presento el siguiente ejemplo:

Traza la gráfica de función $\text{Sen } t$.

Si la representamos como una función quedara: $y = \text{Sen } t$



MATEMÁTICAS II

Le damos a t los valores que dividamos en 30° , podemos calcular los valores correspondientes de y por medio de la tabla de tabulación. Al tabular los resultados obtenidos se tendrá que anotar que los ángulos están expresados en grados (sexagesimal) y en radianes (cíclico). Es conveniente que al trazar se usen los radianes y cuando se busca la función trigonométrica de un ángulo en grados.

Al tabular la función nos quedará:

t (grados)	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
t(radianes)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
Sen t	0	.50	.86	1	.86	.50	0	-.50	-.86	-1	-.86	-.50	0

Para el trazo de la gráfica seguiremos el siguiente proceso:

- Se traza una circunferencia de radio indistinto, cuyo centro es el origen del eje cartesiano.
- Se divide cada uno de los cuadrantes en ángulos de 30° hasta completar la circunferencia.
- A partir del origen trazaremos una semirrecta horizontal fuera de la circunferencia que dividiremos en partes iguales de 30° cada uno hasta llegar a 360° y que representan los ángulos de 0° , 30° , 60° , 360° .
- A partir del valor de 30° se traza rectas perpendiculares a cada uno de los ángulos trazados sobre la semirrecta horizontal y que serán paralelas al eje y del sistema cartesiano.
- Desde el punto de intersección de la circunferencia con los radio vectores de los ángulos 0° , 30° , 60° , ..., 360° se trazan rectas horizontales que se intersecarán con las perpendiculares que fueron levantadas desde los puntos horizontales.
- Los primeros 2 cuadrantes, se tomarán a los puntos de la parte superior, en los 2 últimos cuadrantes se tomarán relevancia a los puntos de intersección en la parte inferior.
- Solo se unen los puntos obtenidos por las intersecciones, determinando así la curva llamada Senoide como se indica en la figura siguiente.

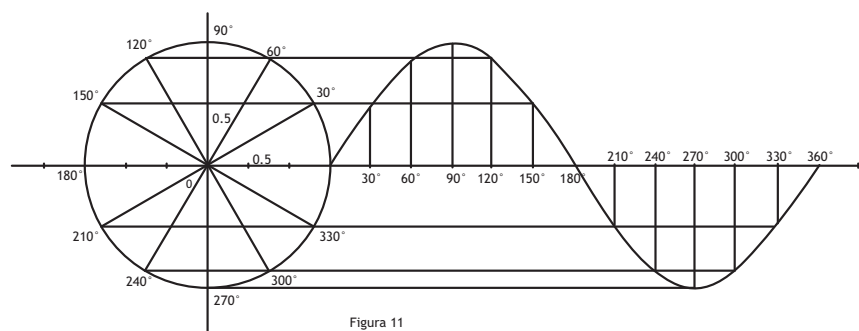


Figura 11

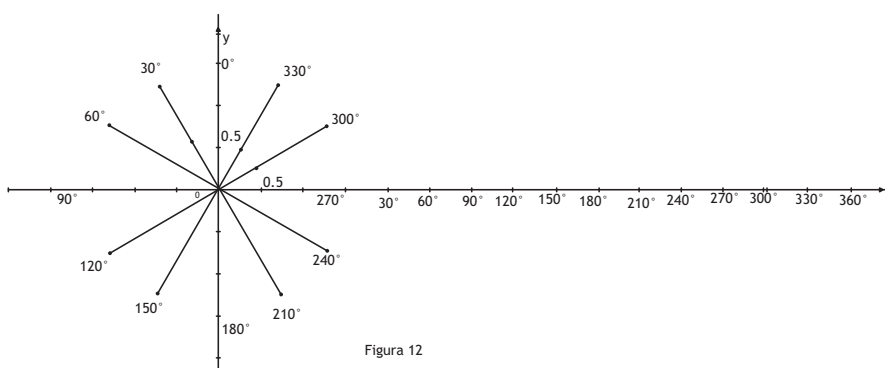
De manera similar podríamos tabular y graficar la función Coseno.

Actividad de aprendizaje 13

Encuentra en la tabla los valores de la función: $y = \cos t$

t (grados)	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
t(radianes)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
Cos t													

Ahora grafícala apoyándote en la figura que se te da a continuación.

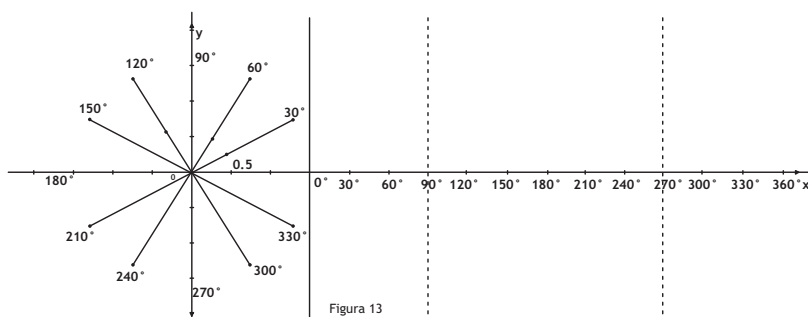


Actividad de aprendizaje 14

Por último, te reto a que encuentres en la tabla los valores de la función: $y = \tan t$

t (grados)	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
t(radianes)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
Tan t													

Termina con realices su gráfica correspondiente. Apóyate de nuevo en la figura que se te da a continuación.





Realimentación

Resuelve cada uno de los siguientes ejercicios planteados utilizando el proceso adecuado para llegar a la respuesta correcta.

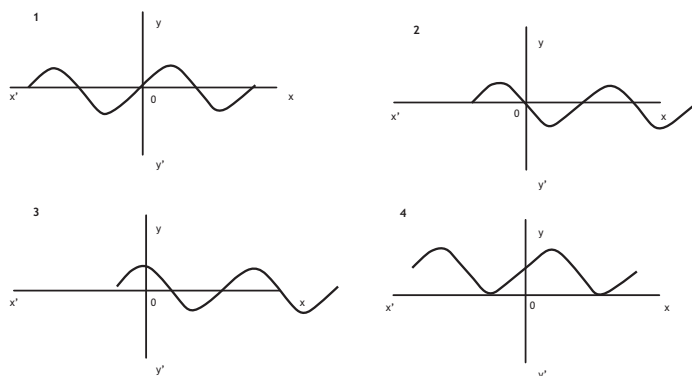
1. Demostrar que la medida del ángulo de 950° está en el tercer cuadrante del plano cartesiano.
2. Encuentra las funciones trigonométricas del ángulo XOE (siendo XO el lado inicial) que se forma en posición normal en el plano cartesiano si la coordenada es E $(-4, -5)$ y corresponde el lado terminal del ángulo.
3. Dada la función trigonométrica $\tan A = \frac{15}{20}$ encuentra las 5 funciones faltantes. Si A está en el III cuadrante.
4. Demostrar que: $\tan 180^\circ + \cot 90^\circ = 0$
5. Demuestra la siguiente identidad trigonométrica:

$$\frac{\sin A}{1 + \cos A} = \frac{1 - \cos A}{\sin A}$$

Resuelve cada uno de los siguientes ejercicios propuestos señalando la respuesta correcta. Te recomiendo que leas todas la posibles opciones antes de escoger la que sea correcta.

6. ¿En qué cuadrante se encuentra un ángulo de 652° ?
 a) I b) II c) III d) IV
7. Si se sabe que $\cot x = \frac{a}{b}$, ¿cuál de las respuestas que a continuación se te presentan no corresponde a sus otras funciones trigonométricas?
 a) $\sin x = \frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ b) $\tan x = \frac{b}{a}$ c) $\csc x = \frac{\pm\sqrt{a^2+b^2}}{a}$
 d) $\cos x = \frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$
8. ¿En qué cuadrante está el ángulo A para que se cumpla la condición de que $\cos A$ es negativo y $\sin A$ es positivo
 a) I b) II c) III d) IV
9. Dada la siguiente expresión trigonométrica $\sin 180^\circ + \cos 270^\circ$ su respuesta es:
 a) 1 b) 0 c) 2 d) -2

10. De el siguiente figuras ¿Cuál es la grafica de la función $\cos x$?



- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4



Evaluación de la competencia

Proyecto

A propósito de la actividad de inicio de este bloque, vamos a realizar una actividad que no tiene mucho que ver con las que hasta el momento te he sugerido. En esta ocasión y a manera de que los elementos analizados hasta este punto acerca de razones y funciones trigonométricas puedan ser evaluados te presento el siguiente proyecto.

¿Conoces o has escuchado de JEOPARDY? Seguramente te has topado con programas de televisión que tienen que ver con concursos en los que la dinámica gira alrededor de personas o equipos que se enfrentan a diversas preguntas a responder en determinado tiempo.

