



SERIE AMOXTLI



Con un enfoque integrador

Álgebra

Bachillerato Tecnológico



“Piensa y hazlo”

PRINCIPIOS DE
LA NUEVA
ESCUELA
MEXICANA

JOSUÉ ESPINOZA RANGEL





Álgebra

Primera Edición 2020

Copyright © Delta Learning

ISBN: 978-602-070-423-6

Impreso en México

Contacto: 800 450 7676

contacto@deltalearning.com.mx

Todos los derechos reservados. Ninguna parte de estas publicaciones puede reproducirse, almacenarse en un sistema de recuperación o transmitirse de ninguna forma o por ningún medio, electrónico, mecánico, fotocopiado, grabación o de otra manera, sin el consentimiento previo del editor, incluyendo, entre otros, en cualquier red u otro almacenamiento o transmisión electrónica, o transmisión para aprendizaje a distancia.

Editor en jefe: Zito Octavio Alejandro Rosas

Autor: Josué Espinoza Rangel

Correctora: Karla Alejandra Garduño Juárez

Diseño: Gabriel de la Rosa y el equipo de Argonauta Comunicación

Imágenes: Adobe Stock

Aviso de exención de responsabilidad:

Los enlaces provistos en este libro no pertenecen a Delta Learning. Por lo tanto, no tenemos ningún control sobre la información que los sitios web están dando en un momento determinado y por lo tanto no garantizamos la exactitud de la información proporcionada por terceros (enlaces externos). Aunque esta información se compila con gran cuidado y se actualiza continuamente, no asumimos ninguna responsabilidad de que sea correcta, completa o actualizada.

Los artículos atribuidos a los autores reflejan las opiniones de los mismos y, a menos que se indique específicamente, no representan las opiniones del editor. Además, la reproducción de este libro o cualquier material en cualquiera de los sitios incluidos en este informe no está autorizada, ya que el material puede estar sujeto a derechos de propiedad intelectual.

Los derechos están reservados a sus respectivos propietarios y Delta Learning no se responsabiliza por nada de lo que se muestra en los enlaces provistos.

Índice

	Pág.
PARCIAL 1	
Elementos del Álgebra básica	8
Uso de los números y sus propiedades	13
• Propiedad de cerradura	15
• Propiedad conmutativa	15
• Propiedad asociativa	16
• Elemento neutro	17
• Propiedad del inverso	18
• Propiedad distributiva	18
Tratamiento algebraico de enunciados verbales	23
• Simbología para pasar de la aritmética al álgebra	25
• Lenguaje algebraico	26
• Expresar matemáticamente un problema	28
Expresiones algebraicas	31
• Elementos de un término algebraico	31
• Incógnitas, variables y constantes	32
• Valor numérico	33
• Dependencia funcional	33
Conceptos básicos del lenguaje algebraico	37
• Polinomios	37
• Reducción de términos semejantes	38
• Suma y resta	39
• Signos de agrupación y las reglas para su eliminación	40
• Leyes de los exponentes	43
• Leyes de radicales	44
• Multiplicación	45
• División	48
El trabajo simbólico	60
• Operaciones con polinomios (productos notables)	60
• Factorización de polinomios	63

PARCIAL 2

Pág.

Ecuaciones lineales y su comportamiento

76 DELTA
LEARNING

De los patrones numéricos

a la simbolización algebraica

- Sucesiones y series 83
- Representación algebraica de sucesiones y series 83

Tratamiento de lo lineal y lo no lineal

- Representación discreta de gráficas 91
- Situaciones cotidianas con comportamiento lineal 92
- Situaciones cotidianas con comportamiento no lineal 93
- Ecuaciones lineales 93
- Situaciones cotidianas resueltas con ecuaciones lineales 99

Variación lineal como introducción a la relación funcional

- ¿Cuáles son las características de la variación lineal? 105
- Variaciones, razones, proporciones y tasas 106
- Propiedad fundamental de las proporciones 107
- Variaciones directas e inversas 108

Variación proporcional

- Proporción numérica 112
- Proporción geométrica 114
- Interpretación gráfica de la proporcionalidad 116

PARCIAL 3

Pág.

Sistemas de ecuaciones lineales y ecuaciones cuadráticas

124

Representación y resolución de sistemas

de ecuaciones lineales

- Métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales 133
- Interpretación de la solución de un sistema de ecuaciones lineales 147

Ecuaciones cuadráticas

- Características de la ecuación cuadrática 157
- Resolución de ecuaciones cuadráticas 159
- Interpretación de la resolución de una ecuación cuadrática 161
- Aplicación de las ecuaciones cuadráticas 163
 - Máximos y mínimos de una ecuación cuadrática 163
 - Tiro parabólico 163



REPRODUCCIÓN

Presentación

Este libro responde a la estructura que demanda la Nueva Escuela Mexicana que permite al alumno ser artífice de su propio aprendizaje a través del desarrollo de competencias que, con la guía del docente, favorecerán el aprendizaje significativo.

La estructura de la obra permite al docente adecuarse a sus planeaciones estratégicas y cumplir con los lineamientos solicitados para el bachillerato tecnológico, asimismo, el alumno tendrá claridad en la comprensión de los temas ya que cuenta con ejercicios donde se explica detalladamente la forma en la que se resuelven, por lo que pondrá en práctica lo aprendido. También se generan actividades didácticas que permiten afianzar sus conocimientos y favorecer el desarrollo del aprendizaje basado en proyectos, las cuales se describen al inicio de cada parcial.

Con ayuda de las tecnologías de la información y comunicación el estudiante podrá ampliar sus aprendizajes y fortalecer sus competencias. En cada parcial se trabaja con pocas actividades para profundizar los aprendizajes en el alumno, muchas veces trabajar con demasiadas competencias en un curso nos impide concretarlas eficientemente.

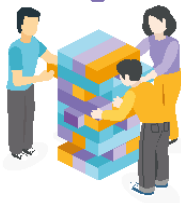
Por otra parte, la definición de conceptos posee un lenguaje sencillo y claro que con apoyo de los gráficos y la escritura matemática adecuada permite que el alumno entienda con claridad los contenidos.

Deseo que esta obra sea de mucha utilidad en tu formación académica y que los aprendizajes acumulados sean puestos en práctica en la vida cotidiana, pues el análisis algebraico nos permite entender cómo se comporta nuestro entorno.

Estructura del libro



Proyecto Intégrate



El aprendizaje de manera colaborativa se aborda a través del **Proyecto Intégrate**, el cuál se desarrolla en tres etapas a lo largo de cada Bloque, donde se ponen a prueba los conocimientos, habilidades y actitudes que vas adquiriendo a lo largo de los temas.



Realidad Aumentada

Una de las innovaciones que poseen los libros de texto de la Editorial Delta Learning son las Actividades de Realidad Aumentada, donde a través de **nuestra aplicación DELTA LEARNING RESOURCES** podrás observar modelos en 3D para brindarte un nuevo enfoque a situaciones de aprendizaje.



Evaluación Diagnóstica

Una de las formas de recuperar los conocimientos previos necesarios para ir adquiriendo los nuevos es por medio de una Evaluación Diagnóstica, la cual encontrarás al inicio de cada bloque.



Durante el desarrollo de los temas y para complementar la información a través de las TIC, se incluyen Códigos QR.



Nueva Escuela Mexicana

Todos los textos de Editorial Delta Learning, contienen actividades de transversalidad apegadas a los Principios de la Nueva Escuela Mexicana.



Desarrollo formativo del estudiante

El Desarrollo Formativo del Estudiante, proporciona tanto a docentes como estudiantes, compartir las metas y evaluación de los objetivos planteados a lo largo del parcial, su función es brindar la retroalimentación tan necesaria al proceso de enseñanza aprendizaje.



Actividad Socioemocional

El desarrollo de habilidades socioemocionales que encaminen a las y los jóvenes a generar ambientes escolares y de promoción del aprendizaje se incluye en los textos por medio de las Actividades Socioemocionales.



Portafolio de Evidencias

Una manera de validar tus aprendizajes esperados es por medio del Portafolio de Evidencias, el cual recopila los productos de aprendizaje en cada uno de los temas a lo largo del bloque.

Actividades transversales: Dentro de los libros de texto encontrarás Actividades Transversales, las cuales contienen aprendizajes interdisciplinarios donde se vinculan los conocimientos de las otras asignaturas que cursas en el presente semestre.



Las Actividades de Aprendizaje las podrás identificar por este ícono.



Principios

**Fomento de la
identidad con México**



**Responsabilidad
ciudadana: honestidad**



**Nueva Escuela
Mexicana**

**Transformación
de la sociedad**



**Respeto de la
dignidad humana**



Interculturalidad



Cultura de paz



**Respeto por la
naturaleza y cuidado
del medio ambiente**

El presente libro se encuentra alineado a estos principios que marca el rumbo de la educación en nuestro país, los podrás identificar con la palabra NEM, seguida del principio y una actividad que los incentive.

En la Editorial Delta Learning estamos a la vanguardia en los cambios en el Sistema Educativo de México y por lo tanto, todos nuestros ejemplares cuentan con el apego a los siete principios de la Nueva Escuela Mexicana.



Elementos del Álgebra básica

El primer parcial de la asignatura álgebra para Bachillerato Tecnológico se estructura de la siguiente manera:

Eje:

- Del pensamiento aritmético al lenguaje algebraico.

Componente:

Patrones, simbolización y generalización: Elementos del álgebra básica.

Contenido central:

- Uso de los números y sus propiedades.
- Uso de las variables y las expresiones algebraicas.
- Concepto básico del lenguaje algebraico.
- El trabajo simbólico.

Contenidos específicos:

- La variable como número generalizado, incógnita y relación de dependencia funcional: ¿Cuándo y por qué son diferentes? ¿Qué caracteriza a cada una? Ejemplos concretos y creación de ejemplos.
- Tratamiento algebraico de enunciados verbales, “los problemas en palabras”: ¿Cómo expreso matemáticamente un problema? ¿Qué tipo de simbolización es pertinente para pasar de la aritmética al álgebra?
- Interpretación de las expresiones algebraicas y de su evaluación numérica.
- Operaciones algebraicas. ¿Por qué la simbolización algebraica es útil en situaciones contextuales?
- Operaciones con polinomios y factorización básica de trinomios (productos notables). Se sugiere apoyarse de los modelos geométricos materiales y simbólicos para el cuadrado del binomio.

Aprendizajes esperados:

- Transita del pensamiento aritmético al lenguaje algebraico.
- Desarrolla un lenguaje algebraico, un sistema simbólico para la generalización y la representación.
- Expresa de forma coloquial y escrita un fenómeno de su vida cotidiana con base en prácticas como: simplificar, sintetizar, expresar,

verbalizar, relacionar magnitudes, generalizar patrones, representar mediante símbolos, comunicar ideas, entre otras.

- Reconoce la existencia de las variables y distingue sus usos como números en general, como incógnita y como relación funcional.
- Interpreta y expresa algebraicamente propiedades de fenómenos de su entorno cotidiano.
- Evalúa expresiones algebraicas en diversos contextos numéricos.
- Reconoce patrones de comportamiento entre magnitudes.
- Formula de manera coloquial escrita (retórica), numérica y gráficamente patrones de comportamiento.
- Expresa fenómenos de su vida cotidiana mediante símbolos.
- Reconoce fenómenos con comportamiento lineal o no lineal.
- Diferencia los cocientes $\frac{y}{x}$ y $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ como tipos de relaciones constantes entre magnitudes.
- Representa gráficamente fenómenos de variación constante en dominios discretos.

Competencias genéricas:

- CG 4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiadas.
 - 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
 - 4.2 Aplica distintas estrategias comunicativas según quienes sean sus interlocutores, el contexto en el que se encuentran y los objetivos que persigue.
- CG 5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.
 - 5.3 Identifica los sistemas y reglas o principios medulares que subyacen a una serie de fenómenos.
 - 5.4 Construye hipótesis y diseña modelos para probar su validez.
- CG 8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.
 - 8.1 Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, defendiendo un curso de acción con pasos específicos.
 - 8.2 Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.

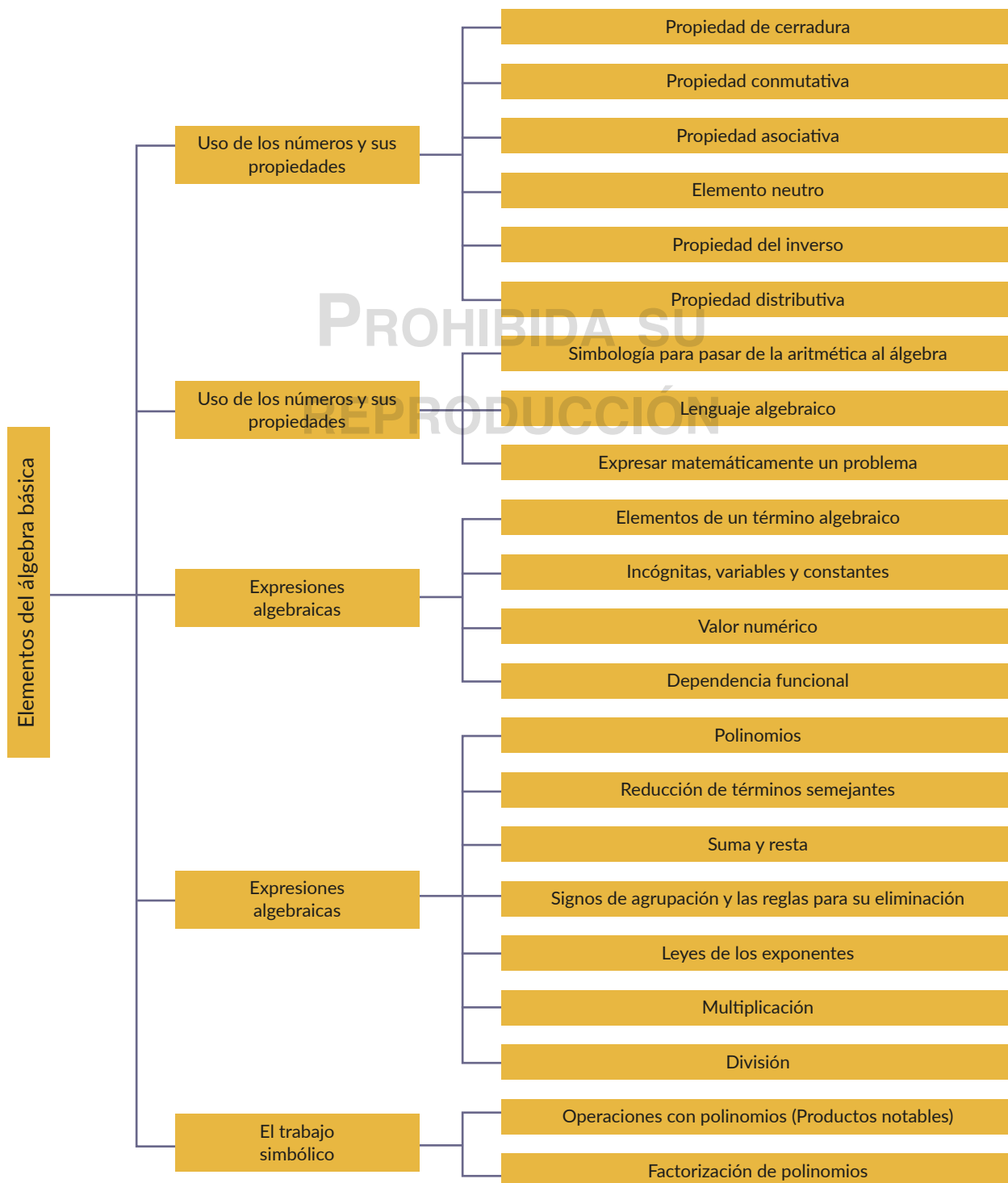
Competencias disciplinares básicas experimentales:

- M6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente magnitudes del espacio que lo rodea.
- M3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
- M8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y texto con símbolos matemáticos y científicos.

Presentación del Parcial

Al final de este parcial los estudiantes podrán manipular expresiones algebraicas usando apropiadamente sus propiedades, reglas y leyes desde un punto de vista aritmético hasta uno algebraico, de este modo conocerán cómo el álgebra es una forma generalizada de la aritmética. Sabrán manejar el lenguaje algebraico y su relación con el lenguaje común para comprender distintos problemas de aplicación de las matemáticas en un enfoque algebraico.

Aprenderán a manipular las expresiones algebraicas en las cuatro operaciones básicas utilizando factorización y productos notables.



Proyecto Intégrate



Fase 1 Traductor algebraico

El lenguaje en la humanidad ha sido un punto clave para poder comunicar todo lo que piensa y puede ser capaz de crear, sin el lenguaje simplemente los avances que hoy en día conocemos no serían posibles.

Las matemáticas tienen su propio lenguaje y es justamente el lenguaje algebraico el que nos permite entender cómo funciona esta ciencia exacta, sin este lenguaje, simplemente no podríamos hacer matemáticas.

Reúnete en equipos de trabajo en coordinación con tu docente para la elaboración de este proyecto, el cual consiste en elaborar un traductor de lenguaje algebraico a lenguaje común.

En esta primera etapa elaboren un cronograma de actividades para determinar los tiempos de trabajo y cómo distribuirán cada una de las tareas para alcanzar los objetivos.

Investiguen en distintas fuentes de consulta los diferentes símbolos utilizados en matemáticas, principalmente en álgebra, y cuál es su significado en el lenguaje común.

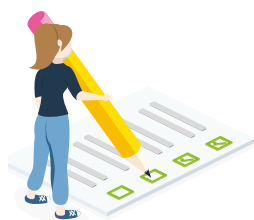
Revisen y documéntense acerca del uso de la escritura de expresiones algebraicas en su forma lineal, tomen de referencia el editor de ecuaciones de Microsoft Word.

Una escritura lineal nos permite traducir una expresión como esta $(3 - x_1)^2$ a esta $(3 - x_1)^2$. De este modo podemos identificar este tipo de expresiones en Excel.

Será necesario que cuenten con una copia instalada en sus computadores del programa Microsoft Excel, que será la plataforma que implementaremos para elaborar el traductor.

Investiguen el uso de las fórmulas en Excel para el manejo de texto y relaciónense con ellas elaborando algunos ejemplos sencillos de cada una de ellas. (Al menos dos ejemplos por cada integrante del equipo).

Determinen el tiempo de entrega con su docente y la forma en la que harán las presentaciones del proyecto.



Evaluación Diagnóstica

I. La siguiente evaluación te permitirá conocer cómo están tus conocimientos en el uso de los números para las diferentes operaciones matemáticas básicas, evita el uso de la calculadora para resolver los ejercicios propuestos, al final revisa tus respuestas con tu docente.

1. Resuelve las siguientes operaciones simplificando tus respuestas.

a) $158486 + 616518 =$

b) $(564)(84) =$

c) $\frac{235}{5} =$

d) $8548 - 9855 =$

e) $\frac{1}{5} + \frac{8}{7} =$

f) $\frac{2}{4} - \frac{6}{8} =$

g) $\frac{3}{9} \left(\frac{8}{9} \right) =$

h) $\frac{\frac{6}{2}}{\frac{2}{5}} =$

i) $\{3[4 + 9(6 - 8)] - 1\} =$

j) $\left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{2}{5} - \frac{3}{4} \left(\frac{5}{8} + \frac{9}{7} \right) + \frac{1}{3} \right] \right\} =$

PROHIBIDA SU
REPRODUCCIÓN



Olimpiada matemática

2020 es año de juegos olímpicos, representantes de diversos países se reúnen para competir en distintas disciplinas y buscar la medalla de oro; las matemáticas también tienen sus olimpiadas internacionales, los siguientes ejercicios son muestra de ello. Cada uno de los parciales de este libro tendrá esta sección, ponte a prueba y resuélvelos, si no logras encontrar una respuesta no la solicites al docente, desafíate a encontrarla. El siguiente planteamiento fue utilizado en la primera olimpiada internacional de matemáticas en 1959.

$$\frac{21n+4}{14n+3}$$

Prueba que la fracción $\frac{21n+4}{14n+3}$ no es simplifiable para cualquier número natural n .



APERTURA ►

Uso de los números y sus propiedades

Alguna vez te has imaginado cómo sería el mundo sin los números, ¿cuántas cosas serían simplemente imposibles de realizar por la carencia de estos singulares elementos? A través de la historia se han originado diferentes sistemas de numeración, cada uno de ellos nació por la necesidad de resolver ciertas problemáticas principalmente en el aspecto económico, pues el hombre tenía la necesidad de conocer cuánto poseía.

Observa el siguiente video que se encuentra en el código QR, para conocer cómo fue la evolución de los números hasta los que conocemos el día de hoy.

QR


<https://bit.ly/3gLsJFv>

Gracias a esta aportación tan valiosa hoy podemos hacer uso de los números para todo lo que podamos imaginar y tiene aplicaciones en todas las ciencias y las artes.

El manejo de todos los números se estudia en una rama de las matemáticas llamada aritmética, conocer esta rama es fundamental para poder avanzar en el estudio del Álgebra. Por tanto, comenzaremos con el análisis de las propiedades de los números.

DESARROLLO

Una vez que se establecieron los números indoarábigos que conocemos el día de hoy y los usamos cotidianamente era necesario agruparlos en diferentes conjuntos, un conjunto es la colección o agrupación de distintos elementos con características comunes. Al pasar del tiempo se fueron descubriendo nuevos números y se crearon subconjuntos tal como se representa en la figura 1.

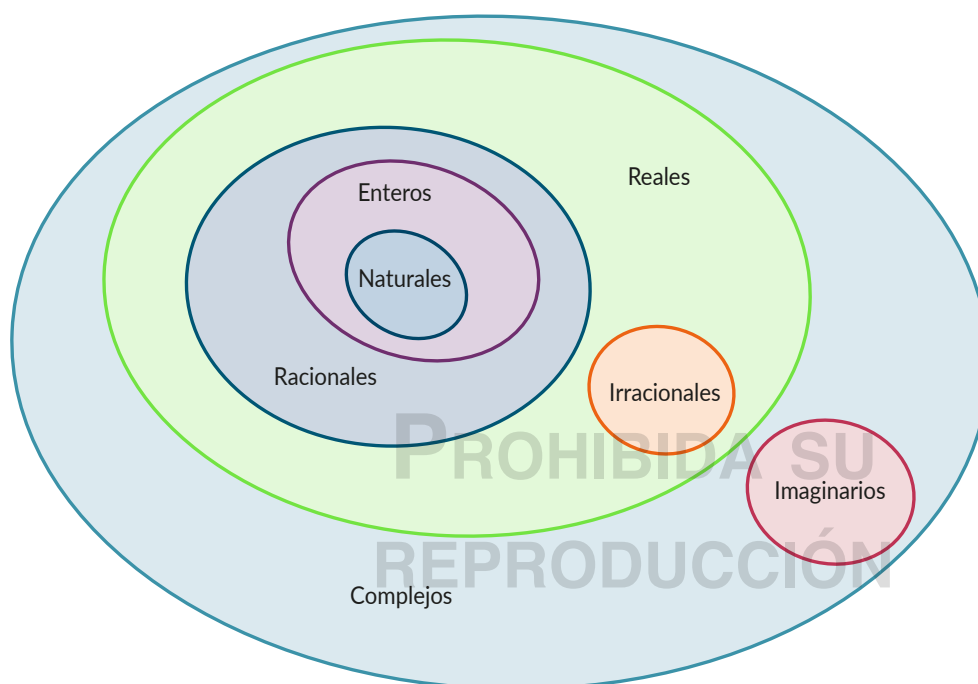


Figura 1 Clasificación de números por conjuntos.

Tipo de número	Símbolo	Ejemplos
Naturales	$\mathbb{N}$	1,2,3,4,5,6, ...
Enteros	$\mathbb{Z}$	..., -3, -2, -1,0,1,2,3, ...
Racionales	$\mathbb{Q}$	$\frac{3}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, ...$
Irracionales		$\sqrt{2}, \pi, \varphi, ...$
Complejos	$\mathbb{C}$	$2 + i, 6i, i$

Todos estos números tienen propiedades intrínsecas que es necesario aprender para poder manipularlos en las diferentes operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división).

Propiedad de cerradura

Esta propiedad indica que la suma de dos números reales es igual a otro número real en el caso de la suma. Por otro lado, en la multiplicación, el producto de dos números reales dará como resultado otro número real.

Propiedad de cerradura para la suma.

$$\text{Si } a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a + b \in \mathbb{R}$$

Propiedad de cerradura para la multiplicación.

$$\text{Si } a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a \cdot b \in \mathbb{R}$$

Ejemplo:

$$5+8=13$$

El cinco y el ocho son números reales y al sumarlos obtenemos 13, el cual también es un número real.

$$7(3)=21$$

El siete y el tres son números reales al igual que su producto.

Propiedad conmutativa

La propiedad conmutativa indica que es posible cambiar el orden de los números en una suma o en una multiplicación y a pesar del cambio se puede obtener el mismo resultado.

Matemáticamente se expresa de la siguiente forma.

Propiedad conmutativa para la suma.

$$\text{Si } a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a + b = b + a$$

Traducción al lenguaje común: Si los números a y b pertenecen al conjunto de números reales, entonces a más b es igual a b más a .

Propiedad conmutativa para la multiplicación.

$$\text{Si } a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a \cdot b = b \cdot a$$

Traducción al lenguaje común: Si los números a y b pertenecen al conjunto de números reales, entonces a por b es igual a b por a .

Ejemplo:

Sea la suma $4+5=9$, ésta puede expresarse como: $5+4=9$

Si observas, el orden de los sumandos no altera la suma y se puede aplicar para cualquier número real.

En el caso de la multiplicación se aplica la propiedad conmutativa de manera similar.

Ejemplo:

Sea el producto $(8)(9)=72$ también lo podemos expresar como $(9)(8)=72$ y tendremos exactamente lo mismo, es decir, el orden de los factores no altera el producto.

Propiedad asociativa

La propiedad asociativa indica que no importa el orden en el que se agrupan los sumandos para el caso de la suma o el orden en que se agrupan los factores en el caso de la multiplicación, siempre el resultado será el mismo.

Propiedad asociativa para la suma.

$$\text{Si } a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a + (b + c) = (a + b) + c$$

Dadas tres cantidades no importa el orden en que las sumes, al final el resultado será el mismo.

Propiedad asociativa para la multiplicación.

$$\text{Si } a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a(b \cdot c) = (a \cdot b)c$$

Puedes multiplicar primero los dos últimos números y el resultado multiplicarlo por el primer factor o bien, multiplicar los primeros números y el resultado por el último número y ambas formas serán iguales.

Ejemplo:

En la suma $5+8+9$ se puede resolver de las siguientes formas.

$$\begin{aligned} 5+(8+9) &= (5+8)+9 \\ 5+17 &= 13+9 \\ 22 &= 22 \end{aligned}$$

Ejemplo:

La multiplicación $7 \times 5 \times 3$ puede resolverse como.

$$\begin{aligned} 7(5 \times 3) &= (7 \times 5)3 \\ 7(15) &= (35)3 \\ 105 &= 105 \end{aligned}$$

En ambos ejemplos podemos ver como en el desarrollo de las operaciones se obtienen valores distintos, sin embargo, al final los resultados son iguales.

Elemento neutro

La existencia del elemento neutro es otra propiedad de los números, la cual indica que existe un valor para la suma y para la multiplicación que no cambia el valor de la operación al tener este elemento.

Elemento neutro para la suma

En el caso de esta operación el elemento neutro es el cero.

$$\text{Si } a \in \mathbb{R} \wedge 0 \in \mathbb{R} \Rightarrow a + 0 = a$$

Si a es cualquier número real, entonces al sumar el elemento neutro seguirá teniendo su mismo valor.

Elemento neutro para la multiplicación

En la multiplicación el elemento neutro es la unidad.

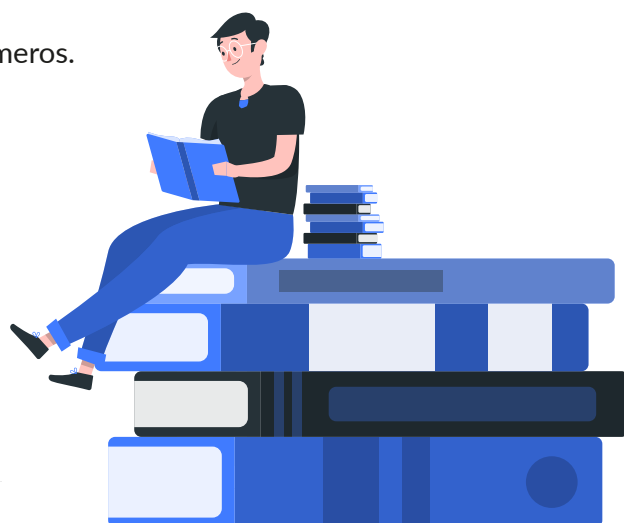
$$\text{Si } a \in \mathbb{R} \wedge 1 \in \mathbb{R} \Rightarrow a \cdot 1 = a$$

Cualquier número multiplicado por uno seguirá teniendo el mismo valor inicial. Esta propiedad nos ayudará a comprender porque las incógnitas en álgebra si tienen un coeficiente unitario, éste no se escribe.

Ejemplo:

Aplica la propiedad del elemento neutro a los siguientes números.

$$\begin{aligned} 8 + 0 &= 8 \\ 9(1) &= 9 \end{aligned}$$



Propiedad del inverso

En los números reales existe también un elemento inverso.

Elemento inverso para la suma

Es todo aquel inverso aditivo que al agregarse al número inicial nos da como resultado cero.

$$\text{Si } a \in \mathbb{R} \wedge -a \in \mathbb{R} \Rightarrow a + (-a) = 0$$

Elemento inverso para la multiplicación

Es todo aquel inverso multiplicativo que al multiplicarse al número inicial nos da como resultado la unidad.

$$\text{Si } a \in \mathbb{R} \wedge a^{-1} \in \mathbb{R} \Rightarrow a \cdot a^{-1} = 1$$

Ejemplo:

En la operación $5 + (-5) = 0$ se aprecia el uso del inverso aditivo.

En este caso el inverso aditivo de 5 es -5.

Para el caso de la multiplicación encontrar el inverso multiplicativo de 4.

$$4 \left(\frac{1}{4} \right) = 1$$

En este caso $\frac{1}{4}$ es el inverso multiplicativo de 4.

Recordemos que $4^{-1} = \frac{1}{4}$.

Propiedad distributiva

Esta propiedad se aplica cuando se tiene tanto una multiplicación como una suma, consiste en que la multiplicación de un número por una suma es igual a la suma de las multiplicaciones de dicho número por cada uno de los sumandos.

$$\text{Si } a, b, c \in \mathbb{R} \Rightarrow a(b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Esta propiedad la analizaremos más adelante como la factorización por factor común en términos algebraicos.



Ejemplo:
Aplica la propiedad distributiva en la siguiente operación.

$$\begin{aligned} 7(5+3) &= (7)(5) + (7)(3) \\ 7(8) &= 35 + 21 \\ 56 &= 56 \end{aligned}$$

◀ CIERRE



ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE 1

I. Identifica y escribe el nombre de la propiedad frente a cada uno de los siguientes ejercicios propuestos.

Ejercicio	Propiedad
$7(2 \times 1) = (7 \times 2) \times 1$	
$(-5) + (-9) = -14 \in \mathbb{R}$	
$5(3+6) = (5)(3) + (5)(6)$	
$(5)(6) = (6)(5)$	
$7+0=7$	
$8\left(\frac{1}{8}\right) = 1$	
$(2)(1)=2$	
$(8)(5)=40 \in \mathbb{R}$	
$8+6=6+8$	

II. En equipos de trabajo investiguen los algoritmos para el desarrollo de las cuatro operaciones básicas con números reales y diseñen un diagrama de flujo que muestre cada uno de los pasos a seguir para cada tipo de operación y compártanlo con el resto de la clase, recuerden agregar ejemplos para cada uno de ellos.