Pues bien, vamos a realizar el JEOPARDY de las razones y funciones trigonométricas. Organicen el grupo en diversos equipos, para que se distribuyan las siguientes tareas.

1. El armado de las preguntas. Todas deberán ser temas en los que se evalúen razones y funciones trigonométricas, pueden organizar las preguntas por categorías y por grado de dificultad. Por ejemplo, una categoría pudiera ser "Cofunciones de ángulos complementarios", posiblemente otra sea "Solución de triángulos rectángulos" y así como éstas, creen otras que les parezcan significativas. Definan, del mismo modo, el grado de dificultad de las preguntas de cada categoría, pueden establecer de 4 a 5 niveles de dificultad.
2. El armado de la presentación. Otro requisito del proyecto es que elaboren un tablero electrónico, para la presentación del mismo al momento de realizar el concurso. Estoy cierto de que cuentan con habilidades necesarias para hacer una presentación electrónica con la ayuda de un programa básico de computadora.
3. La ejecución del concurso. Finalmente, otros compañeros fungirán como participantes; organicen el grupo para realizar el concurso. Ubiquen al moderador (de entre los estudiantes) y el espacio necesario. Deben realizar las gestiones necesarias para el préstamo de la instalación requerida, computadora, proyector, etc.
4. La promoción del evento. Resulta interesante que a este tipo de actividades acudan estudiantes del mismo plantel, otros docentes, directivos y de ser posibles padres de familia. Siempre es importante darnos cuenta de nuestras habilidades en general, no sólo en el área de matemáticas, que es la motivadora de la presente actividad.

Pues bien, espero sea divertido y sobre todo pongan en juego las habilidades adquiridas en cuanto a trigonometría se refiere. ¡Manos a la obra!



Rúbrica para la evaluación

Nivel de desempeño			
	3	2	1
Habilidades de aplicación de conocimientos	Utiliza adecuadamente las propiedades y relaciones de las funciones trigonométricas de ángulos en general, para determinar los contenidos de las preguntas a incluir en el proyecto, de tal forma que resulten significativas para los concursantes.	Utiliza las propiedades y relaciones de las funciones trigonométricas de ángulos en general, para determinar los contenidos de las preguntas a incluir en el proyecto, las cuales resultan con un grado mínimo de significatividad para los concursantes.	No utiliza las propiedades y relaciones de las funciones trigonométricas de ángulos en general, en su participación en el proyecto.
Creatividad	Los elementos que presenta en el desarrollo del proyecto, preguntas, organización, ejecución y difusión del mismo contienen elementos innovadores que muestran claramente la creatividad empleada.	Los elementos que presenta en el desarrollo del proyecto, preguntas, organización, ejecución y difusión del mismo, contienen algunos elementos innovadores que muestran la creatividad empleada.	Los elementos que presenta en el desarrollo del proyecto, preguntas, organización, ejecución y difusión del mismo, contienen algunos elementos innovadores que muestran la creatividad empleada.
Actitudinal	Aprecia las relaciones y propiedades de las funciones trigonométricas para elaborar el proyecto, aportando puntos de vista personales, considerando los de otras personas y trabajando de manera colaborativa en el mismo.	Muestra poco aprecio por las propiedades y relaciones de las funciones trigonométricas para elaborar el proyecto, al igual que muestra pocas aportaciones personales y muestra poca disposición ante los puntos de vista de otras personas y en el trabajo colaborativo del mismo.	No aprecia las propiedades y relaciones de las funciones trigonométricas para elaborar el proyecto al igual que aporta muy poco en lo personal y no considera los puntos de vista de otras personas y muestra poca disposición en el trabajo colaborativo.

Rúbrica para la evaluación del bloque

Competencia	Nivel de desempeño				
	5	4	3	2	1
Del Saber	Identifico e interpreto correctamente las funciones trigonométricas en el plano cartesiano, de igual forma reconozco estas funciones como segmentos del círculo trigonométrico lo que me permite comprender las gráficas de las funciones Seno, Coseno y Tangente.	Identifico e interpreto correctamente las funciones trigonométricas en el plano cartesiano, de igual forma reconozco algunas de estas funciones como segmentos del círculo trigonométrico lo que produce problemas para comprender las gráficas de las funciones Seno, Coseno y Tangente.	Identifico e interpreto algunas las funciones trigonométricas en el plano cartesiano, de igual forma reconozco algunas de estas funciones como segmentos del círculo trigonométrico lo que produce problemas para comprender las gráficas de las funciones Seno, Coseno y Tangente.	Consigo identificar pero poco interpretar las funciones trigonométricas en el plano cartesiano, de igual forma reconozco defectuosamente estas funciones como segmentos del círculo trigonométrico lo que produce problemas para comprender las gráficas de las funciones Seno, Coseno y Tangente.	No consigo identificar ni tampoco interpretar las funciones trigonométricas en el plano cartesiano, de igual forma reconozco defectuosamente estas funciones como segmentos del círculo trigonométrico lo que produce problemas para comprender las gráficas de las funciones Seno, Coseno y Tangente.
Del saber hacer	Obtengo los valores de todas funciones trigonométricas empleando calculadora y tablas, y realizo con facilidad la construcción de todas las gráficas de las funciones trigonométricas directas, además empleo correctamente el círculo trigonométrico para establecer identidades pitagóricas.	Obtengo los valores de todas funciones trigonométricas empleando calculadora y tablas, y realizo con facilidad la construcción de todas las gráficas de las funciones trigonométricas directas, además empleo poco el círculo trigonométrico para establecer identidades pitagóricas.	Obtengo los valores de algunas funciones trigonométricas empleando calculadora y realizo la construcción de algunas gráficas de las funciones trigonométricas directas, además empleo poco el círculo trigonométrico para establecer identidades pitagóricas.	Obtengo los valores de algunas funciones trigonométricas empleando calculadora y tablas, y tengo algunas deficiencias en la construcción de las gráficas de las funciones trigonométricas directas, además no empleo el círculo trigonométrico para establecer identidades pitagóricas.	Obtengo los valores de pocas funciones trigonométricas empleando calculadora y tablas, y tengo deficiencias en la construcción de las gráficas de las funciones trigonométricas directas, además no empleo el círculo trigonométrico para establecer identidades pitagóricas.
Del saber ser	Valoro completamente la importancia de la utilidad de las funciones trigonométricas para ángulos de cualquier magnitud manteniendo una actitud completamente colaborativa y respetuosa en el aula.	Valoro completamente la importancia de las funciones trigonométricas para ángulos de cualquier magnitud, manteniendo una actitud poco colaborativa y respetuosa en el aula.	Muestro poco aprecio por la utilidad de las funciones trigonométricas para ángulos de cualquier magnitud, manteniendo una actitud poco colaborativa y respetuosa en el aula.	Muestro poco aprecio por la utilidad de las funciones trigonométricas para ángulos de cualquier magnitud, manteniendo una actitud nulamente colaborativa y respetuosa en el aula.	No demuestro aprecio por la utilidad de las funciones trigonométricas para ángulos de cualquier magnitud, manteniendo una actitud nulamente colaborativa y respetuosa en el aula.

Bloque VIII. Aplica la ley de los senos y cosenos

Atributos de las competencias genéricas:

- 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
- 5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
- 5.4 Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez.
- 5.6 Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para procesar e interpretar información.
- 6.1 Elige las fuentes de información más relevantes para un propósito específico y discrimina entre ellas de acuerdo a su relevancia y confiabilidad.
- 7.1 Define metas y da seguimiento a sus procesos de construcción de conocimientos.
- 8.1 Propone manera de solucionar un problema y desarrolla un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.
- 8.2 Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.
- 8.3 Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.

Competencias disciplinares básicas

- 1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
- 2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
- 3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
- 4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
- 5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
- 6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
- 7. Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia.
- 8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.



Dinamización y motivación

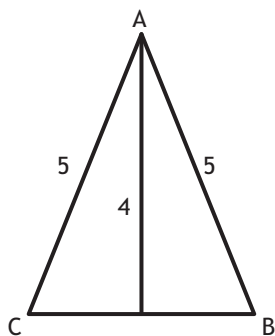
En éste bloque analizaremos dos conceptos muy importantes en el estudio de la trigonometría, ya que gracias a su aplicación se han podido dar solución a varios problemas de la vida cotidiana. Imagínate en épocas pasadas como era posible determinar distancias entre dos lugares que no fueran fáciles de visualizar o de transitar. Como un barco puede determinar cuántos kilómetros recorrería de un puerto a otro si el puerto de donde sale forma un triángulo cualquiera con los otros dos. Como dos aviones (sus pilotos) saben a qué distancia se encuentran de algún aeropuerto u otros aviones para no chocar en el aire. Dichos ejemplos presentan el problema de tener que calcular distancias entre puntos específicos que formaban triángulos.

En el bloque anterior estudiaste un concepto para determinar lados y ángulos de un triángulo, pero se trataba, específicamente, de rectángulos. Los conceptos estudiados fueron el teorema de Pitágoras y las funciones trigonométricas, el problema surgía de que, al querer determinar las distancias entre ciertos puntos, no todos formaban triángulos rectángulos. La mayoría de las veces se formaban triángulos oblicuángulos, por lo que se tenía que encontrar un procedimiento que fuera aplicado a este tipo de triángulos. Dicho concepto recibe el nombre de “ley de senos y cosenos”. Ésta ley la deduciremos, analizaremos y aplicaremos en el desarrollo de éste bloque, en aquellos problemas en los que sea necesario encontrar el valor de algún lado o ángulo de un triángulo, que no sea rectángulo; éste problema se presenta muy a menudo en la industria de la construcción sobre todo en topografía, en el cual, al realizar los trazos y que, por algún motivo, no se pudiera medir alguna distancia, entonces se aplica dicho concepto para hallarla. Por lo tanto, vamos a entrar de lleno a nuestro último bloque del semestre.

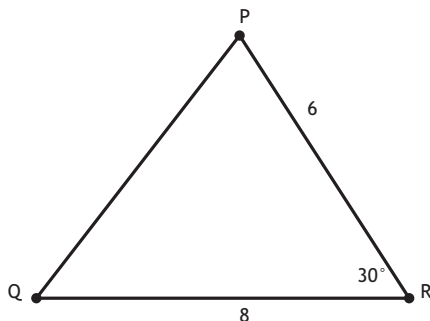


Al igual que en los bloques anteriores, antes de realizar el desarrollo de criterios para éste bloque, se te presenta una serie de ejercicios que te servirán para determinar el nivel con el que estás iniciando el bloque, recuerda que es muy importante que resuelvas dichos ejercicios y te autoevalúes para determinar tu nivel, ya que el objetivo es superar dicho nivel, al terminar el bloque.

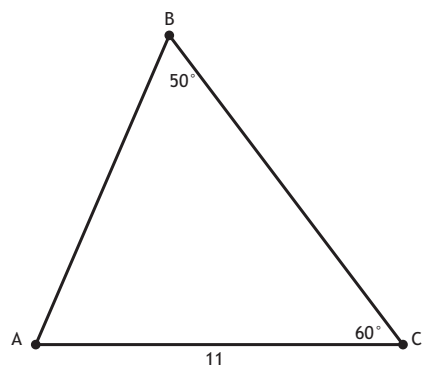
1. Determina el perímetro del siguiente triángulo isósceles.



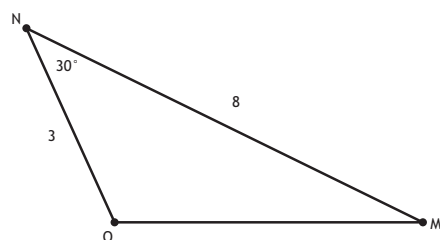
2. Determina el área del siguiente triángulo.



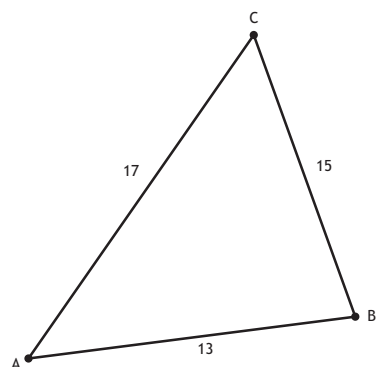
3. Dado el siguiente triángulo determina el valor de los datos faltantes.



4. Determina el valor del lado faltante en el siguiente triángulo.



5. Encuentra el valor de cada uno de los ángulos interiores en el siguiente triángulo.



Al terminar de resolver la actividad, la revisarán con tu profesor tomando en cuenta las respuestas y las respectivas justificaciones que él proporcione. Así, ubica en qué nivel de comprensión te encuentras de acuerdo a la tabla siguiente, con el objeto de reflexionar y, por supuesto, mejorar.

Importante: Tu profesor sólo va a examinar tus respuestas y va a dar el porqué de las justificaciones. No se darán más detalles de las respuestas y argumentos, pues algunos de ellos se analizarán en éste bloque y además nos servirán al final del mismo.



Reflexión de inicio de bloque		
Calificación: 1 punto por respuesta correcta y 1 punto por argumentación correcta	Coloca una X en el puntaje que alcanzaste	Significado de cada nivel alcanzado
Nivel estratégico	9 a 10	Comprendes y aplicas de manera correcta las funciones trigonométricas y las relaciones que se presentan en cualquier triángulo para la solución de problemas.
Nivel autónomo	7 a 8	Comprendes y aplicas las funciones trigonométricas y las relaciones que se presentan en cualquier triángulo.
Nivel básico	5 a 6	Recuerdas algunas nociones de las funciones trigonométricas y las relaciones en cualquier triángulo.
Nivel inicial	2 a 4	Haz comenzado con algunas nociones sobre las funciones trigonométricas y su relación en los triángulos.
Nivel pre-formal	0 a 1	No tienes nociones sobre las funciones trigonométricas y las relaciones que se presentan en un triángulo cualquiera,

Recuerda el nivel en que te encuentras en éste momento ya que al final del bloque retomaremos éste aspecto importante de tus avances.

Ahora que ya te autoevaluaste ya estamos listos para realizar el desarrollo de los criterios para éste bloque.

Sesión A: Ley de Senos y Cosenos.



Desarrollo de saberes

Conocimientos:

- Identifico las leyes de senos y cosenos así como los elementos necesarios para la aplicación de una u otra.

Habilidades:

- Distingo situaciones en las que es posible aplicar la ley de los senos o la ley de los cosenos, identificando los requerimientos de cada una.
- Expreso en lenguaje ordinario o matemático las leyes de senos o cosenos.
- Aplico las leyes de senos y cosenos en la resolución de problemas.

Actitudes y valores

- Aprecio la utilidad de las leyes de senos y cosenos para la resolución de triángulos oblicuángulos.
- Valoro la importancia de las leyes de senos y cosenos para solucionar problemas teóricos o prácticos que involucren triángulos no rectángulos.
- Actúo de manera propositiva al resolver los ejercicios planteados.
- Propongo formas creativas de solucionar un problema.



Contextualización

En bloques anteriores analizaste el concepto de las funciones trigonométricas y el teorema de Pitágoras, no te olvides que, el aspecto principal de cada uno de ellos, es que nos servían para hallar, mediante las funciones trigonométricas, los valores de lados y ángulos en un triángulo rectángulo. Solamente lo podemos aplicar en esa clase de triángulos. Sin embargo, ya mencionamos que en la industria de la construcción así como en otros campos donde se aplican demasiado triángulos, que no son rectángulos, es indispensable tener que hallar la medida de algún lado o una inclinación. Toma en cuenta ahora lo siguiente, ¿podrías calcular la distancia a la que se encuentran tres puntos específicos de tu escuela, los cuales no forman un triángulo rectángulo? ¿Cómo realizarías éste proceso? ¿De qué elementos te basarías para lograrlo? Para ayudarte a darle solución a éstas preguntas, se te pide resuelvas los siguientes problemas.

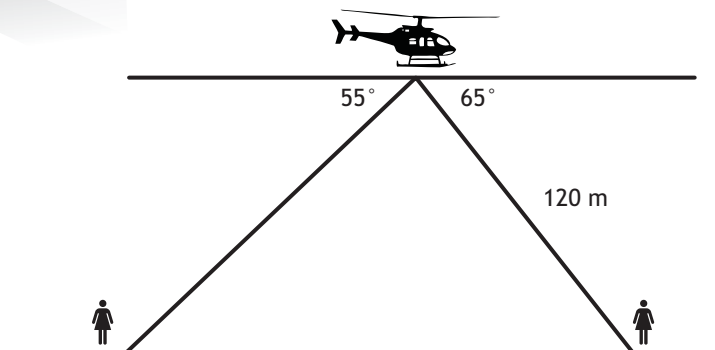


Problematización

Actividad de aprendizaje 1

Desde lo alto de un helicóptero, se observa a dos personas en lados opuestos del mismo. Los ángulos de depresión hacia dichas personas son de 65° y 55° , respectivamente. Además la distancia desde el helicóptero a la primera de ellas es de 120 m. ahora responde las siguientes cuestiones:





- a) ¿A qué clasificación de los triángulos pertenece el que nos presentan en el planteamiento del problema?

- b) ¿Qué datos conocemos en el problema?

- c) ¿Se pueden aplicar las funciones trigonométricas o el teorema de Pitágoras para resolver el problema, dado que no se trata de un triángulo rectángulo?

- d) ¿Cuál es la distancia del helicóptero hacia la otra persona?

- e) Empleando las funciones trigonométricas, ¿Puedes calcular la distancia solicitada? Describe el proceso que emplearías para conseguirla.