III. En parejas resuelvan cada uno de los siguientes planteamientos haciendo uso de las propiedades de los números, así como de los algoritmos que investigaron previamente.

1. Sin usar la calculadora resuelvan las siguientes operaciones.

- $1124+4454$
- $58449-85544$
- 4684×668
- $58455 \div 558$

2. Resuelve los siguientes problemas de aplicación.

a) Uriel se ha preparado durante toda su vida, invirtió 2 años en el nivel pre-escolar, 6 años en primaria, 3 en secundaria, 3 en el bachillerato, 5 más en la licenciatura y, finalmente, 3 años en un posgrado. ¿Durante cuántos años estudió Uriel?

b) Efectúa la siguiente operación y simplifica: $10\left(\frac{2}{9}\right) + 8\left(\frac{4}{2}\right) =$

c) Un día el padre de Raúl se da cuenta de que el indicador de kilometraje marca 4320 km. ¿Cuántos kilómetros le faltan para hacer la revisión del coche que es a los 5000 km?

d) Unos granjeros almacenaron heno durante 57 días, pero como el heno era de mejor calidad de lo que pensaban, ahorraron 113 kg por día, con lo que tuvieron heno para 73 días. ¿Cuántos kilos de heno almacenaron? ¿Cuántos kilogramos de heno consumirán por día después de haberlo almacenado?

e) Unas personas pensaban realizar un viaje de 300 km. En su presupuesto habían incluido \$300.00 para gastarse en gasolina. Sin embargo, una disminución del precio de la gasolina les permitió pagar \$262.50, por los 15 litros que necesitaban para su viaje. ¿Cuál es el costo por litro de la gasolina? ¿Cuánto ahorraron en combustible? ¿Cuántos kilómetros adicionales pueden recorrer si cargaran los \$300 con el costo ya rebajado?

IV. Practica con una variedad de ejercicios en línea en la siguiente dirección.
<http://newton.matem.unam.mx/aritmetica/problemas.html>





Actividad Socioemocional

“Si precisas una mano, recuerda que yo tengo dos.”
Agustín de Hipona

Puedo buscar ayuda

¡Otra vez un problema que resolver! La semana pasada lo de la tarea en equipo, ayer el asunto de no poder imprimir, hoy hay que resolver con la directora el tema de la pelea de Julia y Alan, ¿qué será mañana? Seguramente ya te habrás dado cuenta de que no podrás evitar enfrentarte a múltiples obstáculos para lograr tus metas personales y académicas. ¿Te has puesto a pensar que en muchas ocasiones resulta muy útil pedir ayuda a otros? ¿A quién le podrías pedir ayuda?

1. Escribe una situación o problema que te preocupa relacionado con tu clase de Matemáticas o la escuela en general.

2. En equipos de tres personas comenten qué le recomendarían a los siguientes estudiantes:



3. Probablemente algunas de las recomendaciones para Mario y Antonieta estaban relacionadas con pedir ayuda. Anoten dos desventajas de resolver el problema solos y dos ventajas de pedir ayuda.

Desventaja 1: _____

Desventaja 2: _____

Ventaja 1: _____

Ventaja 2: _____

4. Regresa al problema que escribiste en el ejercicio 1. Reflexiona y responde:

I. ¿A quién le puedo pedir ayuda para resolver este problema?

II. ¿Qué tipo de ayuda le puedo pedir?

Reafirmo y ordeno

Saber dar y recibir ayuda es una habilidad muy importante en todos los ámbitos de la vida. De acuerdo con la investigadora Darcia Narváez los seres humanos hemos evolucionado para cooperar entre nosotros. Desde que nacemos necesitamos del cuidado de otros para sobrevivir, y a lo largo de toda la vida de una u otra manera dependemos de los demás. Reconocer quiénes son las personas que pueden apoyarte, y aprender a solicitar su ayuda te permitirá fortalecer lazos de cooperación, afrontar mejor las dificultades y lograr tus metas.

¿Quieres saber más?

La historia del siguiente video animado nos muestra que nos podríamos evitar algunos problemas si pedimos ayuda a tiempo. ¿Te cuesta trabajo pedir ayuda? Puedes buscar en Youtube el video titulado “El arte perdido de pedir ayuda”, o darle clic aquí.

Para tu vida diaria

Michelle Obama, esposa del ex presidente, estadounidense Barack Obama, dijo en un discurso “Pedir ayuda no es un signo de debilidad, sino una señal de fortaleza”. ¿Encuentras alguna relación entre esta frase y lo que analizamos en esta lección?



APERTURA ▶

Tratamiento algebraico de enunciados verbales

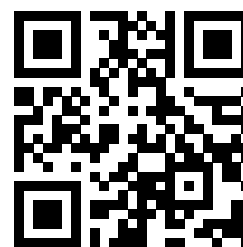
¿A qué se le llama sistema simbólico? Los símbolos, tal como los números, nos permiten hacer la representación de algo complejo en algo simple. En el apartado anterior analizaste el origen de los números y sus propiedades, sin embargo, a lo largo de la historia se desarrolló una rama de las matemáticas que se encargaba de estudiar las cantidades considerando del modo más general posible, me refiero al álgebra.

En el siguiente código QR o dirección web podrás encontrar un vídeo con una breve reseña histórica de cómo se originó esta rama de las matemáticas.

Las cantidades analizadas en el álgebra se observan desde un punto de vista más amplio en contraste con la Aritmética, en donde con ayuda de los números podemos realizar un sinfín de operaciones; pero en álgebra, para poder generalizar una cantidad, se deben utilizar letras para representar cualquier número posible.

Por tanto, es necesario conocer e interpretar un nuevo lenguaje matemático, el lenguaje algebraico.

QR

<https://bit.ly/2A2B0UX>



Muhammad ibn Musa al-Jwarizmi¹

(?-?, c. 850) Matemático árabe. Escribió una obra titulada Libro de la reducción, cuya versión latina tuvo gran influencia en la matemática europea hasta mediados del siglo XV. En ella indicó las primeras reglas del cálculo algebraico: la transposición de los términos de uno a otro miembro de una ecuación, previo cambio de signo y la anulación de términos idénticos en ambos miembros. También estudió las ecuaciones de segundo grado y otras cuestiones matemáticas. La latinización de su nombre dio lugar a la palabra «guarismo».

Con su Kitab al-yabr wa-l-muqabala o Libro del álgebra (literalmente, Libro de la reducción, o bien "de la integración" o "compensación"), al-Jwarizmi inició la literatura matemática de los musulmanes. Traducido al latín por Rodolfo Chester y Gherardo da Cremona (en el siglo XII), ejerció grandísima influencia en los matemáticos europeos hasta el siglo XV. Con esta obra de al-Jwarizmi, el álgebra penetra por primera vez en el mundo musulmán, después de haber recorrido un largo camino que desde Babilonia la había llevado a la India y a Grecia.

¹. Ruiza, M., Fernández, T. y Tamaro, E. (2004). Biografía de Muhammad ibn Musa al-Jwarizmi. En Biografías y Vidas. La enciclopedia biográfica en línea. Barcelona (España). Recuperado de <https://www.biografiasyvidas.com/biografia/j/jwarizmi.htm> el 27 de mayo de 2020.

◀ DESARROLLO ▶

Simbología para pasar de la aritmética al álgebra

Los símbolos usados en álgebra son una combinación entre números y letras, cuando usamos números es para determinar cantidades conocidas y determinadas.

En cuanto el uso de las letras, éstas tienen algunas reglas importantes que deberás prestar atención para implementarlas, como lo he mencionado, las letras permiten identificar de forma general distintos valores numéricos, pero cuando se trata de cantidades conocidas se suele emplear las primeras letras del abecedario como por ejemplo **a, b, c, d, e, ...**, son cantidades conocidas aquellas que al leer un problema se pueden extraer con facilidad del enunciado.

Cuando se quiere representar cantidades desconocidas que se obtienen mediante procesos algebraicos entonces se suelen usar las últimas letras del abecedario para representarlas como por ejemplo **u, v, w, x, y, z**.

De este modo en la siguiente expresión:

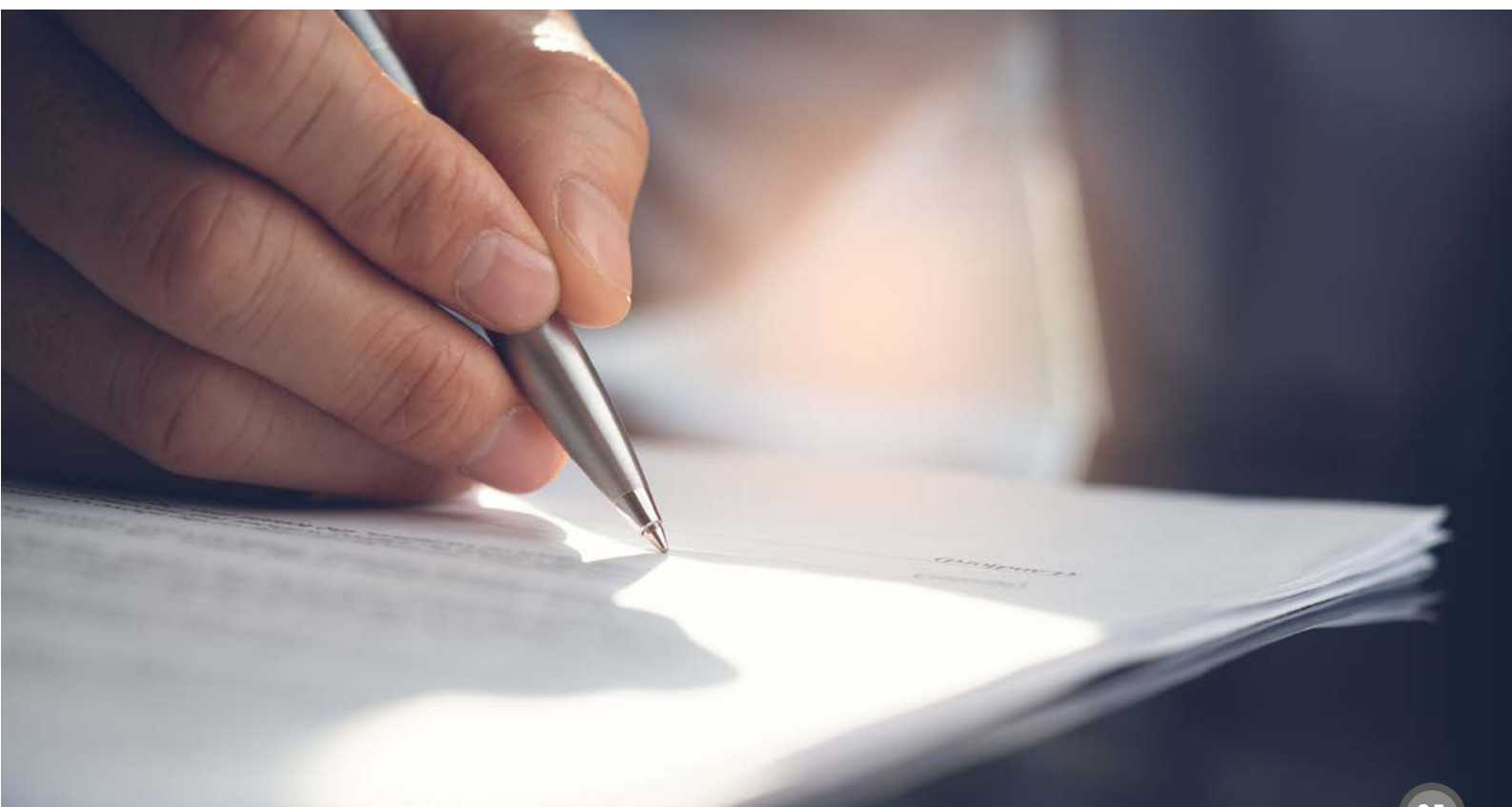
$$ax+by+c=0$$

Las letras **a, b, c** representan cantidades numéricas que pueden encontrarse con facilidad en un problema, mientras que las letras **x, y** expresan cantidades que para encontrarlas necesitamos realizar algunas operaciones específicas.

Cuando tenemos una mayor cantidad de cantidades por representar podemos usar las siguientes notaciones:

Uso de comillas: **a', a'', a'''** se lee como "a prima", "a segunda", "a tercera".

Uso de subíndices: **x₁, x₂, x₃** se lee como "equis subuno", "equis subdos", "equis subtres".



Otro tipo de símbolos usados en el álgebra, así como en la Aritmética son los signos. La siguiente tabla muestra cada uno de estos tipos.

Signos	Nombre	Notación	Lectura
Operación	Suma	$a + b$	"a mas b"
	Resta	$a - b$	"a menos b"
	Multiplicación	$a \times b$ $a \cdot b$ $(a)(b)$ ab	"a por b" "a multiplicado por b"
	División	$a \div b$ $\frac{a}{b}$ $a : b$	"a entre b" "a dividido entre b"
	Potencia	$a^2 = aa$ $b^4 = bbbb$	"a elevado a la potencia dos" "a cuadrada" "b a la cuarta"
	Raíz (se usa el radical $\sqrt{\quad}$)	$\sqrt{a}$ $\sqrt[4]{5}$	"raíz cuadrada de a" "raíz cuarta de cinco"
Relación	Igualdad	$a = b$	"a es igual a b"
	Desigualdad	$a < b$ $a > b$ $a \geq b$ $a \leq b$ $a \neq b$	"a menor que b" "a mayor que b" "a mayor o igual que b" "a menor o igual que b" "a no es igual a b"
Agrupación	Paréntesis	()	
	Corchete	[]	
	Llave	{ }	
	Barra	—	

Existe una gran cantidad de símbolos adicionales en las matemáticas, cada uno propio de las diferentes ramas de las matemáticas como la geometría, la trigonometría, el cálculo, etc.

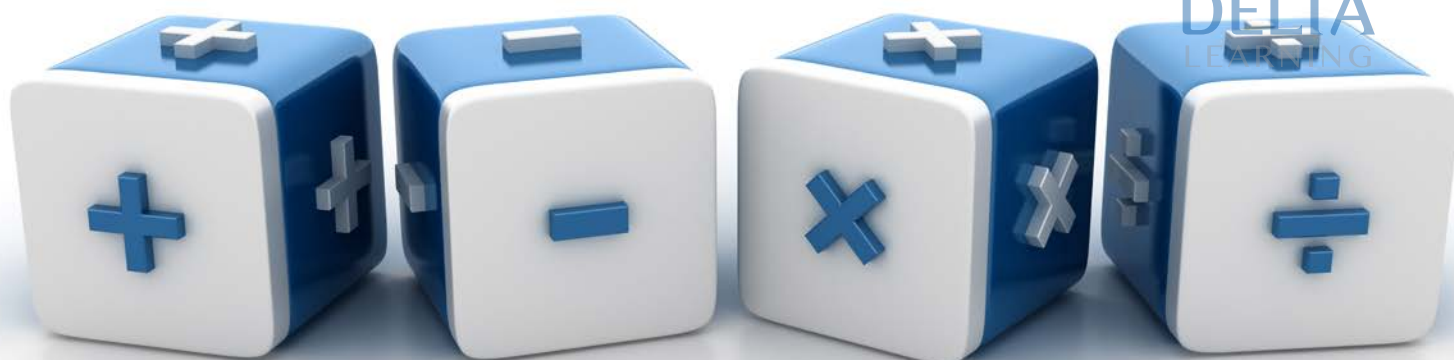
Lenguaje Algebraico

No solo es necesario conocer los símbolos, sino que es importante aprender a agruparlos para darles sentido y sobre todo es necesario saber dónde se aplican dependiendo de los planteamientos de la vida cotidiana.