Comparte con los compañeros de clase tus observaciones y realicen una lluvia de ideas que realmente los procesos empleados. A partir de esto responde lo siguiente: ¿Alguno pudo determinar la distancia trabajando con triángulos oblicuángulos?

Seguramente tú o alguno de tus compañeros pudieron darle solución al problema empleando las funciones trigonométricas para triángulos rectángulos trazando la altura del triángulo que nos representaba el problema; sin embargo el procedimiento utilizado resultó ser un poco engorroso por tener que realizar trazos auxiliares y resolver expresiones algebraicas. La pregunta a resolver ahora es ¿Existe algún procedimiento o regla que nos permita obtener el valor de algún lado o ángulo en un triángulo oblicuángulo sin utilizar las funciones trigonométricas? La respuesta es afirmativa y para ello utilizaremos la ley de senos y cosenos, las cuales deduciremos a continuación.



Desarrollo de criterios

La ley de los Senos

Lo que haremos a continuación será deducir la ley de los senos la cual nos ayudará a determinar el valor de un lado o la medida de un ángulo en un triángulo oblicuángulo, para ello consideraremos la siguiente figura:

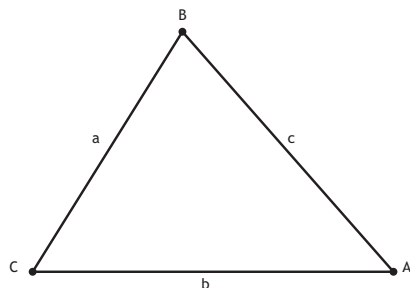


Figura 8.1

Es importante que observes de qué manera se tienen definidos los elementos del triángulo en la figura, observa que los ángulos del triángulo que corresponden a cada vértice, se definen con letras mayúsculas y la medida de los lados se definen con letras minúsculas. Los lados del triángulo se nombran con la misma letra a la que corresponde su vértice opuesto, es importante que consideres éste aspecto, porque al resolver los ejercicios de aplicación se tiene que cuidar dicho orden, en caso contrario no se estarían cumpliendo las propiedades que vamos a deducir.

Ya que tenemos al triángulo, lo que haremos ahora será trazar la altura desde el vértice B al lado AC y al punto de intersección le llamamos D, por lo que la figura nos quedará como sigue:

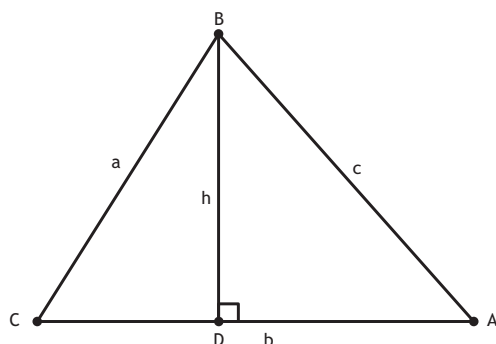


Figura 8.2

Al trazar la altura podemos observar que se forman dos triángulos rectángulos, el triángulo ABD y el triángulo CBD, lo que haremos ahora será hallar el valor de la función seno para los vértices A y C, en cada uno de los triángulos, lo que nos dará:

$$\text{Sen} A = \frac{BD}{AB} = \frac{h}{c} \text{ despejamos para } h \text{ y obtendremos } h = (c)(\text{Sen } A)$$

$$\text{Sen} C = \frac{BD}{BC} = \frac{h}{a} \text{ despejamos para } h \text{ y obtendremos } h = (a)(\text{Sen } C)$$

Las expresiones obtenidas son las siguientes $h = (c)(\text{Sen} A)$ y $h = (a)(\text{Sen} C)$ ambas

Recuerda que la función seno está definida de la siguiente manera

$$\text{Sen } A = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

tienen como término común a h , entonces lo que haremos será igualar dichas expresiones y obtendremos:

$(a)(\text{Sen}C) = (c)(\text{Sen}A)$ despejamos y obtenemos la siguiente proporción

$$\frac{a}{\text{Sen}A} = \frac{c}{\text{Sen}C}$$

Para completar la relación deseada, lo que haremos ahora será trazar la altura desde el vértice C al lado AB del triángulo ABC. Al punto de intersección le llamaremos E por lo que nos quedará como sigue:

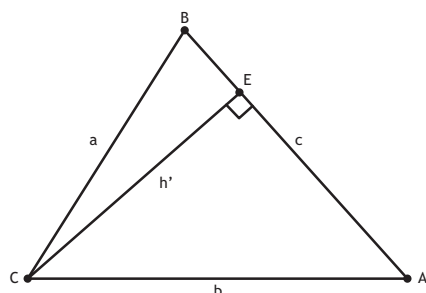


Figura 8.3

Del mismo modo que en el anterior, se formaron dos triángulos rectángulos, dichos triángulos son el ACE y el BCE, lo que haremos a continuación, será determinar el valor de la función seno para los vértices A y B en cada uno de los triángulos, de donde obtendremos:

$$\text{Sen}A = \frac{CE}{AC} = \frac{h'}{b} \text{ despejamos para } h' \text{ y obtendremos } h' = (b)(\text{Sen}A)$$

$$\text{Sen}B = \frac{CE}{BC} = \frac{h'}{a} \text{ despejamos para } h' \text{ y obtendremos } h' = (a)(\text{Sen}B)$$

Las expresiones obtenidas son las siguientes $h' = (b)(\text{Sen}A)$ y $h' = (a)(\text{Sen}B)$ ambas tienen como término común a h' lo que haremos será igualar dichas expresiones y obtendremos:

$(a)(\text{Sen}B) = (b)(\text{Sen}A)$ despejamos y obtenemos la siguiente proporción

$$\frac{a}{\text{Sen}A} = \frac{b}{\text{Sen}B} \text{ Ahora tomando en cuenta las proporciones obtenidas en cada uno de los casos}$$

tenemos $\frac{a}{\text{Sen}A} = \frac{b}{\text{Sen}B}$ y $\frac{a}{\text{Sen}A} = \frac{c}{\text{Sen}C}$ vemos que ambas tienen en común a la razón $\frac{a}{\text{Sen}A}$

por lo tanto tienen la misma proporción, y al ser iguales obtendremos $\frac{a}{\text{Sen}A} = \frac{b}{\text{Sen}B} = \frac{c}{\text{Sen}C}$

Si analizamos el resultado obtenido, observamos que la proporción se encuentra en términos del valor de los lados y del valor de los senos, de los vértices correspondientes, a los lados opuestos, de aquí que definimos la ley de los senos de la siguiente manera:

Ley de los senos: “En todo triángulo los lados son proporcionales a los

senos de sus ángulos opuestos” es decir: $\frac{a}{\text{Sen}A} = \frac{b}{\text{Sen}B} = \frac{c}{\text{Sen}C}$

Ya que hemos obtenido la relación anterior, lo que haremos a continuación, será aplicarla en ejercicios para analizar su utilización, veamos los siguientes ejemplos:

Ejemplos:

1. Dada la siguiente figura encuentra el valor de los datos faltantes:

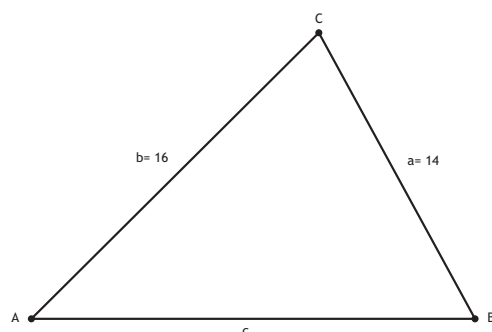


Figura 8.4

Solución:

Los datos faltantes en la figura son: el lado c y los ángulos $\angle B$ y $\angle C$. Aplicando la ley de los senos, tendremos:

$$\frac{a}{\text{Sen}A} = \frac{b}{\text{Sen}B} = \frac{c}{\text{Sen}C} \quad \text{al sustituir los valores nos quedará} \quad \frac{14}{\text{Sen}55^\circ} = \frac{16}{\text{Sen}B} = \frac{c}{\text{Sen}C}$$

donde podemos notar que la tercera parte de la proporción no la podemos aplicar ya que consta de dos valores desconocidos. La primera y segunda parte si es posible uti-

lizarla. Trabajaremos, entonces, con $\frac{14}{\text{Sen}55^\circ} = \frac{16}{\text{Sen}B}$, despejamos para el $\text{Sen}B$ y ten-

dremos $\text{Sen}B = \frac{(14)(\text{Sen}55^\circ)}{16} = .93$ para hallar el valor del ángulo B utilizaremos la función inversa del seno, por lo que tendremos $\angle B = \text{Sen}^{-1}(.93) = 68.43^\circ$. Ya que conocemos el valor del ángulo B utilizaremos la propiedad de la suma de los ángulos interiores en un triángulo, para hallar el valor del ángulo C , así tendremos que $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$, sustituimos los valores conocidos y tendremos $55^\circ + 68.43^\circ + \angle C = 180^\circ$ despejando tendremos $\angle C = 180^\circ - 55^\circ - 68.43^\circ = 56.57^\circ$, por último para determinar el valor del lado

c utilizaremos la proporción $\frac{14}{\text{Sen}55^\circ} = \frac{c}{\text{Sen}56.57^\circ}$ despejamos para hallar el valor de c

de donde $c = \frac{(14)(\text{Sen}56.57^\circ)}{\text{Sen}55^\circ} = 14.26$ por lo tanto, los valores de los datos faltantes son $\angle B = 68.43^\circ$; $\angle C = 56.57^\circ$ y $c = 14.26$