En el lenguaje común usamos una gran variedad de palabras, pero no todas tienen una interpretación matemática, es importante que entendamos que usamos el lenguaje algebraico para identificar expresiones de nuestro

lenguaje que denotan un concepto de cantidad o relación. Es así como el lenguaje algebraico por medio de letras y símbolos nos permitirá reducir las proposiciones verbales a proposiciones algebraicas simples y de fácil comprensión.

Es importante señalar que, con las cantidades algebraicas, representadas por letras pueden hacerse las mismas operaciones que con los números aritméticos.



En la siguiente tabla se muestran algunos ejemplos de la traducción de lenguaje común a lenguaje algebraico.

Lenguaje común	Lenguaje algebraico
El cuadrado de un número.	a^2
La suma de dos números.	$a + b$
La diferencia de dos números.	$a - b$
El cociente de dos números.	$\frac{a}{b}$
El producto de dos números.	ab
La diferencia de cuadrados de dos números.	$a^2 - b^2$
Tres números cualesquiera.	x, y, z
La semisuma de dos números.	$\frac{a + b}{2}$
La raíz enésima de un número.	$\sqrt[n]{a}$
El cubo de un número.	a^3
El duplo de un número.	$2a$
El triple de un número.	$3a$
El doble de la diferencia de dos números.	$2(a - b)$
El cuadrado de un número es igual a la suma de los cuadrados de dos números distintos.	$c^2 = a^2 + b^2$
El área de un rectángulo es igual al producto de su base por su altura.	$A = bh$
La fuerza de un objeto en movimiento es igual al producto de su masa por su aceleración.	$F = ma$

Cuando conviertes de lenguaje algebraico a lenguaje común es importante identificar siempre en primer lugar las operaciones principales y a partir de ahí ir codificando cada uno de sus elementos.

Ejemplo:

Traduce a lenguaje común la siguiente expresión.

$$\frac{2(a + b)}{(a - b)^2}$$

La operación principal es el cociente, en el numerador la operación principal es un producto y en el denominador la operación principal es una potencia. Por tanto, nuestra traducción quedaría del siguiente modo: “El cociente entre el doble de la suma de dos números y el cuadrado de la diferencia de los mismos números”.

En la siguiente tabla podrás observar algunos sinónimos de las cuatro operaciones básicas para que cuando desees traducir de un lenguaje a otro sepas utilizarlas.

Sinónimos de palabras que representan las operaciones básicas	
Suma	Resta
Más Aumentar Agregar Excede Incrementar	Menos Diferencia Sustraer Disminuir Reducir
Multiplicación	División
Producto Tantas veces Múltiplo Agrandar Doble, triple, cuádruple, duplo, triplo	Cociente Entre Repartir Dividido Razón Mitad, tercera, cuarta

Expresar matemáticamente un problema

Ahora practiquemos este nuevo lenguaje con algunos ejemplos en problemas cotidianos.

Ejemplo:

Andrés tiene cierta cantidad de árboles; Pedro tiene la tercera parte de lo de Andrés; Carlos la cuarta parte del doble de lo de Andrés. La suma de lo que tienen los tres es menor que 1000 árboles. Expresa en lenguaje algebraico el problema.

Recordemos que las letras en álgebra representan cantidades y no objetos o cosas.

Primero definimos las cantidades desconocidas.

a representa la cantidad de árboles de Andrés

p representa la cantidad de árboles de Pedro

c representa la cantidad de árboles de Carlos



Ahora traducimos cada parte del problema.

Andrés tiene cierta cantidad de árboles: a

Pedro tiene la tercera parte de lo de Andrés:
 $p = \frac{a}{3}$

Carlos la cuarta parte del doble de lo de Andrés:
 $c = \frac{2a}{4}$

Por lo tanto, la suma quedaría de la siguiente forma:

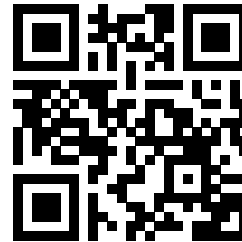
$$a + p + c < 1000$$

$$a + \frac{1}{3}a + \frac{2}{4}a < 1000$$

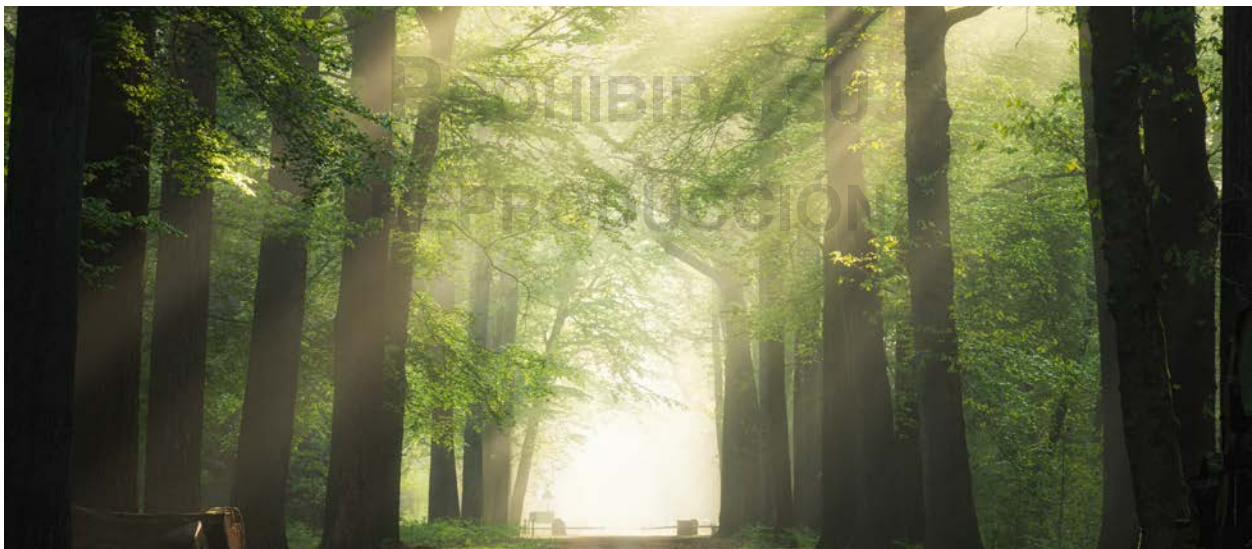
El álgebra nos ayudará a resolver este tipo de expresiones, por el momento hemos aprendido como traducir de nuestro lenguaje al lenguaje algebraico.

Visita el siguiente Código QR o enlace para reforzar tus conocimientos sobre este tema:

QR



<https://bit.ly/3eR8EvJ>



Ejemplo:

Traduce a lenguaje común la siguiente expresión algebraica:

$$\frac{a+b}{2} - \frac{ab}{2}$$

La operación principal es la resta, posteriormente los cocientes y al final el producto y la suma.

Entonces el enunciado sería de la siguiente forma: “La diferencia de la semisuma de dos números y el semiproducto de esos mismos números”.

¿De qué otra forma podríamos describir ésta operación? Comparte tu enunciado con tu clase.



ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE 2



I. De manera individual resuelve en tu cuaderno lo que se te pide a continuación.

1. Define el concepto de álgebra.
2. Explica la diferencia entre el álgebra y la aritmética.
3. Desarrolla una línea de tiempo con los principales personajes que aportaron al desarrollo del álgebra que conocemos hoy en día.

II. En parejas, traduzcan las siguientes expresiones dadas al lenguaje correspondiente.

1. La suma de tres números.
2. La suma del cuadrado de un número, el cubo de otro y la cuarta potencia de x .
3. Siendo y un número entero par, escriban los tres números pares consecutivos posteriores a y .
4. Debía \$ x y pagué \$6, ¿cuánto debo?
5. La mitad de un número más el doble del mismo número.
6. $x+y-7$
7. $2a-3b$
8. $\sqrt{ab}$
9. $x(a-b)$
10. $(x+z)(x-z)$

III. Encuentra la expresión algebraica que da solución a los siguientes problemas de manera individual, no es necesario llegar al valor numérico. Al final realiza una plenaria en clase para comprobar tus procedimientos y resultados.

1. En una caja hay el doble de monedas que en otra. Si se pasan 7 monedas de la primera a la segunda caja, quedan en ambas el mismo número de monedas. ¿Cuántas monedas tenía al principio cada caja?
2. Se quieren repartir \$1,200 entre tres personas, de manera que una tenga la mitad de la otra, y la tercera persona tenga igual que las otras dos juntas. Calcula lo que corresponde a cada una.
3. Hace 4 años la edad de una madre era el triple de la de su hija. Dentro de 6 años sus edades sumarán 60. ¿Qué edad tienen la madre e hija actualmente?
4. Juan preguntó a Pedro: ¿Qué edad tengo si tengo el doble de la que tú tenías cuando yo tenía la que tú tienes, y, además, cuando tú tengas la que yo tengo nuestras edades sumarán 63? Con la información dada, Pedro respondió correctamente la pregunta de Juan. ¿Cuál fue su respuesta?
5. Un oftalmólogo necesita preparar 10 ml de una solución oftálmica al 8 % de activo. Dispone de dos soluciones: una al 12% y otra al 6%, respectivamente. ¿Qué cantidad de cada una de éstas debe mezclar para obtener la solución que necesita?

APERTURA ▶

Expresiones algebraicas

Así como en el español el lenguaje se compone de enunciados y éstos a su vez tienen partes que los forman; el lenguaje algebraico también las tiene. Una expresión algebraica es una representación que se aplica a un conjunto de literales y números que conforman una o más operaciones algebraicas. Éstas a su vez presentan términos algebraicos, los cuales aparecen separados por el signo + o -.

Ejemplo:

Son expresiones algebraicas las siguientes.

$$mx + b, x^2 + y^2, 5x + 6y - z, \frac{a^2}{(a + v)} - 2x$$

◀ DESARROLLO ▶

PROHIBIDA SU

REPRODUCCIÓN

Elementos de un término algebraico

Definimos al término algebraico como la expresión algebraica que consta de un solo símbolo o de varios símbolos no separados entre sí por el signo + o -.

Ejemplo:

Las siguientes expresiones algebraicas representan términos algebraicos.

$$a, 3b, xyz, \frac{ma}{2}, mx$$

Los elementos de un término son cuatro: el signo, el coeficiente, la parte literal y el grado.

Veamos la siguiente expresión

$$-3x^2$$

Signo	-	Indica si un término se suma o se resta. Es decir si los términos son positivos (+) o negativos (-). Cuando un término no tiene signo se considera positivo.
Coeficiente	-3	Indica la cantidad de veces que se tiene la incógnita, representa un producto. Puede ser numérico o literal. Cuando un término no tiene coeficiente se entiende que es 1.
Literal	x	Son las letras del término.
Grado	2	Es el exponente de la literal. El exponente siempre tendrá una base. Grado relativo es el de cada literal mientras que el grado absoluto es la suma de todos los grados de las literales.

Ejemplo:
Completa la siguiente tabla.

Término	Signo	Coeficiente	Literal (es)	Exponente (s)	Grado absoluto
$-20xy^2$	-	-20	x,y	1,2	3
$\frac{ab}{6}$	+	$\frac{1}{6}$	a,b	1,1	2
$-5mn^a$	-	-5	m,n,a	a	$a+1$
a	+	1	a	1	1

Incógnitas, variables y constantes

La literal puede representar distintos valores en diferentes contextos surgen así los conceptos de incógnitas, variables y constantes.

Cuando se tiene un modelo matemático de algún problema en el que la solución solo representa un valor en específico se denominará a la literal incógnita. Pero cuando el modelado sugiere que el valor desconocido puede tomar una gran cantidad de valores se le llamará entonces variable. Aún y cuando al final tanto la incógnita como la variable puedan representar un mismo valor numérico, la diferencia radica en la contextualización del problema que las utiliza.

En el caso de la constante es aquella literal que a pesar de que hay variaciones con respecto a una variable, su valor se mantiene igual.

En el tema de ecuaciones podremos comprender más a detalle ésta diferencia, por lo pronto analicemos los siguientes planteamientos.

Todas aquellas literales que represente una de-

pendencia funcional serán consideradas como variables, en tu curso de Cálculo Diferencial trabajarás con literales con la característica de ser variables.

Cuando solo presenten un valor numérico que no varía en función de algo más entonces se llamarán incógnitas.

Ejemplo:
La variación de la velocidad de un automóvil puede ser representada por una variable.

$$v = 20 \frac{km}{h}$$

El número de frutas que posee una persona puede ser representada por una incógnita.

$$n = 20 \text{ manzanas}$$

Aunque ambas tienen el mismo valor numérico su contexto es distinto, en el primer caso hay una variación y en el segundo caso es un número determinado.

Valor numérico

Para obtener el valor numérico de una expresión algebraica se efectúa una evaluación, el cual es un proceso que consiste en sustituir valores numéricos asignados para las literales de expresión algebraica y efectuar las operaciones indicadas para obtener como resultado un valor numérico específico correspondiente.

Ejemplo:

Hallar el valor numérico de $5ab$ para $a=1, b=2$

Sustituimos los valores asignados a las incógnitas y resolvemos la operación indicada.

$$5ab = 5(1)(2) = 10$$

Ejemplo:

Encuentra el valor numérico de la siguiente expresión $3a^2b^3$ si $a = 3, b = 4$

$$3a^2b^3 = 3(3)^2(4)^3 = 3(9)(64) = 1728$$

Ejemplo:

Determina el valor numérico de $\frac{8a}{x} + \frac{4a}{y} - \frac{a^2}{2}$ cuando $a = 1, x = 3, y = 8$

$$\frac{8a}{x} + \frac{4a}{y} - \frac{a^2}{2} = \frac{8(1)}{3} + \frac{4(1)}{8} - \frac{(1)^2}{2} = \frac{8}{3} + \frac{4}{8} - \frac{1}{2} = \frac{8}{3}$$

Dependencia funcional

Cuando se presenta una expresión algebraica en la que se tienen dos o más variables las cuales dependen una de otra se genera una función, este concepto se estudia a profundidad en tu curso de Cálculo Diferencial.

Una función es una expresión donde el valor de una variable llamada dependiente, queda a consideración del valor de otra llamada independiente.

Consideremos la siguiente expresión:

$$y = 3x + 4$$

En la expresión algebraica anterior se tienen dos variables, para generar la función se expresa de la siguiente forma:

$$f(x) = y$$

$$f(x) = 3x + 4$$

De este modo si deseamos conocer el valor de la variable y , debemos conocer primero el valor de x . Por ejemplo: si $x=5$, podremos conocer su valor.

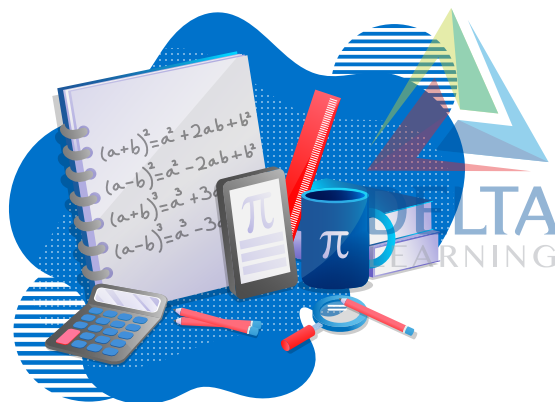
$$f(5) = 3(5) + 4 = 15 + 4 = 19$$

Por lo tanto, el valor de $y=19$

Date cuenta de que aplicamos el principio de la evaluación de expresiones algebraicas para encontrar el valor numérico deseado.



ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE 3



I. De manera individual completa el siguiente cuadro donde se aprecian las partes de los términos algebraicos.

Término	Signo	Coeficiente	Literal	Grado relativo	Grado absoluto
$-6a^4$					
$7(x^2 + y^2)$					
mx					
$2ab^2c$					
$-\frac{x^3}{4}$					
$\frac{x}{by}$					

II. Enuncia en tu cuaderno dos ejemplos de cada tipo de literales que se comportan como incógnitas, variables y constantes.