1. Dados los siguientes ángulos y lados de un triángulo $\angle A = 68^\circ$, $\angle B = 52^\circ$ y $c = 38$ dibujar al triángulo y hallar los datos faltantes:

Solución: Recordemos que para dibujar al triángulo, los lados se nombran con la misma letra que su ángulo opuesto, pero en minúscula, por lo tanto la figura nos quedará como sigue:

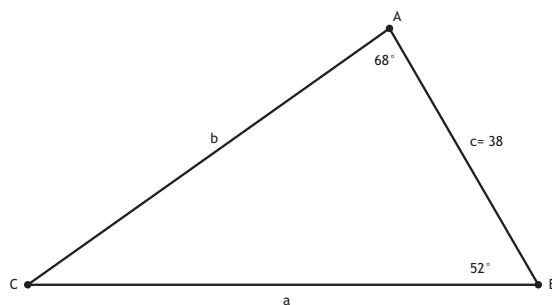


Figura 8.5

Los datos que nos piden hallar son los lados a y b y el $\angle C$, aplicando la ley de los senos tendremos:

$$\frac{a}{\text{Sen}A} = \frac{b}{\text{Sen}B} = \frac{c}{\text{Sen}C}$$
 de donde $\frac{a}{\text{Sen}68^\circ} = \frac{b}{\text{Sen}52^\circ} = \frac{38}{\text{Sen}C}$ al elegir cualquiera de las proporciones que se forman, nos quedarán dos incógnitas en cada una de ellas y no sería posible encontrar su solución, por lo que tenemos que verificar si algún dato que se desconoce, es posible hallarlo antes de utilizar la ley, vemos que si es posible hacerlo con el $\angle C$ por lo tanto lo que haremos primero será determinar el valor del $\angle C$ ya que como conocemos el valor de los otros dos ángulos, aplicamos la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo y obtendremos:

$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ sustituimos los valores de los ángulos conocidos y nos quedará

$$52^\circ + 68^\circ + \angle C = 180^\circ \text{ despejamos y obtenemos el valor del } \angle C$$

$$\angle C = 180^\circ - 52^\circ - 68^\circ$$

$$\angle C = 60^\circ$$

Ya teniendo el valor del ángulo, la relación nos quedará de la siguiente forma:

$$\frac{a}{\text{Sen}68^\circ} = \frac{b}{\text{Sen}52^\circ} = \frac{38}{\text{Sen}60^\circ}$$

Consideramos entonces a la proporción $\frac{a}{\text{Sen}68^\circ} = \frac{38}{\text{Sen}60^\circ}$ despejamos a en la proporción y obtenemos $a = \frac{(38)(\text{sen}68^\circ)}{\text{sen}60^\circ} = 40.68$

Consideramos ahora a la proporción $\frac{b}{\text{Sen}52^\circ} = \frac{38}{\text{Sen}60^\circ}$ despejamos b en la proporción y obtenemos $b = \frac{(38)(\text{sen}52^\circ)}{\text{sen}60^\circ} = 34.57$

Por lo tanto los valores de los datos faltantes son $a = 40.68$, $b = 34.57$ y $\angle C = 60^\circ$

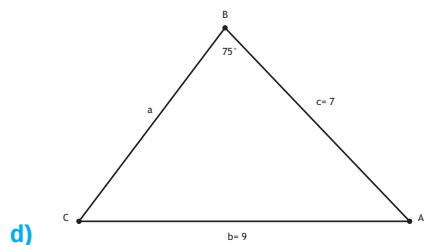
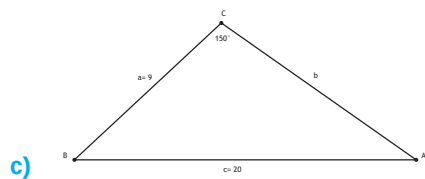
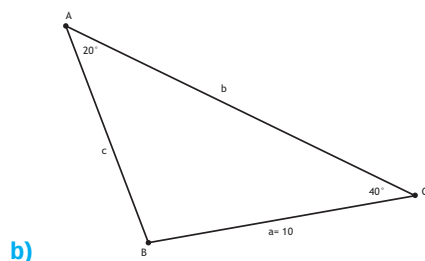
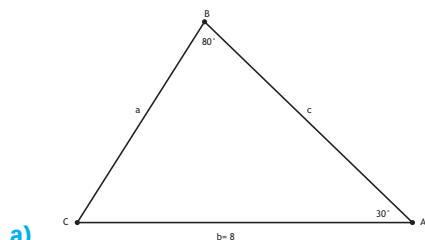
Después de haber analizado los siguientes ejemplos, se te pide resolver la si-

guiente actividad en la cual asentarás los conceptos adquiridos y te servirá para despejar dudas. Con tus compañeros, forma un equipo de 3 personas, trabajen, y, al final, revisen los resultados obtenidos para que las aclaraciones y dudas que surjan sean resueltas por tu profesor.

Actividad de aprendizaje 2

Resuelve en tu cuaderno los siguientes ejercicios.

1. Dadas las siguientes figuras encuentra los datos faltantes utilizando la ley de los senos:



2. Dados los siguientes datos, dibuja el triángulo correspondiente y determina los datos faltantes en cada uno de los siguientes incisos:

- a) $\angle A = 66^\circ$; $\angle B = 56^\circ$ y $a = 12$
- b) $\angle A = 50^\circ$; $\angle C = 80^\circ$ y $c = 5$
- c) $\angle A = 66^\circ$; $b = 6$ y $a = 12$
- d) $\angle B = 66^\circ$; $b = 6$ y $c = 8$





Contextualización

Después de haber realizado la actividad anterior, te recordamos que el objetivo, en éste bloque, es determinar el valor de los lados o ángulos faltantes en un triángulo oblicuángulo, es decir, un triángulo cualquiera. En los ejemplos y ejercicios anteriores, aplicamos la ley de los senos y pudimos hallar valores de lados y de ángulos faltantes, sin embargo no olvidemos que en un principio mencionamos que analizaremos a dos leyes, la de los senos y la de los cosenos, la pregunta ahora a resolver es ¿Por qué necesitamos deducir la ley de los cosenos si con la ley de los senos pudimos calcular el valor de lados y ángulos faltantes en un triángulo oblicuángulo? Los siguientes triángulos nos ayudarán a comprender el porqué de la necesidad de aplicar dicha ley. Antes que nada observa que en los ejemplos y ejercicios anteriores, te proporcionaban datos de dos lados y un ángulo o dos ángulos y un lado, y se pudo hallar el valor de los datos faltantes. A continuación se te presentan dos situaciones diferentes a los ejercicios anteriores, veamos que sucede.

Situación 1. En éste triángulo se te proporcionan los valores de dos lados y un ángulo.

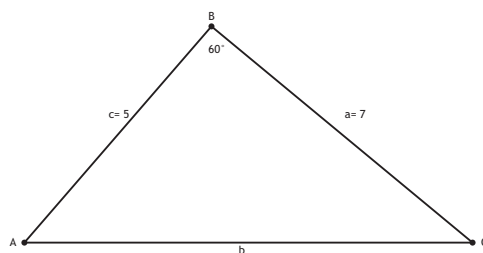


Figura 8.6

Al aplicar la ley de los senos con los datos que tenemos, nos quedará lo siguiente:

$\frac{a}{\text{Sen}A} = \frac{b}{\text{Sen}B} = \frac{c}{\text{Sen}C}$ de donde $\frac{7}{\text{Sen}A} = \frac{b}{\text{Sen}60^\circ} = \frac{5}{\text{Sen}C}$ anotamos todas las proporciones que se forman, las cuales son: $\frac{7}{\text{Sen}A} = \frac{b}{\text{Sen}60^\circ}$, $\frac{b}{\text{Sen}60^\circ} = \frac{5}{\text{Sen}C}$ y $\frac{7}{\text{Sen}A} = \frac{5}{\text{Sen}C}$ en cada una de ellas nos quedan dos incógnitas, por lo tanto no tienen solución; necesitamos conocer el valor del lado b o la medida de los ángulos $\angle A$ y $\angle C$ lo cual no es posible, así, no podríamos darle solución al triángulo si sólo utilizamos la ley de los senos.