III. Halla el valor numérico de las siguientes expresiones para los siguientes valores:

$$a = 3, b = 4, c = \frac{1}{3}, d = \frac{1}{2}, m = 6, n = 1/4$$

1.- $a^2 - 2ab + b^2$

2.- $c^2 + 2cd + d^2$

3.- $\frac{a^2}{3} - \frac{b^2}{2} + \frac{m^2}{6}$

4.- $\frac{m^a}{a^b}$

5.- $\frac{a+b}{c} - \frac{b+m}{d}$

6.- $\frac{2\sqrt{a^2b^2}}{3} + \frac{3\sqrt{2+d^2}}{4} - a\sqrt{n}$



IV. En equipos de trabajo investiguen un fenómeno de su entorno en donde se presenten casos de dependencia funcional y expresen algebraicamente el comportamiento de dicho fenómeno, por ejemplo, el comportamiento de la temperatura y la presión en una olla exprés, el comportamiento del aire dentro de un globo al ser oprimido y sus variaciones en volumen y presión, etc.

V. Determina el valor de las siguientes funciones para los valores dados de las variables independientes.

$$x = 1, 2, 5, \frac{1}{2}, -4, 0$$

1.- $f(x) = 3x + 8$

2.- $f(x) = 5x + 2$

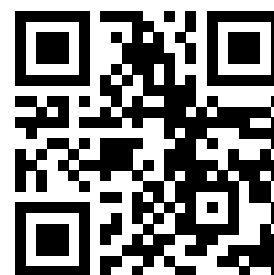
3.- $f(x) = x^2 - 2$



Actividad Socioemocional

PROHIBIDA SU
REPRODUCCIÓN

La siguiente actividad desarrollará tu habilidad socioemocional del autoco-
nocimiento con la finalidad de establecer metas académicas y personales a
corto, mediano y largo plazo. Visita la página <https://qr.go.page.link/rfNW8>
y descarga la ficha de la lección 2.6. ¿Cuáles son mis metas?



Proyecto Intégrate



Fase 1 Traductor algebraico

Con base en la investigación previa del uso de símbolos matemáticos y de las fórmulas de texto, elaboren una base de datos en una hoja de Excel con los símbolos matemáticos y sus traducciones.

En una columna escribirán los símbolos en su forma lineal y frente a ellos escribirán su traducción a lenguaje común.

Mediante el uso de las funciones de Excel deberán buscar una frase en su lenguaje matemático y el programa deberá buscar en la base de datos como se expresa en lenguaje común y sustituirlo en la fórmula.

En otra hoja de cálculo deberán introducir en una celda una ecuación en su formato lineal y en la celda continua en automático deberá proporcionar la traducción de la expresión en lenguaje común.

Finalmente, den un formato a sus hojas de Excel y traduzcan un mínimo de 10 expresiones algebraicas por cada integrante del equipo.

Revisen la rúbrica en el apartado de portafolio de evidencias para revisar cómo será evaluado el proyecto y puedan entregarlo con todos los requerimientos necesarios.

PROHIBIDA SU
REPRODUCCIÓN



APERTURA ▶

Conceptos básicos del lenguaje algebraico

¿Qué es un lenguaje algebraico? Sin duda ya sabes la respuesta, hemos estado trabajando con las expresiones algebraicas las cuales nos permiten codificar un problema de la vida real a un lenguaje matemático mediante el uso del álgebra, ahora es tiempo de conocer cómo hacer operaciones con este tipo de expresiones.

◀ DESARROLLO ▶

Polinomios

De acuerdo con la cantidad de términos de las expresiones algebraicas, estas se clasifican en monomios y polinomios, los monomios son cualquier expresión algebraica que solo tiene un término algebraico. Por consiguiente, los polinomios son aquellas expresiones que tienen más de dos términos algebraicos. Los polinomios pueden ser binomios cuando tienen dos términos, trinomios cuando tienen tres términos, para los demás casos se les llama simplemente polinomios.

Cabe destacar que para que un polinomio se considere como tal, los exponentes de cada uno de sus términos deberán ser enteros positivos.

Ejemplo:

Se consideran monomios a las siguientes expresiones.

$$x^3, c^{2v}, y^2, 5ab, 9xyz, \frac{w^2}{3}$$

Son binomios las expresiones como.

$$a + b, x^2 + y^2, 3x^2 - 4y^3, x^3 + 3x$$

Los polinomios son.

$$a, a + b, c^2 + b^2 - a^2, ax^2 + bx + c, 8xy + 6x - 5y + 5$$

Para determinar el grado de un polinomio se debe considerar que éste puede ser relativo o absoluto.

El grado absoluto de un polinomio se determina por el exponente de sus términos con el valor más alto.

Ejemplo:

$$v^4 - 5w^2 + 6v^3 + v + 2$$

El grado absoluto es cuatro.

Cuando queremos encontrar el grado relativo a una literal, debemos encontrar el mayor exponente que tiene la literal que se considere del polinomio.

Ejemplo:

$$x^5 + x^7y^4 - xy$$

El grado con relación a x es cinco y con relación a y es cuatro.

Reducción de términos semejantes

Cuando se tiene un polinomio se debe identificar si tiene términos comunes o semejantes, para poder simplificar el polinomio, se llama término semejante a aquellos términos que comparten la misma parte literal pero diferente coeficiente o signo, cabe señalar que la parte literal deberá tener los mismos exponentes.

Los términos $6xy$ y $-4x^2y$ no son términos semejantes porque aunque tienen las mismas literales sus exponentes no son los mismos.

La reducción de términos semejantes es una operación que nos permitirá convertir dos o más términos semejantes en uno solo, para esta tarea podemos encontrar tres casos:

Caso 1: Cuando los términos semejantes tienen el mismo signo se suman los coeficientes, manteniendo el signo y escribiendo al final la parte literal.

Ejemplo:

$$\begin{aligned} 5b + 3b &= 8b \\ -3a - 6a &= -9a \\ 5x + 4x &= 9x \end{aligned}$$

Caso 2: Cuando los términos semejantes tienen signos distintos, se restan los coeficientes, poniendo delante de esta diferencia el signo del mayor y a continuación se escribe la parte literal.

Ejemplo:

$$\begin{aligned} 2a - 5a &= -3a \\ 8x - x &= 7x \\ 3b - 5b &= -2b \end{aligned}$$

Caso 3: Al reducir más de dos términos semejantes de signos diferentes, se debe reducir los términos de signo positivo y los términos de signo negativo y al resultado se aplica el caso 2.

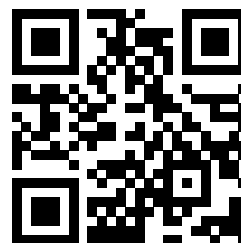
Ejemplo:

$$\begin{aligned} 5a - 8a + a - 6a - 21a \\ 6a - 35a \\ -29a \end{aligned}$$

Ahora que sabemos reducir polinomios por sus términos semejantes, estamos listos para trabajar con las operaciones básicas aplicadas a los polinomios, es importante que recuerdes que un polinomio representa valores numéricos desconocidos, por lo tanto, las propiedades de los números también se aplican a ellos.

Para reforzar tu aprendizaje visita el siguiente enlace código QR o enlace web donde encontrarás ejercicios en línea para autoevaluar tus conocimientos.

QR



<https://bit.ly/2Xw7fVj>



Suma y resta

Esta operación nos permitirá simplificar dos o más polinomios en uno solo, se aplican los principios de reducción de términos semejantes y la ley de los signos para la multiplicación, la cual se muestra a continuación.

$$\begin{aligned} (+)(+) &= + \\ (+)(-) &= - \\ (-)(+) &= - \\ (-)(-) &= + \end{aligned}$$

El procedimiento para la suma y resta de polinomios consiste en agrupar los polinomios entre paréntesis separados por los signos de la suma o resta según corresponda y posteriormente multiplicar los signos, finalmente se reducirán los términos semejantes.

Suma los siguientes polinomios.

$$\begin{aligned} &3a^2, 5b + a^2, -3a^2 + b \\ (3a^2) + (5b + a^2) + (-3a^2 + b) \\ &3a^2 + 5b + a^2 - 3a^2 + b \\ &a^2 + 6b \end{aligned}$$

Esta operación también la podemos realizar de la siguiente manera.

$$\begin{array}{r} 3a^2 \\ a^2 + 5b \\ \underline{-3a^2 + b} \\ a^2 + 6b \end{array}$$

Se reescriben los términos agrupándolos de acuerdo con su tipo y se suman y restan coeficientes de manera vertical.

cientes de manera vertical.

Ejemplo:

Resta $11x + 9y - 5z$ del polinomio $7x - 4y + 2z$

Primero agrupamos nuestros polinomios.

$$(7x - 4y + 2z) - (11x + 9y - 5z)$$

Multiplicamos signos.

$$7x - 4y + 2z - 11x - 9y + 5z$$

Reducimos términos semejantes.

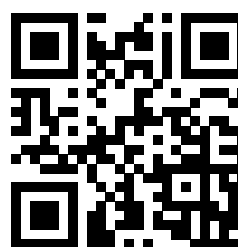
$$-4x - 13y + 7z$$

También podemos resolverlo de forma vertical.

$$\begin{array}{r} 7x - 4y + 2z \\ \underline{-(11x + 9y - 5z)} \\ -4x - 13y + 7z \end{array}$$

En el siguiente Código QR o enlace podrás seguir practicando con ejercicios en línea.

QR



<https://bit.ly/2Xw7fVj>

Signos de agrupación y las reglas para su eliminación



En este tipo de operaciones también podemos hacer uso de los signos de agrupación como lo vimos anteriormente, recordemos que la reducción de términos semejantes es un proceso de simplificación que nos lleva a encontrar una expresión algebraica más simple. Los signos de agrupación nos permiten trabajar con más de un polinomio e ir reduciéndolo de forma ordenada y de acuerdo con una jerarquía, para esto es necesario considerar las reglas siguientes.

1. Los signos + no afectan el valor de los signos de cualquier expresión, por lo que pueden dejarse los que inicialmente se tienen.

Ejemplo:

$$(4x + 2) + (3x - 2)$$

$$4x + 2 + 3x - 2$$

Si observas el término $3x$ y -2 mantienen sus signos aún después de multiplicar el signo positivo.

2. Los signos - pueden cambiar el signo de otras expresiones al multiplicarse. Se recomienda siempre eliminar primero los signos interiores en los signos de agrupación.

Ejemplo:

$$(8x - 5) - (2x - 2)$$

$$8x - 5 - 2x + 2$$



$$4x + (48y - 2) =$$

En este caso, los signos de los términos del segundo binomio sí cambian por la ley de los signos, recuerda que signos iguales que se multiplican siempre nos dan un valor positivo y signos contrarios siempre nos darán un valor negativo.

3. Una expresión no puede tener dos signos consecutivos, éstos siempre deberán estar separados por un término o por un signo de agrupamiento.

Contraejemplo:

$$2x + -3x$$

Encontrar una expresión como la anterior es un error, debes escribirla de la forma siguiente.

$$2x + (-3x)$$

Observa como ahora el paréntesis separa a los dos signos y me indica que es necesario multiplicar los signos para poder eliminarlos.

4. No se podrán multiplicar dos signos a menos que haya un paréntesis de por medio.

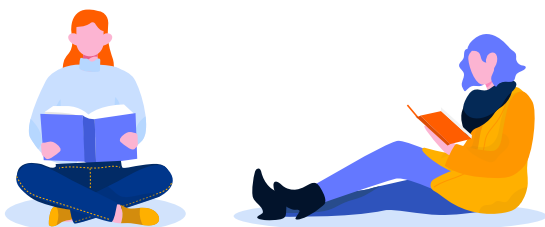
Contraejemplo:

$$3x - 5x$$

Muchas veces los alumnos se confunden y a pesar de que la operación escrita muestra una resta de monomios, suelen multiplicar los signos de la siguiente forma.

$$-3x - 5x$$

El signo + del $3x$ lo multiplican por el signo del siguiente término, lo cual es un error, no olvides





que para poder multiplicar los signos deberá existir un paréntesis entre los signos.

5. El orden para trabajar los símbolos de agrupamiento es el siguiente.

Primero resuelves lo que esté entre paréntesis () y en caso de que existan resuelves las barras o vínculos $\frac{\quad}{\quad}$, enseguida lo que tengas entre corchetes [], posteriormente resuelves lo que tengas en las llaves { }. La barra o el vínculo equivale a un paréntesis por lo que se trabaja de igual forma.

$$\{[(\frac{\quad}{\quad})]\}$$

Elimina los símbolos de agrupación usando las reglas vistas y simplifica las expresiones siguientes.

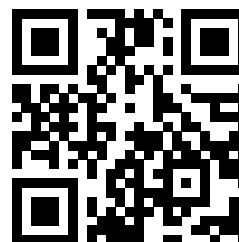
$$\begin{aligned} \text{a) } \{8x - [5x - (-x + y) + 7y] + 2y\} &= \{8x - [5x + x - y + 7y] + 2y\} \\ &= \{8x - 5x - x + y - 7y + 2y\} \\ &= 2x - 4y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \{3y - [2x - (3x - 2) + 4y] + 5x - y\} &= \{3y - [2x - 3x + 2 + 4y] + 5x - y\} \\ &= \{3y - [-x + 2 + 4y] + 5x - y\} \\ &= \{3y + x - 2 - 4y + 5x - y\} \\ &= 6x - 2y - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } -\{[-(8x - 6y) + 4x - y] - 3x - (2y + x) - 7x\} &= \\ &= -\{[-8x + 6y + 4x - y] - 3x - 2y - x - 7x\} \\ &= -\{-4x + 5y - 11x - 2y\} \\ &= -\{-4x + 5y - 11x - 2y\} \\ &= 4x - 5y + 11x + 2y \\ &= 15x - 3y \end{aligned}$$

Si deseas practicar este tipo de ejercicios visita el siguiente código QR o el enlace.

QR



<https://bit.ly/3gQ14DI>

Leyes de los exponentes

Para continuar es importante que repasemos una ley de gran importancia en el álgebra, me refiero a las leyes de exponentes que cito a continuación.

1. Todo número racional con exponente 1 es igual a sí mismo.

$$a^1 = a$$

2. Todo número racional diferente de cero con exponente 0 es igual a 1.

$$a^0 = 1$$

3. Producto de potencias: Cuando se tienen dos números que se multiplican con la misma base, se deja la base y se suman los exponentes.

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

4. Potencia de una potencia: Cuando una potencia se eleva a otra, se mantiene la base y se multiplican los exponentes.

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

5. Potencia de un producto: La potencia de un producto es igual al producto de la misma potencia de los factores.

$$(ab)^m = a^m b^m$$

6. Potencia de un cociente: Cuando se tiene un cociente elevado a un exponente, resulta igual a elevar al mismo exponente tanto el numerador como el denominador.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

7. Cociente de potencias: Al tener un cociente formado por dos potencias de la misma base, se mantiene la base y se restan el exponente del numerador, menos el exponente del denominador.

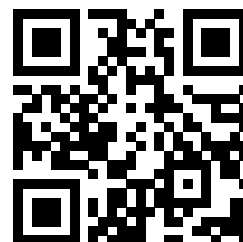
$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

8. Raíces de potencias: Cuando se tiene una raíz enésima de un radical que resulta ser una potencia, se deja la base del radicando y se eleva a un exponente formado por el cociente del exponente de la base, entre el índice de la raíz.

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Pon a prueba tu aprendizaje en el siguiente código QR o enlace.

QR



<https://bit.ly/2XZX0YA>





Leyes de radicales

A partir de la ley de los exponentes de las raíces de potencias se pueden desprender las siguientes leyes para manejar los radicales.

1. Ley de cancelación del radical: Las raíces enésimas elevadas a la misma potencia se cancelan.

$$(\sqrt[n]{a})^n = a, \sqrt[n]{a^n} = a$$

2. Raíz de una raíz: Cuando dentro de una raíz hay una raíz se pueden multiplicar los índices de ambas raíces a fin de reducir la operación numérica a una sola raíz y se mantiene el radicando.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

3. Raíz de una división o cociente: La raíz de un cociente es igual a la división de la raíz del numerador y de la raíz del denominador.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

4. Raíz de una multiplicación o producto: Una raíz de una multiplicación se puede separar como una multiplicación de raíces, sin importar el tipo de raíz.