Situación 2. Ahora se te proporciona un triángulo en el que se conoce el valor de sus tres lados, la figura es la siguiente:

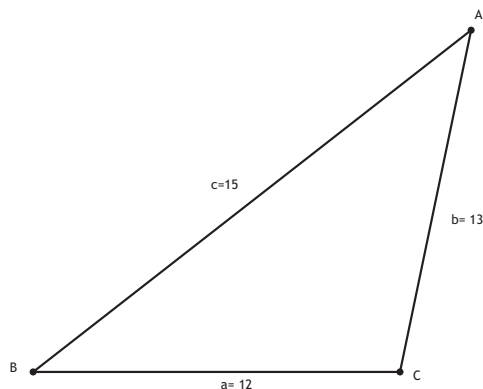


Figura 8.7

Del mismo modo, al plantearnos la ley de los senos con los datos que tenemos, nos quedará lo siguiente:

$$\frac{a}{\text{Sen}A} = \frac{b}{\text{Sen}B} = \frac{c}{\text{Sen}C} \quad \text{de donde} \quad \frac{12}{\text{Sen}A} = \frac{13}{\text{Sen}B} = \frac{15}{\text{Sen}C}$$

a continuación anotamos todas las proporciones que se forman las cuales son $\frac{12}{\text{Sen}A} = \frac{13}{\text{Sen}B}$, $\frac{13}{\text{Sen}B} = \frac{15}{\text{Sen}C}$

y $\frac{12}{\text{Sen}A} = \frac{15}{\text{Sen}C}$ y en cada una de ellas nos quedan dos incógnitas, por lo que no podemos darle solución; necesitaríamos conocer el valor de los ángulos interiores del triángulo lo cual no es posible, por lo tanto, no podríamos darle solución al problema si utilizamos la ley de los senos.

Estos son casos en los que es necesario encontrar otra propiedad que se adapte a los datos proporcionados, ya que no siempre se tendrán triángulos con las mismas características de los que se resolvieron en el primero, hay situaciones en las que se tienen que adaptar a las circunstancias del medio, por ejemplo, que pasaría si un constructor no pudiera medir algún lado de una estructura con forma de triángulo, dado que ésta no le permite hacerlo si se encuentra por ejemplo dentro del algún terreno no transitable y conoce solo datos que no le permiten, con la ley de los senos, darle solución al problema, es por ello que los estudios matemáticos son importantes para la solución de diversos problemas.

A continuación lo que haremos será despejar el concepto de la ley de los cosenos y posteriormente le daremos solución a las situaciones que no pudimos resolver, veamos en qué consiste la ley.



Desarrollo de saberes

La ley de los cosenos

Para empezar con el desarrollo del concepto, consideremos el siguiente triángulo:

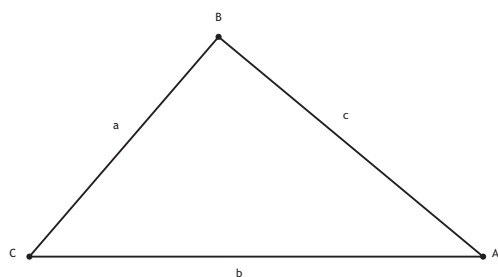


Figura 8.8

Trazamos la altura desde el vértice B al lado AC y al punto de intersección le llamamos D.

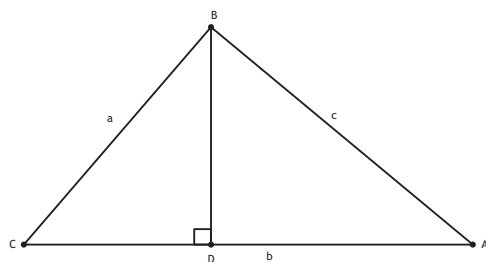


Figura 8.9

Teorema de Pitágoras:
"El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos"

Recuerda que la función seno está definida de la siguiente manera
 $\text{Sen } A = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$

Al trazar la altura se forman dos triángulos rectángulos los cuales son los triángulos ABD y BCD, para el triángulo ABD aplicamos el teorema de Pitágoras con lo cual obtenemos la siguiente expresión: $(AB)^2 = (AD)^2 + (BD)^2$. Ahora para el triángulo BCD hallamos las funcio-

nes trigonométricas del seno y coseno para el ángulo $\angle C$, de donde tendremos $\text{Sen}C = \frac{BD}{BC}$

de donde $BD = (BC)(\text{Sen}C)$ del mismo modo $\text{Cos}C = \frac{CD}{BC}$ de donde $CD = (BC)(\text{Cos}C)$ tomando en cuenta éstas expresiones y analizando la figura tendremos lo siguiente:

$AD = AC - CD$ sustituyendo la igualdad $CD = (BC)(\text{Cos}C)$ nos quedará $AD = AC - (BC)(\text{Cos}C)$.

En la igualdad del teorema de Pitágoras $(AB)^2 = (AD)^2 + (BD)^2$ vamos a sustituir las siguientes igualdades: $BD = (BC)(\text{Sen}C)$ y $AD = AC - (BC)(\text{Cos}C)$ por lo que nos quedará:

$(AB)^2 = (AC - (BC)(\text{Cos}C))^2 + ((BC)(\text{Sen}C))^2$ elevando al cuadrado tendremos:

$(AB)^2 = (AC)^2 - 2(AC)(BC)(\text{Cos}C) + (BC)^2(\text{Cos}C)^2 + (BC)^2(\text{Sen}C)^2$ escojamos términos

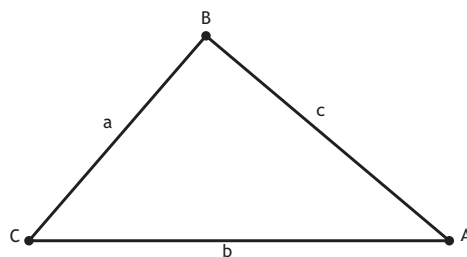
$(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2(\text{Cos}C)^2 + (BC)^2(\text{Sen}C)^2 - 2(AC)(BC)(\text{Cos}C)$ agrupamos términos

$(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2((\text{Cos}C)^2 + (\text{Sen}C)^2) - 2(AC)(BC)(\text{Cos}C)$ sustituimos la igualdad $\text{Sen}^2 A + \text{Cos}^2 A = 1$ y obtenemos:

$(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2(1) - 2(AC)(BC)(\text{Cos}C)$ lo que se reduce a $(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2 - 2(AC)(BC)(\text{Cos}C)$ al sustituir el valor de cada uno de los lados, es decir, $AB = c$; $BC = a$ y $AC = b$ nos quedará $(c)^2 = (b)^2 + (a)^2 - 2(b)(a)(\text{Cos}C)$ lo cual definimos como la ley de los cosenos.

Al trazar las otras dos alturas en el triángulo y realizar el mismo procedimiento que seguimos, obtendremos las siguientes igualdades $(a)^2 = (b)^2 + (c)^2 - 2(a)(c)(\text{Cos}A)$ y $(b)^2 = (a)^2 + (c)^2 - 2(a)(c)(\text{Cos}B)$ tomando en cuenta las tres igualdades obtenidas, definiremos la ley de los cosenos como sigue:

Ley de los cosenos: "En todo triángulo oblicuángulo, el cuadrado de uno de los lados es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el doble producto de dichos lados por el coseno del ángulo comprendido entre ellos" es decir tenemos lo siguiente:



$$(a)^2 = (b)^2 + (c)^2 - 2(b)(c)(\text{Cos}A)$$

$$(b)^2 = (a)^2 + (c)^2 - 2(a)(c)(\text{Cos}B)$$

$$(c)^2 = (a)^2 + (b)^2 - 2(a)(b)(\text{Cos}C)$$

Figura 8.10

Ya que definimos la ley de los cosenos, lo que haremos ahora será resolver las situaciones anteriores que no pudimos hacerlo tomando en cuenta a la ley de los senos, retomemos cada una de ellas. En la primera teníamos lo siguiente:

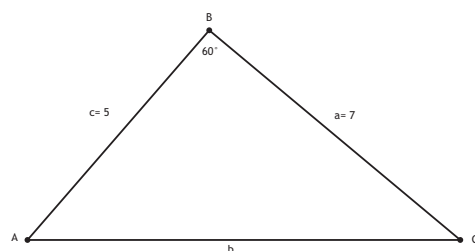


Figura 8.11

Solución: Lo que haremos será aplicar la ley de los cosenos para el lado AC, por lo tanto utilizaremos la siguiente relación $(b)^2 = (a)^2 + (c)^2 - 2(a)(c)(\cos B)$ al sustituir los valores de los lados y del ángulo tenemos $(b)^2 = (7)^2 + (5)^2 - 2(7)(5)(\cos 60^\circ)$ resolvemos y tendremos:

$$b^2 = 49 + 25 - 35$$

$$b^2 = 39$$

$$b = \sqrt{39}$$

$$b = 6.24$$

Ya que conocemos el valor del lado AC, podemos utilizar la ley de los senos, y así tendremos

$$\frac{7}{\text{Sen} A} = \frac{6.24}{\text{Sen} 60^\circ} \text{ resolviendo tendremos:}$$

$$\text{Sen} A = \frac{(7)(\text{Sen} 60^\circ)}{6.24} = .97$$

$$\angle A = \text{Sen}^{-1}(.97)$$

$$\angle A = 75.93^\circ$$

Ya que conocemos el valor del ángulo A podemos encontrar el valor del ángulo

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

$$\angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B$$

$$\angle C = 180^\circ - 75.93^\circ - 60^\circ$$

$$\text{faltante } \angle C = 44.07^\circ$$

Por lo tanto, los datos que faltaban en el triángulo tienen los siguientes valores $b = 5.73$; $\angle A = 75.93^\circ$ y $\angle C = 44.07^\circ$