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$$

Multiplicación

La multiplicación es una operación que al tener dos cantidades (multiplicando y multiplicador) se obtiene un producto. Tanto el multiplicando como el multiplicador se le conocen como los factores del producto. En ésta operación también aplicamos las propiedades de los números que vimos al inicio del parcial, así como las leyes de los exponentes y radicales.

Multiplicación de monomios

Para multiplicar los monomios debemos considerar la multiplicación de los signos, los coeficientes y las literales las cuales deberán ordenarse en orden alfabético.

Ejemplo

$$(-3m^2)(4m)$$

Primero multiplicamos los signos $(-)(+) = (-)$, enseguida los coeficientes $(3)(4) = 12$ y finalmente las literales $(m^2)(m) = m^3$ y agrupamos todo de éste modo:

$$(-3m^2)(4m) = -12m^3$$

Ejemplo

$$(-4x^2y)(-2x) = (-4)(-2)(x^2)(x)(y) = 8x^3y$$

Recuerda que cuando tienes potencias de la misma base deberás sumar los exponentes.

Ejemplo

$$(3x^2y)(-2x)(-4y^3) = (3)(-2)(-4)(x^2)(x)(y)(y^3) = 24x^3y^4$$

Ejemplo

$$\left(\frac{1}{2}a^2\right)\left(\frac{4}{5}a^3b\right) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{4}{5}\right)(a^2)(a^3)(b) = \frac{2}{5}a^5b$$



Multiplicación de un polinomio por un monomio

Se multiplica el monomio por cada uno de los términos del polinomio, teniendo en cuenta en cada caso las leyes de los signos, y se separan los productos parciales con sus propios signos.

Ejemplo

Multiplicar el polinomio $x - y + z$ por el monomio $-a^2$

$$(-a^2)(x - y + z) = (-a^2)(x) + (-a^2)(-y) + (-a^2)(z) = -a^2x + a^2y - a^2z$$

Ejemplo

Multiplicar $\frac{1}{2}a - \frac{2}{3}b$ por $\frac{2}{5}a^2$

$$\left(\frac{2}{5}a^2\right)\left(\frac{1}{2}a - \frac{2}{3}b\right) = \left(\frac{2}{5}a^2\right)\left(\frac{1}{2}a\right) + \left(\frac{2}{5}a^2\right)\left(-\frac{2}{3}b\right) = \frac{1}{5}a^3 - \frac{4}{15}a^2b$$

Observa que cuando se aplica la multiplicación de un monomio por un polinomio nos queda un paso de tal forma que tenemos diversas multiplicaciones de monomios por monomios y podemos seguir el procedimiento para ese caso.

Ejemplo

Multiplicar $x^4 - 6x^3 + 8x^2 - 7x + 5$ por $-3a^2x^3$

$$(-3a^2x^3)(x^4 - 6x^3 + 8x^2 - 7x + 5) = -3a^2x^7 + 18a^2x^6 - 24a^2x^5 + 21a^2x^4 - 15a^2x^3$$

Multiplicación de dos polinomios

Para este caso se multiplican todos los términos del multiplicando por cada uno de los términos del multiplicador, teniendo en cuenta las leyes de los signos y posteriormente se reducen los términos semejantes.

Ejemplo

$$\begin{aligned} (3x^2 - 2x + 7)(2x + y) &= \\ &= (3x^2)(2x) + (3x^2)(y) + (-2x)(2x) + (-2x)(y) + (7)(2x) + (7)(y) \\ &= 6x^3 + 3x^2y - 4x^2 - 2xy + 14x + 7y \end{aligned}$$

Observa que en éste caso no hay términos semejantes que reducir.

Ejemplo

$$(2a^2 + 4)(4a^2 - 5a - 3)$$

Otra manera de visualizar el procedimiento es el siguiente:

$$2a^2(4a^2 - 5a - 3) + 4(4a^2 - 5a - 3)$$

De éste modo tenemos dos multiplicaciones de un monomio por un polinomio y podemos seguir el procedimiento que mencionamos anteriormente.

$$((2a^2)4a^2 - (2a^2)5a - 3(2a^2)) + ((4)4a^2 - (4)5a - (4)3)$$

$$8a^4 - 10a^3 - 6a^2 + 16a^2 - 20a - 12$$

Ahora si hay términos semejantes y podemos reducirlos.

$$8a^4 - 10a^3 + 10a^2 - 20a - 12$$

De éste modo tenemos que:

$$(2a^2 + 4)(4a^2 - 5a - 3) = 8a^4 - 10a^3 + 10a^2 - 20a - 12$$

Ejemplo

Multiplicar $2x - y + 3z$ por $x - 3y - 4z$

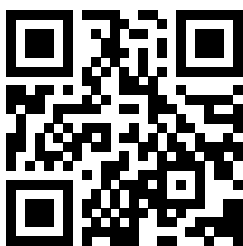
$$(2x - y + 3z)(x - 3y - 4z) =$$

$$= 2x^2 - 6xy - 8xz - xy + 3y^2 + 4yz + 3xz - 9yz - 12z^2$$

$$= 2x^2 + 3y^2 - 12z^2 - 7xy - 5xz - 5yz$$

En el siguiente link podrás encontrar más ejercicios de multiplicación de polinomios

QR



<https://bit.ly/3gOEVPV>





División

La división de polinomios es una operación algebraica que nos permite encontrar el cociente dado un dividendo y un divisor, para poder llevar a cabo esta operación es necesario considerar las leyes de los exponentes y la ley de signos para la división que menciono a continuación.

$$\frac{(+)}{(+)} = (+)$$

$$\frac{(-)}{(+)} = (-)$$

$$\frac{(+)}{(-)} = (-)$$

$$\frac{(-)}{(-)} = (+)$$

División de monomios

Para dividir dos monomios se divide el coeficiente del dividendo entre el coeficiente del divisor y a continuación las literales se escriben en orden alfabético aplicando la ley de exponentes correspondiente, en caso de que sean las mismas literales se dejará la base y se restarán los exponentes. El signo resultante será el que se obtenga con la ley de los signos para la división.

Observa la siguiente operación.

$$\frac{8a^4}{-2a^3} = \left(\frac{8}{-2}\right) \frac{a^4}{a^3} = -4a^{4-3} = -4a$$

El orden es similar a la multiplicación, debes aplicar la ley de signos, realizar las operaciones

con los coeficientes y finalmente aplicar leyes de los exponentes en las literales.

Ejemplo:

Dividir $4a^3b^2$ entre $-2ab$

$$\frac{4a^3b^2}{-2ab} = -2a^{3-1}b^{2-1} = -2a^2b$$

Ejemplo:

$$\frac{21m^5n^2}{3m^2n} = 7m^3n$$

División de polinomios por monomios

Se deberá dividir cada uno de los términos del polinomio por el monomio, separando cada término con los signos resultantes de aplicar la ley de los signos.

Ejemplo:

Dividir $4a^3 + 2a^2 - 8a$ entre $2a$

$$\frac{4a^3 + 2a^2 - 8a}{2a} = \frac{4a^3}{2a} + \frac{2a^2}{2a} - \frac{8a}{2a} = 2a^2 + a - 4$$

Como puedes notar el denominador afecta a cada término del numerador tal y como lo trabajas en las fracciones con números enteros. Al separarlos llegamos al caso anterior de división entre monomios.



Ejemplo:

$$\frac{3x^2y^3 - 5a^2x^4}{-3x^2} = \frac{3x^2y^3}{-3x^2} + \frac{-5a^2x^4}{-3x^2} = -y^3 + \frac{5}{3}a^2x^2$$

Cuando el cociente de los coeficientes no es un número entero lo manejamos como una fracción.

Ejemplo:

$$\frac{a^x + a^{m-1}}{a^2} = \frac{a^x}{a^2} + \frac{a^{m-1}}{a^2} = a^{x-2} + a^{m-1-2} = a^{x-2} + a^{m-3}$$

Cuando los exponentes tienen literales trabajamos de la misma manera usando las leyes de exponentes correspondientes.

División entre polinomios

Esta operación posee un procedimiento más complejo pero muy fácil de seguir.

Supongamos que tenemos la siguiente división.

$$\frac{4x^2 + 6x - 12}{x + 4}$$

Primeramente, cambiaremos la notación de la división a la forma en la que sueles hacer las divisiones con números enteros.

$$x + 4 \overline{) 4x^2 + 6x - 12}$$

En primer lugar, dividimos el primer término del dividendo entre el primer término del divisor $\frac{4x^2}{x} = 4x$ y el resultado lo colocamos en la parte superior de la caja de división.

$$x + 4 \overline{) 4x^2 + 6x - 12} \quad \begin{array}{r} 4x \end{array}$$

El resultado obtenido multiplicará posteriormente a los miembros del divisor no olvidando cambiar el signo después de realizar la multiplicación, si es (+) lo escribimos (-) y viceversa, debajo del dividendo.

$$\begin{array}{r} x + 4 \overline{) 4x^2 + 6x - 12} \\ \underline{-4x^2 - 16x} \end{array}$$

Enseguida se realiza la reducción de términos y bajamos el siguiente término del dividendo.

$$\begin{array}{r} 4x \\ x+4 \overline{) 4x^2 + 6x - 12} \\ \underline{-4x^2 - 16x} \\ -10x - 12 \end{array}$$

Ahora repetimos el primer paso y dividimos el primer término del residuo entre el primer término del divisor $\frac{-10x}{x} = -10$ y el resultado lo colocamos frente al resultado previo.

$$\begin{array}{r} 4x - 10 \\ x+4 \overline{) 4x^2 + 6x - 12} \\ \underline{-4x^2 - 16x} \\ -10x - 12 \end{array}$$

Nuevamente multiplicamos $(-10)(x+4)$ y el resultado lo colocamos debajo del residuo cambiando los signos de cada término.

$$\begin{array}{r} 4x - 10 \\ x+4 \overline{) 4x^2 + 6x - 12} \\ \underline{-4x^2 - 16x} \\ -10x - 12 \\ 10x + 40 \end{array}$$

Reducimos los términos en el residuo y si el residuo es cero la división terminó. Si no es cero significa que el dividendo no es divisible entre el divisor.

$$\begin{array}{r} 4x - 10 \\ x+4 \overline{) 4x^2 + 6x - 12} \\ \underline{-4x^2 - 16x} \\ -10x - 12 \\ \underline{10x + 40} \\ 28 \end{array}$$

En este caso no tenemos residuo cero. Para comprobar la división realizamos lo siguiente.

$$(4x - 10)(x + 4) + 28$$

Multiplicamos el cociente por el divisor y agregamos el residuo, si el resultado que obtengamos es el dividendo, realizamos correctamente el procedimiento.

$$(4x - 10)(x + 4) + 28 = 4x^2 + 16x - 10x - 40 + 28 = 4x^2 + 6x - 12$$

Como podrás notar, efectivamente nuestra división fue correcta.

Analicemos ahora el siguiente ejemplo:

Dividir $3x^2 + 2x - 8$ entre $(x + 2)$

$$\frac{3x^2 + 2x - 8}{x + 2}$$

Cambiamos la forma de escritura.

$$x + 2 \overline{) 3x^2 + 2x - 8}$$

Dividir el primer término del dividendo entre el primer término del divisor.

$$x + 2 \overline{) 3x^2 + 2x - 8} \quad \begin{array}{r} 3x \\ \hline \end{array}$$

Multiplicar el resultado por el residuo, cambiando signos del resultado y acomodarlos debajo del dividendo en el orden correspondiente.

$$x + 2 \overline{) 3x^2 + 2x - 8} \quad \begin{array}{r} 3x \\ \hline -3x^2 - 6x \\ \hline \end{array}$$

Reducir términos semejantes y bajar el siguiente término del dividendo.

$$x + 2 \overline{) 3x^2 + 2x - 8} \quad \begin{array}{r} 3x \\ \hline -3x^2 - 6x \\ \hline -4x - 8 \end{array}$$

Repetir el primer paso dividiendo el primer término del residuo entre el primer término del divisor.

$$x + 2 \overline{) 3x^2 + 2x - 8} \quad \begin{array}{r} 3x - 4 \\ \hline -3x^2 - 6x \\ \hline -4x - 8 \end{array}$$

Multiplicar el resultado por el divisor, cambiando los signos de cada uno de los términos al escribirlos debajo del residuo.

$$\begin{array}{r} 3x - 4 \\ x + 2 \overline{) 3x^2 + 2x - 8} \\ \underline{-3x^2 - 6x} \\ -4x - 8 \\ \underline{4x + 8} \\ 0 \end{array}$$

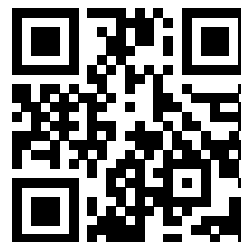
Reducir los términos semejantes.

$$\begin{array}{r} 3x - 4 \\ x + 2 \overline{) 3x^2 + 2x - 8} \\ \underline{-3x^2 - 6x} \\ -4x - 8 \\ \underline{4x + 8} \\ 0 \end{array}$$

En este caso el residuo sí nos dio cero, por lo que el dividendo sí es divisible por el divisor.

Visita el siguiente código QR o enlace donde encontrarás algunos ejercicios sobre el tema.

QR



<https://bit.ly/2UaolGa>

PROHIBIDA SU
REPRODUCCIÓN





< CIERRE


**ACTIVIDAD DE
APRENDIZAJE 4**

PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN

I. Desarrollen en equipos de trabajo los diagramas de flujo para realizar las operaciones básicas con polinomios y compártanlos con sus compañeros de clase mediante una plenaria coordinada por su docente.

II. Desarrolla de manera individual las siguientes actividades y una vez que hayas terminado tus procedimientos verifica tus resultados con tu docente, comparte tus dudas con tus compañeros de clase y resuélvanlas.