Ahora revisemos la segunda situación en la que nos daban los tres lados del triángulo y en la cual al sustituir en la ley de los senos las proporciones que nos quedaban, tenían dos valores desconocidos por lo que no se podía resolver, lo que haremos ahora será analizar el mismo triángulo con la ley de los cosenos y veamos que sucede, la figura que nos dieron fue la siguiente:

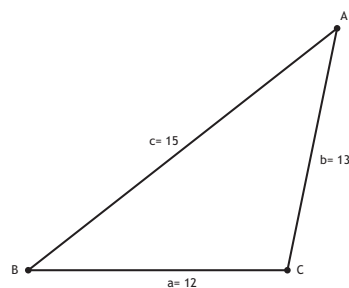


Figura 8.12

Sustituimos los valores para la siguiente relación $(a)^2 = (b)^2 + (c)^2 - 2(b)(c)(\cos A)$ lo que nos queda $(12)^2 = (13)^2 + (15)^2 - 2(13)(15)(\cos A)$ podemos darnos cuenta de que al sustituir los valores, en la expresión nos queda solamente un valor desconocido el cual es el ángulo A , por lo tanto podemos despejar la ecuación para encontrar el valor de dicho ángulo, entonces tendremos lo siguiente:

$$(12)^2 = (13)^2 + (15)^2 - 2(13)(15)(\cos A)$$

$$144 = 169 + 225 - (390)(\cos A)$$

$$144 - 169 - 225 = -(390)(\cos A)$$

$$-250 = -(390)(\cos A)$$

$$\cos A = \frac{-250}{-390} = .64$$

$$\angle A = \cos^{-1}(.64) = 50.20^\circ$$

Ya que conocemos el valor del ángulo A ahora podemos utilizar la ley de los senos para encontrar los valores faltantes, podemos usar la relación $\frac{12}{\sin A} = \frac{13}{\sin B}$ sustituimos el valor encontrado y resolvemos $\frac{12}{\sin 50.20^\circ} = \frac{13}{\sin B}$ de donde $\sin B = \frac{(13)(\sin 50.20^\circ)}{12} = .83$ por lo tanto $\angle B = \sin^{-1}(.83) = 56.09^\circ$

Ahora, usamos la propiedad de la suma de los ángulos interiores del triángulo,

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

$$\angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B$$

$$\angle C = 180^\circ - 50.20^\circ - 56.09^\circ$$

para hallar el faltante, tendremos $\angle C = 73.71^\circ$

Por lo tanto los valores de los datos desconocidos son los siguientes $\angle A = 50.20^\circ$; $\angle B = 56.09^\circ$ y $\angle C = 73.71^\circ$

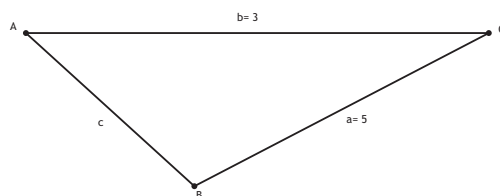
Como podrás darte cuenta fuimos capaces de darle solución a los problemas, utilizando la ley de los cosenos en conjunto con la ley de los senos (en un principio no pudimos resolver utilizando solamente la ley de los senos), de hecho, en los ejercicios correspondientes a determinar el valor de algún lado o de algún ángulo en un triángulo oblicuángulo, se usa de manera conjunta la ley de los senos y los cosenos como lo hicimos en éstas dos últimas situaciones. Una sugerencia es que utilices primero la ley de los senos, ya que su procedimiento de solución es más sencillo, en caso contrario, utilizaremos la ley de los cosenos y enseguida usaríamos la ley de los senos, de ser necesario.

A continuación se te presentará una serie de ejercicios para reforzar las propiedades adquiridas en ésta parte del bloque, se te pide que lo resuelvas en equipo, y posteriormente, analices los resultados en la pizarra con la ayuda de tu profesor para la aclaración de dudas.

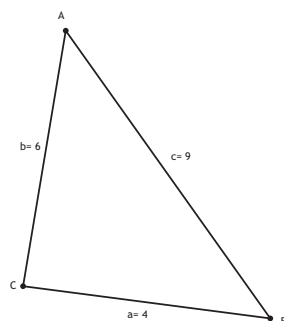
Actividad de aprendizaje 3

Resuelve en tu cuaderno los siguientes ejercicios.

3. Dadas las siguientes figuras encuentra el valor de los datos faltantes.



a)



b)

4. Dados los siguientes datos en cada inciso, dibuja en triángulo y encontrar los datos faltantes:

$b = 4; c = 7$ y $\angle A = 72^\circ$

$a = 5, b = 9$ y $c = 11$

A continuación se te presenta una serie de ejercicios de aplicación, correspondientes a los conceptos adquiridos en este bloque, resuélvelos tomando en cuenta las indicaciones de tu profesor, considera todas las propiedades y relaciones para darle solución a los ejercicios.



Realimentación

Actividad de aprendizaje 4

Reúnete en equipo y resuelvan lo siguiente.

1. Aplicando las leyes de senos y cosenos, dibuja la figura y resuelve correctamente los siguientes triángulos oblicuángulos, encontrando el valor de los elementos faltantes:

a) $\angle A = 35^\circ, \angle C = 70^\circ, a = 12$.

b) $c = 8, \angle A = 45^\circ$ y $\angle B = 68^\circ$.

c) $a = 34, \angle A = 35^\circ, \angle B = 30^\circ$.

d) $a = 7, b = 12, \angle C = 45^\circ$.

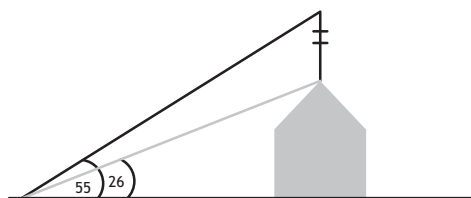
e) $b = 9, c = 7, \angle A = 60^\circ$.

f) $a = 42, c = 37, \angle C = 52^\circ$.

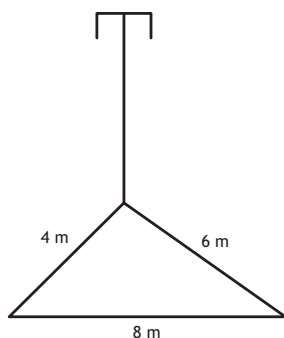


2. Resuelve correctamente las siguientes situaciones.

- Dos personas parten de un mismo punto, tomando direcciones que forman un ángulo de 50° . Después de un tiempo, han avanzado 15 y 20 metros respectivamente. ¿A qué distancia se encuentran una de la otra?
- El ángulo de la cúspide de un triángulo isósceles mide 73° y su base 40cm. Determina el perímetro del triángulo.
- Un bebé mira la cara de su papá, con un ángulo de elevación de $25^\circ 30'$. El bebé gatea y logra acercarse 3 m, lo que ocasiona que su ángulo de elevación se modifique a 31° . ¿A qué distancia de su papá queda el bebé si la altura del papá es de 1.90 m? ¿A qué distancia realizó el bebé la primera observación? Desde cierta posición un pájaro observa dos gusanos en el piso, los cuales están separados 6 m. Si las distancias del ave a cada gusano son iguales a 8m. Calcula el ángulo que forman las visuales del pájaro hacia ambos animalitos. ¿A qué altura se encuentra el pájaro?
- Determina el área de un círculo circunscrito a un pentágono regular, si la medida de la menor de sus diagonales mide 12 cm.
- Una antena de 3 m está fijada en lo más alto de una casa. Desde un punto de observación Pablo midió los ángulos de elevación a los puntos más altos y más bajos de la antena, que son 55° y 26° respectivamente. Halla la altura de la casa.



- Un poste de la Comisión Federal de Electricidad de 8 m de altura se encuentra en la cima de una montaña como se muestra en la figura. Halla la distancia de la base de la montaña a la parte más alta del poste.