1. Grado de polinomios: Determina el grado absoluto de cada polinomio y completa la tabla.

Polinomio	Grado
$x^3y^6z^2$	
$6x^3y$	
$x^2 + x + 3$	
$x + y + 5$	
$10x^3 + 5x^4 - xyz$	
$8x^3 + xyz^2$	

2. Reduce los siguientes términos semejantes.

- a) $2x^3 + \frac{2}{7}x^3 - 4x^3$
- b) $2a^2 - \frac{1}{2}a^2 + a^2$
- c) $2mn^3 + 4m^2n - 5mn^3 + 5mn - m^2n - 3mn + 3mn^3$
- d) $4x - 6x + 35x$
- e) $\frac{2}{9}a^3 + \frac{5}{6}ax^2 + \frac{1}{3}x^3 - a^3 + \frac{1}{6}ax^2 + x^3$

3. Suma los siguientes polinomios.

- a) $3a + 2b - c; 2a + 3b + c$
- b) $7a - 4b + 5c; -7a + 4b - 6c$
- c) $m + n - p; -m - n + p$
- d) $5x - 7y + 8; -y + 6 - 4x; 9 - 3x + 8y$
- e) $ax - ay - az; -5ax - 7ay - 6az; 4ax + 9ay + 8az$

4. Realiza la resta de los siguientes polinomios.

- a) Restar $a - b$ de $a + b$
- b) De $2x - 3y$ restar $-x + 2y$
- c) De $z - y + z$ restar $x - y - z$
- d) $(y^5 - 9y^3 + 6y^2 - 31) - (-11y^4 + 31y^3 - 8y^2 - 19y)$
- e) $\left(\frac{7}{6}m - \frac{3}{2}n - \frac{5}{3}p\right) - \left(\frac{1}{3}m - \frac{4}{5}n - 2p\right)$

5. Realiza las siguientes operaciones con signos de agrupamiento.

- a) $3m^2 - \{-[-14m^2 - 6n^2 + 6p^2 - (11m^2 - 8n^2) - (19n^2 + 16p^2) + 2m^2]\}$
- b) $-5a + [-(9a - 5b) + (7a - 8b) - 7b]$
- c) $3a + \{3a - 6 + [5a - 6b - (-2b - 7)] - 7a\}$
- d) $7x - 10y - 10z - \{-2x + 9y - 3z - [-8x + 2y - 5z + (6x - 5z)]\}$
- e) $-7x^2 - [(2x^2 + 5y^2) + (6x^2 - 2y^2) + (2x^2 + 3y^2)]$

6. Desarrolla las siguientes multiplicaciones de polinomios.

- $(a^4b^5)(5a^8b^3c^5)$
- $(-x^4y^6z^2)(xyz^6)$
- $(-6x^5y^8)(-6x^6y^9z^{10})$
- $\left(\frac{7}{9}ab^2\right)\left(\frac{3}{7}ab^7\right)$
- $\left(\frac{1}{2}x^2 - 5x + 3\right)(2x^3)$
- $(3a - 5b + 6c)\left(-\frac{3}{10}a^2x^3\right)$
- $\left(\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{3}b^2 + \frac{1}{4}x^2\right)\left(-\frac{5}{8}a^2m\right)$
- $(x^5 - 6x^3 - 8x)(3a^2x^2)$
- $(a^3 - 4a^2 + 3a - 1)(a^2 + 4a + 3)$
- $(x^2 + xy + y^2)(x - y)$
- $(a^2 + a + 1)(a^2 - a - 1)$

7. Realiza las divisiones de polinomios siguientes.

- $\frac{14a^3b^4}{-2ab^2}$
- $\frac{a^8b^3}{a^2b}$
- $\frac{12x^7yz}{18xyz}$
- $\frac{a^2 + a^4 - a}{a}$
- $\frac{x^3y^2 + x^2y^2 - x^5y}{xy}$
- $\frac{14a^3 + 21a^4 - a^5}{7a^2}$
- $\frac{a^3 + 2a - 3}{a + 3}$
- $\frac{14x^2 - 12 + 22x}{-3 + 7x}$
- $\frac{2x^4 - x^3 - 3 + 7x}{2x + 3}$
- $\frac{a^4 - a^2 - 2a - 1}{a^2 + a + 1}$





Actividad Socioemocional

*“Sin metas y planes para llegar a ellos, eres como un barco que ha zarpado sin destino”.
Fitzhugh Dodson*

¿Cómo trabajo con mis obstáculos?

– ¡Quiero aprobar matemáticas! Ésta parece una meta ambiciosa. Pero en la lección anterior me dijeron que la divida en metas más pequeñas. Ya sé: voy a entregar mi primera tarea y la voy a aprobar.

... después de unos días...

– ¡Oh no! Hay que entregarla mañana. Aún no empiezo. Me distraje con otras cosas y lo dejé para el último momento. Siempre me pasa lo mismo. No creo que me dé tiempo de terminarla...

¿Te ha pasado algo similar? En esta lección vamos a conocer una estrategia para alcanzar metas. Se llama: **MEROP**. ¿Sabes qué es **MEROP**? Te lo explico con un ejemplo:

MEta: Entregar mi tarea completa.

Resultado: Feliz, confiado, satisfecho por ser capaz de entregar la tarea bien y a tiempo.

Obstáculo: Me distraigo con mi celular.

Plan: Si en la tarde me distraigo con mi celular, entonces voy a ponerlo en silencio y lo voy a guardar. ¡Anímate a aplicarlo!

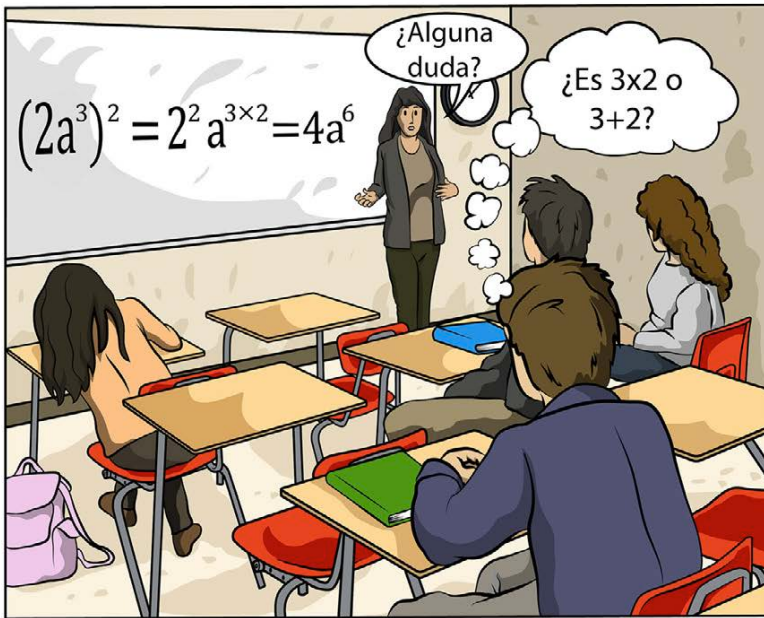


21 de octubre
Nombre: Juan Sánchez

Examen de Matemáticas

$$-3 + (-x) = -3 + x \quad \text{X}$$

No aprobado



21 de septiembre
Nombre: Juan Sánchez

Examen de Matemáticas

$$(x^2)^5 = x^7 \quad \text{X}$$

No aprobado



21 de septiembre
Nombre: Juan Sánchez

Examen de Matemáticas

$$5x = x + 4$$

$$5x - x = 4$$

$$4x = 4 \quad \text{X}$$

$$x = 4 - 4 = 0$$

No aprobado

La meta de Juan es aprobar matemáticas. Comenten en equipo:

I. ¿Cómo se sentiría si aprobara?

II. ¿Qué le impide a Juan aprobar los exámenes?

III. ¿Qué le recomendarían que haga?



2. Para el siguiente curso Juan llenó su tarjeta MEROP. Léela:

ME		Mi meta es: <u>Aprobar el primer examen</u>
R		Mejor resultado: <u>Sentirme contento y aliviado</u>
O		Obstáculo: <u>Quedarme con dudas</u>
P	Plan:	
Si <u>Tengo dudas en la clase de matemáticas</u>		entonces voy a <u>levantar la mano y preguntar hasta que me quede claro</u>
Obstáculo (cuándo y dónde)		Acción (para vencer el obstáculo)

ME		Mi meta es: _____
R		Mejor resultado: _____
O		Obstáculo: _____
P	Plan:	
Si _____		entonces voy a _____
Obstáculo (cuándo y dónde)		Acción (para vencer el obstáculo)

Ahora completa la tuya. Ten en cuenta:

- En Mi meta es escribe una meta concreta, un reto que puedas lograr en un tiempo máximo de una semana. Piensa en una meta relacionada con esta materia.
- En Mi mejor resultado reflexiona: ¿cuál sería el mejor resultado?, ¿qué es lo mejor que podría pasarte si cumplieras tu meta?, ¿cómo te sentirías al haberla cumplido? Intenta visualizar el resultado con claridad y que sea motivante y satisfactorio.
- En Obstáculo piensa: ¿cuál es el principal obstáculo que encontrarás para lograr tu meta? Asegúrate de que sea un obstáculo sobre el que tengas control y visualízalo con claridad.
- En Plan reflexiona: ¿qué puedes hacer para superar tu obstáculo? Detecta algo que puedas hacer para superarlo. No debe ser una decisión interna, sino una acción observable. Escribe tu acción siguiendo el siguiente esquema:
«Si... (obstáculo, cuándo y dónde), entonces voy a... (acción)».



Resumen

En esta lección presentamos MEROP, una estrategia diseñada para ayudarte a incrementar tu motivación y transformar tus hábitos para alcanzar tus metas. Esta estrategia, desarrollada por Oettingen y colaboradores, es el resultado de más de veinte años de investigación y presenta una idea única y sorprendente: los obstáculos que pensamos que nos impiden cumplir nuestros deseos, en realidad pueden ayudarnos a realizarlos. ¿Cómo? Identificar los obstáculos a nuestras metas nos ayuda a articular planes para hacer realidad lo que buscamos. MEROP nos ayuda a que imaginemos nuestras metas, identifiquemos qué obstáculos nos impiden alcanzarlas y formulemos un plan de acción.

¿Quieres saber más?

¿Sabías que la estrategia de MEROP (WOOP por sus siglas en inglés) permitió potenciar un sesenta por ciento el esfuerzo de los estudiantes de una escuela a la hora de presentar sus exámenes? Para saber más sobre la historia, la ciencia y los beneficios de usar MEROP busca en Google “woop my life”, y selecciona la opción español.

Glosario

Obstáculos.

Factores que impiden o dificultan la posibilidad de alcanzar alguna meta.

Meta.

Es el objetivo o propósito al que se dirigen nuestros esfuerzos. Como explican Nagaoka, Farrington y Ehlich, para alcanzar una meta se requiere la “combinación de un impulso interno, competencias interpersonales, la habilidad para regular tanto la atención como el comportamiento personal y la adaptación o la capacidad para perseverar cuando la circunstancia se torna difícil”.

Para tu vida diaria

Revisa los pasos de MEROP con calma para que puedas tener mayor claridad de qué debes poner en cada uno de los cuatro pasos. Escribe una nueva tarjeta MEROP pensando en una meta que quieres alcanzaren otra materia o en tu vida personal

El trabajo simbólico

En el parcial anterior estuvimos trabajando con algunas operaciones básicas con polinomios, justo al final analizamos como las sucesiones pueden ser representadas en función de este tipo de expresiones, sin embargo, al momento de simplificarlas resulta una tarea un tanto compleja, para ello necesitas conocer algunas herramientas que nos permitirán manejar de mejor forma estas estructuras matemáticas.

Operaciones con polinomios (productos notables)

Los productos notables son ciertos productos que se efectúan directamente cumpliendo ciertas reglas y no se necesita verificar la multiplicación para saber que es correcta, ya que la misma regla da garantía de su veracidad. En otras palabras, son fórmulas preestablecidas que nos ahorran procesos escritos para llegar a un resultado y nos hacen más simple el trabajo con polinomios. Un proceso que te puede llevar 5 minutos, con la aplicación de un producto notable lo puedes hacer en menos de un minuto, interesante ¿no crees?

Cuadrado de la suma de dos cantidades

Supongamos que tenemos dos factores iguales.

$$(a + b)(a + b) = (a + b)^2$$

Desarrollemos el producto de manera general, haciendo uso del procedimiento de la multiplicación de polinomios para obtener el producto notable.

$$(a + b)(a + b) = aa + ab + ba + bb = a^2 + 2ab + b^2$$

De este modo el producto notable sería.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

El cuadrado de la suma de dos números es igual al cuadrado del primer número más el doble del primer número por el segundo número más el cuadrado del segundo número.

Ejemplo:

Probaremos esta operación con un número conocido.

$$(12)^2 = 144$$

A partir de la operación anterior, descompongamos el doce en dos números que se estén sumando.

$$(10 + 2)^2$$

Y ahora apliquemos el producto notable.

$$(10 + 2)^2 = 10^2 + 2(10)(2) + 2^2 = 100 + 40 + 4 = 144$$

Ejemplo:

Por simple inspección encuentra el siguiente producto aplicando la regla del cuadrado de la suma.

$$(x + 5)^2 = x^2 + 2(x)(5) + 5^2 = x^2 + 10x + 25$$

Cuadrado de la diferencia de dos cantidades

Ahora nuestros factores son iguales, pero restando.

$$(a - b)(a - b) = (a - b)^2$$

Desarrollemos el producto de manera general, haciendo uso del procedimiento de la multiplicación de polinomios para obtener el producto notable.

$$(a - b)(a - b) = aa - ab - ba + bb = a^2 - 2ab + b^2$$

De este modo el producto notable sería.

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

El cuadrado de la diferencia de dos números es igual al cuadrado del primer número menos el doble del primer número por el segundo número más el cuadrado del segundo número.

Ejemplo: $(10x^2 - 9xy)^2 = (10x^2)^2 - 2(10x^2)(9xy) + (9xy)^2$

Producto binomios conjugados

Se le llama así al producto de la suma por la diferencia de dos cantidades, si efectuamos la multiplicación, resulta.

$$(a + b)(a - b) = aa - ab + ba - bb = a^2 - b^2$$

De este modo tenemos el producto notable.

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Que se enuncia del siguiente modo: *El producto de la suma y la diferencia de dos términos es igual al cuadrado del primer término menos el cuadrado del segundo término.*

Ejemplos:

$$(5 + b)(5 - b) = 5^2 - b^2 = 25 - b^2$$

$$(3 + x)(3 - x) = 3^2 - x^2 = 9 - x^2$$

$$(5x + y)(5x - y) = (5x)^2 - y^2 = 25x^2 - y^2$$



Producto de dos binomios con término común

Si tenemos el producto $(a + b)(a + c)$ en ambos existe un término en común, al desarrollar el producto tenemos lo siguiente:

$$(a + b)(a + c) = aa + ac + ba + bc = a^2 + (b + c)a + bc$$

El producto de dos binomios con término común es igual al cuadrado del término común, más el producto de la suma de los términos no comunes por el término común, más el producto de los términos no comunes.

Ejemplos:

$$(x + 3)(x + 8) = x^2 + (8 + 3)x + (8)(3) = x^2 + 11x + 24$$

$$(x + 6)(x - 2) = x^2 + 4x - 12$$

$$(3 - k)(8 - k) = k^2 - 11k + 24$$

Cubo de un binomio

Si elevamos un binomio al cubo tendremos:

$$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b) = (a + b)^2(a + b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b) \\ = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

El cubo de la suma de dos términos es igual al cubo del primer término más el triple del cuadrado del primer término por el segundo, más el triple del primer término por el cuadrado del segundo más el cubo del segundo término.

Ejemplos:

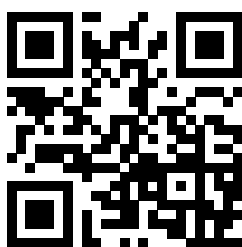
$$(x - 1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

$$(a^2 - 5b)^3 = a^6 - 15a^4b + 75a^2b^2 - 125b^3$$

$$(a^3 + b^3)^3 = a^9 + 3a^6b^3 + 3a^3b^6 + b^9$$

En la siguiente dirección podrás encontrar una gran variedad de ejercicios sobre productos notables para que practiques.

QR



<https://bit.ly/3064Xy4>



Factorización de polinomios

La factorización es un proceso contrario a la multiplicación, en la que dados dos factores encontramos un producto, la factorización consiste en encontrar los factores que componen una expresión algebraica.

Un factor es uno de los elementos de la multiplicación que al multiplicarse por otro dan como resultado un producto.

Ejemplo:

Dados dos factores encontramos un producto.

$$(8)(5) = 40$$

Y para encontrar los factores de 40 podemos hacerlo así.

$$40 = (4)(10)$$

$$40 = (2)(2)(5)(2)$$

$$40 = (8)(5)$$

$$40 = (20)(2)$$

$$40 = (40)(1)$$

Factorización de monomios

Un método muy útil para encontrar los factores de cualquier número es usar los números primos, recuerda que cualquier número puede ser escrito en números primos. Los números primos son aquellos que solo tienen dos divisores, a sí mismos y al uno.

Los primeros números primos son: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 23, 29, ...

Para factorizar un número se deberá ir escogiendo los distintos números primos en orden para ir encontrando sus factores.

Ejemplo:

Encontrar los factores del número 156.

En la primera columna se coloca el resultado de dividir el número inicial entre los números primos de la derecha.

156	2
78	2
39	3
13	13
1	

De este modo los factores primos de 156 son: 2, 2, 3, 13

Y los factores de 156 son todas las posibles combinaciones de esos números al multiplicarse.

Si tenemos un monomio sus factores se encuentran descomponiendo tanto el coeficiente como las literales.