En ésta parte, el propósito es que resuelvas, individualmente, los 5 ejercicios de la Evaluación diagnóstica. A cada una de tus operaciones o soluciones debes darle una argumentación sólida de por qué se debe realizar de esa manera el ejercicio. Una vez que hayas concluido y que estés convencido de lo que has realizado, consulta con tu profesor las respuestas obtenidas para que analice el porqué de tus argumentaciones. Utiliza la misma regla vista en la reflexión, para dar los puntajes y ubicarte. Todo esto servirá para que valores a qué nivel te encuentras, al terminar el bloque. Así que a continuación coloca una X en el nivel apropiado, y continúa tu preparación.

Me encuentro en este nivel.				
Pre-formal	Inicial	Básico	Autónomo	Estratégico

Como mencionamos en un principio, dependiendo de la situación que se nos presente, es necesario encontrar una relación, propiedad o ley que nos ayude a resolver el problema. En este bloque estudiamos a dos leyes, la de los senos y la de los cosenos, sin embargo existe una ley más que no vimos en este curso y es la correspondiente a la ley de las tangentes, se te recomienda que investigues dicha ley y que analices en qué casos se utiliza y de ser posible explícalo a tus compañeros

Mi proyecto del bloque

Proyecto: Estimado de costos de gasolina
Problema: Determinar un estimado en recorrido, así como el costo de gasolina, para viajar de tu ciudad a dos o más lugares específicos del estado.
Duración: Una semana.
Puntuación: 15 puntos.
Competencias: Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos en la aplicación de las propiedades de los ángulos y diagonales de un polígono.
Actividades: En quipos elaborarán un estimado en recorrido y costo de gasolina para ir de un lugar a otro. Para éste proyecto es necesario contar con un mapa de nuestro estado, una vez que lo hayas conseguido marcarás en él la ciudad en donde vives y las ciudades turísticas y atractivas de nuestro estado como lo es por ejemplo: el puerto de Progreso, Tizimín, Valladolid, el puerto de Celestún, Ticul ,etc. Después de haber marcado las ciudades, debes elegir a tres de ellas, contando tu ciudad, por ejemplo si vives en Mérida puedes poner, Mérida, Progreso y Celestún, y con ellas formar un triángulo marcándolo en el mapa. Con la ayuda de un semicírculo hallarás los ángulos interiores del triángulo que formaste y mediante la aplicación de la ley de los Senos y Cosenos, hallar la medida de todos los lados del triángulo. Las cantidades que tu obtengas será un aproximado en kilómetros de la distancia que se recorrería, esto nos servirá para determinar el costo de la gasolina que te llevaría viajar a esos lugares. Averigua según el tipo de vehículo con el que viajarás, cuántos kilómetros recorres por cada litro de gasolina, posteriormente, tomando en cuenta la cantidad total de kilómetros que determinaste, obtendrás el total de litros que deberías consumir. Una vez que lo hayas obtenido, ve con tu papá y dile cuanto debe gastar para el viaje a esos lugares y si es posible, tomando en cuenta sus viajes anteriores, hazle ver el ahorro que ésta deducción les llevaría. En total debes realizar el trabajo, tomando en cuenta varios puntos desde tu ciudad, con un mínimo de 5 triángulos, es decir realizarás éste procedimiento 5 veces.
Recursos: Libros de texto, de consulta, guía de matemáticas 2, material para la elaboración y diseño, mapa de la ciudad, semicírculo, tabla de kilómetros recorridos por litro de gasolina.
Normas: Deberá de entregarse en la fecha indicada por el docente y en caso de que un miembro del equipo falte, se resolverá con el criterio de su profesor. El trabajo se entregará con los elementos básicos requeridos, aunque pudiera contener elementos extra. Cada miembro del equipo trabajará y explicará lo necesario cuando se le pregunte.

Ya hemos llegado al final del bloque y es necesario que tu proyecto haya concluido.

Revisa que nada te falte. En la siguiente tabla encontrarás los lineamientos a evaluar:

Rubrica del proyecto			
Producto logro o desempeño	Nivel de logro o desempeño		
	5	3	1
Conocimientos	Aplico de manera correcta la ley de los senos y de los cosenos en la solución de los triángulos, para determinar los estimados pedidos.	Aplico de manera inconsistente la ley de los senos y de los cosenos en la solución de los triángulos, para determinar los estimados pedidos.	No aplico la ley de los senos y de los cosenos en la solución de los triángulos, para determinar los estimados pedidos.
Habilidades	El mapa contiene elementos decorativos y originales. Establezco de manera adecuada los elementos necesarios para su elaboración. Respondo de manera correcta y apporto ideas a las preguntas planteadas al exponer lo realizado.	El mapa contiene algunos elementos decorativos y originales. Establezco de manera inconsistente los elementos necesarios para su elaboración. Respondo en pocas ocasiones y apporto algunas ideas al exponer lo realizado.	El mapa no contiene elementos decorativos y originales. No establezco los elementos necesarios para su elaboración. No Respondo de manera correcta ni apporto ideas a las preguntas planteadas al exponer lo realizado.
Actitudes	Tengo un alto compromiso con mi equipo y con la resolución del problema, de forma que colaboro con él en todo momento. Prevengo errores que mi equipo pueda generar y los corrijo acertada y oportunamente, y con tacto. Mantengo una actitud positiva en todo momento del trabajo, además de que expreso mis ideas y aportaciones con un lenguaje digno en todo momento.	Tengo compromiso con mi equipo y con la resolución del problema de forma que colaboro la mayoría del tiempo con él. Observo errores que mi equipo pueda generar y los corrijo en ocasiones con lenguaje impropio. Mantengo una actitud positiva del trabajo además de que expreso, ocasionalmente, mis ideas y aportaciones.	Tengo muy poco compromiso con mi equipo y con la resolución del problema de forma que no colaboro con él. No prevengo errores que mi equipo pueda generar. Mantengo una actitud negativa durante el trabajo y no expreso ni ideas ni aportaciones.



Evaluación de la competencia

Finalmente te presento la rúbrica del bloque completo que resume lo que deberás cumplir.

Rubrica para la evaluación del bloque					
Producto, logro o desempeño	Nivel de logro o desempeño				
	5 Estratégico	4 Autónomo	3 Básico	2 Inicial	1 Pre-formal
Conocimientos	Reconozco de manera correcta a los elementos faltantes en un triángulo rectángulo. Defino de manera correcta la ley de los senos y los cosenos.	Reconozco los elementos faltantes en un triángulo. Escribo la ley de los senos y los cosenos.	Reconozco de manera inconsistente los elementos faltantes en un triángulo. Defino de manera inconsistente la ley de los senos y los cosenos.	Reconozco a algunos elementos faltantes en un triángulo Defino la ley de los senos o la ley de los cosenos.	No reconozco a algunos elementos faltantes en un triángulo No defino la ley de los senos o la ley de los cosenos.
Habilidades	Aplico de manera correcta la ley de los senos y los cosenos en la solución de ejercicios. Resuelvo correctamente ejercicios de aplicación planteando los problemas como un caso de la ley de los senos o de los cosenos o ambas	Aplico la ley de los senos y los cosenos en problemas. Resuelvo ejercicios de aplicación planteando los problemas como un caso de la ley de los senos o de los cosenos.	Aplico de manera inconsistente la ley de los senos y los cosenos en problemas. Resuelvo de manera inconsistente ejercicios de aplicación planteando los problemas como un caso de la ley de los senos o de los cosenos.	Aplico en algunas ocasiones la ley de los senos y los cosenos en problemas. Resuelvo en algunas ocasiones ejercicios de aplicación planteando los problemas como un caso de la ley de los senos o de los cosenos.	No aplico la ley de los senos y los cosenos en problemas. No resuelvo ejercicios de aplicación planteando los problemas como un caso de la ley de los senos o de los cosenos.
Actitudes	Considero la importancia de definir correctamente la ley de los senos y de los cosenos. Aprecio la utilidad de las leyes de los senos y de los cosenos en la solución de problemas de la vida cotidiana. Demuestro siempre respeto hacia las ideas de mis compañeros en un ambiente socialmente tolerable y apporto ideas.	Considero la importancia de la ley de los senos y la de los cosenos. Aprecio la utilidad de las leyes en la solución de problemas. Demuestro respeto hacia las ideas de mis compañeros en un ambiente socialmente tolerable.	Considero necesario definir la ley de los senos y de los cosenos. Tomo en cuenta la utilidad de la ley de los senos y de los cosenos en la solución de ejercicios. Demuestro siempre respeto hacia las ideas de mis compañeros.	Considero no muy importante la ley de los senos y la de los cosenos. Casi no aprecio la utilidad de la ley de los senos y de los cosenos en la solución de ejercicios. Casi no demuestro respeto hacia las ideas de mis compañeros	No considero no muy importante la ley de los senos y la de los cosenos. No aprecio la utilidad de la ley de los senos y de los cosenos en la solución de ejercicios. No demuestro respeto hacia las ideas de mis compañeros