Ejemplos:

$$8x^2 = (2)(2)(2)(x)(x)$$

$$15a^2b^3 = (3)(5)(a)(a)(b)(b)(b)$$

Factorización por factor común

Cuando un polinomio presenta términos en común, se puede extraer este término y multiplicarlo por los términos restantes, en otras palabras, se deberá dividir el término común de cada término y expresarlo al final como un producto.

Ejemplo:

En el siguiente binomio el término que se repite es a, multiplicamos y dividimos por el mismo término para no afectar el valor del binomio, recuerda que $\frac{a}{a} = 1$

$$(a^2 + 2ab) = (a^2 + 2ab) \left(\frac{a}{a} \right) =$$

$$= a \left(\frac{a^2}{a} + \frac{2ab}{a} \right) = a(a + 2b)$$

Ejemplos:

$$4x^3 - 2x^2 + 6x = 2x(2x^2 - x + 3)$$

$$ax + ay = a(x + y)$$

$$x + x^2 - x^3 + x^4 = x(1 + x - x^2 + x^3)$$

Cuando el factor común es un polinomio se efectúa el mismo proceso, pero teniendo cuidado con el uso de los signos de agrupamiento correspondiente.

Ejemplo:

Descomponer $x(a + b) + y(a + b)$ en dos factores.

$$\begin{aligned} x(a + b) + y(a + b) &= [x(a + b) + y(a + b)] \left(\frac{a + b}{a + b} \right) = (a + b) \left(\frac{x(a + b)}{a + b} + \frac{y(a + b)}{a + b} \right) \\ &= (a + b)(x + y) \end{aligned}$$

Ejemplos:

$$2x(x + y + z) - x - y - z = 2x(x + y + z) - (x + y + z) = (x + y + z)(2x - 1)$$

$$x(a + 2) + y(a + 2) = (a + 2)(x + y)$$

Factorización por agrupación de términos

Esta factorización consiste en repetir la factorización anterior buscando similitudes en los términos de un polinomio, observa el siguiente ejemplo.

$$2x^2 - 3xy - 4x + 6y$$

Podemos ver que hay literales que se repiten por pares, busquemos ahora los factores que me permitan encontrar un segundo factor común.

$$2x^2 - 4x - 3xy + 6y = 2x(x - 2) - 3y(x - 2)$$

Ahora encontramos un nuevo factor común $(x - 2)$

$$2x^2 - 4x - 3xy + 6y = (x - 2)(2x - 3y)$$

De este modo hemos terminado la factorización.

Ejemplos:

$$4a^3 - 1 - a^2 + 4a = a^2(4a - 1) + (4a - 1) = (4a - 1)(a^2 + 1)$$

$$x + x^2 - xy^2 - y^2 = x(1 + x) - y^2(x + 1) = (x + 1)(x - y^2)$$

Factorización por diferencia de cuadrados

Esta factorización simplemente es aplicar el producto notable de binomios conjugados, pero en sentido contrario.

$$\text{Producto notable } (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$\text{Factorización por diferencia de cuadrados } a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Ejemplo:

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

$$4 - a^2 = (2 - a)(2 + a)$$

$$a^2 - 25 = (a + 5)(a - 5)$$

Factorización de trinomios cuadrados perfectos

Un trinomio cuadrado perfecto es aquel que se obtiene del cuadrado de un binomio, teniendo entonces la siguiente estructura $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Al igual que la factorización por diferencia de cuadrados, necesitamos utilizar el producto notable que da origen a este trinomio.

La regla para encontrar los factores consiste en determinar la raíz cuadrada del primero y tercer término del trinomio, el signo del segundo término se emplea para separar ambos términos.

Ejemplo:

$$16x^2 + 16x + 4 =$$

Encontramos las raíces del primer y tercer término.

$$\sqrt{16x^2} = \sqrt{16}\sqrt{x^2} = 4x$$

$$\sqrt{4} = 2$$

Y las escribimos separadas con el signo del segundo término, en este caso es (+).

$$(4x + 2)(4x + 2) = (4x + 2)^2$$

Factorización de la forma $x^2 + bx + c$

Recordemos el producto notable.

$$(a + b)(a + c) = a^2 + (b + c)a + bc$$

Y hagamos un pequeño ajuste a las literales.

$$x^2 + (b_1 + c_1)x + b_1c_1 = (x + b_1)(x + c_1)$$

Entonces podemos comprender la factorización, si igualamos ambas expresiones tenemos que:

$$x^2 + bx + c = x^2 + (b_1 + c_1)x + b_1c_1$$

Entonces,

$$b = b_1 + c_1$$

$$c = b_1c_1$$

El trinomio se factoriza en dos factores binomios cuyo primer término es la raíz cuadrada del primer término siempre y cuando éste tenga coeficiente unitario; los segundos términos de los binomios son aquellos que sumados algebraicamente den el coeficiente b del término central del trinomio y que multiplicados resulte el tercer término c del trinomio.

Ejemplo:

Factoriza los siguientes trinomios de la forma $x^2 + bx + c$

a) $x^2 + 11x + 24$

Factorizamos el tercer término y revisamos que la suma de sus factores sea el coeficiente del segundo término.

$$24 = (8)(3)$$

$$11 = 8 + 3$$

Por lo tanto, los factores son:

$$x^2 + 11x + 24 = (x + 8)(x + 3)$$

b) $x^4 + x^2 - 12$

$$-12 = (4)(-3)$$

$$1 = 4 - 3$$

$$x^4 + x^2 - 12 = (x + 4)(x - 3)$$



Factorización de la forma $ax^2 + bx + c$

Esta factorización se logra aplicando el siguiente criterio.

$$ax^2 + bx + c = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2)$$

Donde:

$$a = a_1a_2$$

$$c = b_1b_2$$

$$b = a_1b_2 + a_2b_1$$

Ejemplo:

Factoriza el trinomio $3x^2 + 14x + 8$

Encontremos los factores del primer y último término.

$$3 = (3)(1)$$

$$8 = (4)(2)$$

Ahora comprobemos con el coeficiente del segundo término del trinomio.

$$14 = (3)(2) + (1)(4)$$

Esta combinación no cumple, probamos con otra.

$$14 = (3)(4) + (1)(2)$$

$$b = a_1b_2 + a_2b_1$$

Por lo tanto, la factorización es:

$$3x^2 + 14x + 8 = (3x + 2)(x + 4)$$

Visita los siguientes códigos QR o enlaces donde encontrarás ejercicios con soluciones para reforzar tus aprendizajes.

◀ CIERRE



ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE 5

PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN



<https://bit.ly/2XZPblr> <https://bit.ly/372Scph>

I. Aplica los productos notables a las siguientes expresiones para su solución, sin necesidad de hacer las multiplicaciones correspondientes.

1. $(x + 3)^2$

2. $(9 + a)^2$

3. $(7x + 11)^2$

4. $(x^{10} + y^5)^2$

5. $(x - 2)^2$

6. $(a - 8)^2$

7. $(5 - b)^2$

8. $(x^2 - 1)^2$

9. $(x - 8)(x + 8)$

10. $(a - 5h)(5h + a)$

11. $(x^2 - 4)(x^2 + 4)$

12. $(3x - y)(3x + y)$

13. $(x + 7)(x - 8)$

14. $(5x^3 + 1)(5x^3 + 3)$

15. $(4 - 2b)(8 - 2b)$

16. $(11 + pq)(3 + pq)$

17. $(1 - x)^3$

18. $(3x - 2y)^3$

19. $(u^2 + w^2)^3$

20. $(x^2 - ay)^3$

II. Identifica qué reglas de factorización puedes aplicar en cada caso para encontrar los factores de las siguientes expresiones.

1.- $bx + 2x$

2.- $xy + x^2$

3.- $a^2 - 3a^3$

4.- $2ab - 6bc + 4b$

5.- $8mn + 2m^2n$

6.- $2a^2bc^3 - 4ab^2c$

7.- $7(a + 2) + x(a + 2)$

8.- $-x - y + m(x + y)$

9.- $m^2 - 9n^2$

10.- $49 - x^2$

11.- $(x + y)^2 - (a - b)^2$

12.- $x^2 - 4x + 4$

13.- $x^2 + 6x + 9$

14.- $81 - 18x^2 + x^4$

15.- $y^2 - 2yz + z^2$

16.- $x^2 + 7x + 6$

17.- $m^2 - 9m + 18$

18.- $x^2 + 11x + 18$

19.- $6x^2 - ax - 15x^2$

20.- $2a^2 - a - 1$

21.- $2x^2 + 7x + 3$

22.- $5m - 5n + 2x - 2y$

23.- $9ay + 3ax + 4x^2 + 12xy$

24.- $a^2 + 6a + 4$

25.- $25x^2 + 14x + 9$

Desarrollo formativo
del estudiante



PROHIBIDA SU
REPRODUCCIÓN



En equipos de trabajo deberán demostrar gráficamente cada uno de los siguientes productos notables:

- Cuadrado de la suma de dos términos
- Binomios conjugados
- Cubo de un binomio
- Binomio con término común

Pueden hacer uso de cartulinas o algún otro tipo de papel, también pueden realizar una animación o un vídeo para mostrar con el grupo sus demostraciones, acuerden con su docente la fecha de entrega y usen la lista de cotejo en la carpeta de evidencias para revisar el desarrollo de su investigación.



Nueva Escuela
Mexicana

Transformación de la sociedad

Acerca del triángulo de Pascal²



El Triángulo de Pascal es un concepto que se estudia en la secundaria cuando se desarrolla $(a+b)^n$ o algunas veces como una simple curiosidad. Se quiere mostrar parte de la riqueza matemática que ofrece este triángulo para partir una construcción, explorar diferentes sucesiones, hacer extensiones a los enteros módulo n y sus relaciones con el triángulo Sierpinski; también es útil un proceso de copia para construir la pirámide de Pascal para el desarrollo de $(a+b+c)^n$ y algunas relaciones matriciales.

El Triángulo de Pascal debe su nombre al matemático Blaise Pascal, siglo XVII, sin embargo, varios matemáticos antes de Pascal ya lo conocían y aplicaban este conocimiento. Por ejemplo, en China y Persia lo descubrieron de forma independiente alrededor del siglo XI. Chia Hsien (ca. 1050), un matemático chino, demostró que el triángulo se podía usar para extraer raíces cuadradas y cúbicas de números; varios algebristas chinos usaban el triángulo para resolver ecuaciones de orden superior a tres. El Triángulo de Pascal fue escrito de la forma como lo conocemos por el matemático chino Zhu Shijie.

Una forma de construir el Triángulo de Pascal consiste en usar técnicas de conteo. Observemos el siguiente desarrollo.

$$\begin{aligned}
 (a+b)^3 &= (a+b)(a+b)(a+b) \\
 &= (aa+ab+ba+bb)(a+b) \\
 &= aaa+aab+aba+abb+baa+bab+bba+bbb \\
 &= aaa+(aab+aba+baa)+(abb+bab+bba)+bbb \\
 &= 1 \cdot a^3 + 3 \cdot a^2b + 3 \cdot ab^2 + 1 \cdot b^3 \\
 &= \binom{3}{3}a^3 + \binom{3}{2}a^2b + \binom{3}{1}ab^2 + \binom{3}{0}b^3
 \end{aligned}$$

A partir de esto se tiene que la última expresión está dada por la siguiente regla de conteo: en cada desarrollo se cuentan las "a" que se encuentran en cada factor, es decir:

Para el primer factor se tiene que su expresión es $aaa = 1 \cdot a^3$, en ésta se encuentran tres (3) letras a , luego se expresa como $\binom{3}{3}$.

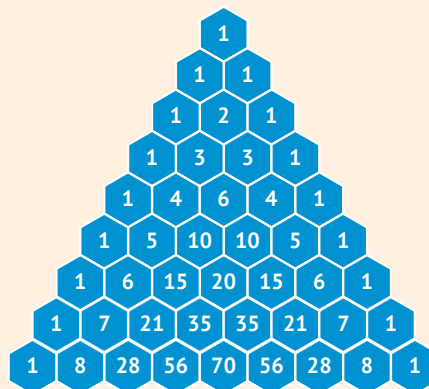
En el segundo factor se tiene $aab + aba + baa = 3 \cdot a^2b$ y en cada uno de los tres (3) sumandos hay dos (2) a , luego se expresa como $\binom{3}{2}$.

En el tercer factor se tiene $abb + bab + bba = 3 \cdot ab^2$ y en cada sumando hay un (1) a , luego se expresa como $\binom{3}{1}$.

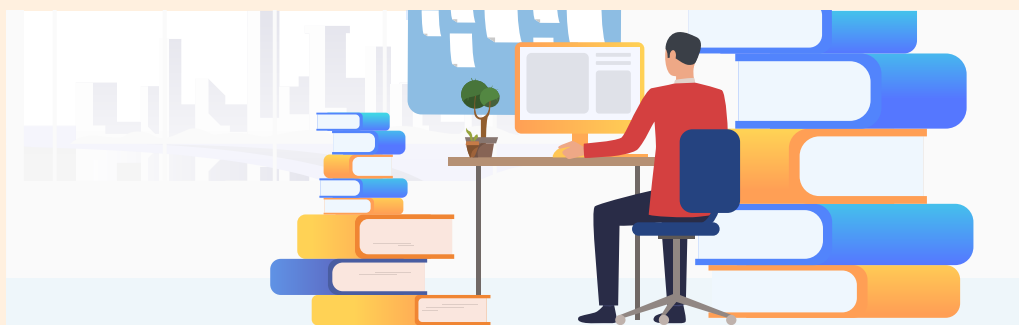
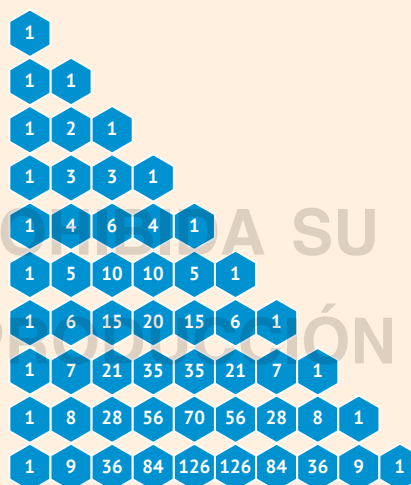
En el último factor bbb tenemos que no hay ninguna "a", luego se expresa como $\binom{3}{0}$.

² Recuperado el 20 de mayo de 2020 de: [http://funes.uniandes.edu.co/3820/1/NU%C3%B1ez_AcercaGeometria2011.pdf]. Texto adaptado con fines didácticos.

De forma general, si se continuara con esta construcción se tendría la representación del Triángulo de Pascal en un triángulo isósceles.



También se puede conocer en forma de un triángulo rectángulo.



Para reflexionar

Después de haber realizado la lectura responde.

¿Qué relación existe entre el Triángulo de Pascal y los coeficientes de un binomio elevado a una potencia?

¿Qué otras relaciones entre los números del triángulo puedes encontrar? Investiga la relación del Triángulo de Pascal y el Triángulo de Sierpinski, es algo sorprendente.

Visita el siguiente enlace y descubre más acerca de este tema.
<https://es.mathigon.org/course/sequences/pascals-triangle>

A diagram of Pascal's Triangle illustrating the addition of two rows to find the next row. The triangle is shown with rows of numbers. The first row is 1. The second row is 1, 1. The third row is 1, 2, 1. The fourth row is 1, 3, 3, 1. The fifth row is 1, 4, 6, 4, 1. The sixth row is 1, 5, 10, 10, 5, 1. The numbers in the sixth row are highlighted in blue, and the numbers in the fifth row are highlighted in orange. The numbers in the fourth row are highlighted in green. The numbers in the third row are highlighted in red. The numbers in the second row are highlighted in yellow. The numbers in the first row are highlighted in light blue.

manera diagonal.

REPRODUCCIÓN

$$(a + b)^0 = 1$$

$$(a + b)^1 = 1 \cdot a + 1 \cdot b$$

$$(a + b)^2 = 1 \cdot a^2 + 2ab + 1 \cdot b^2$$

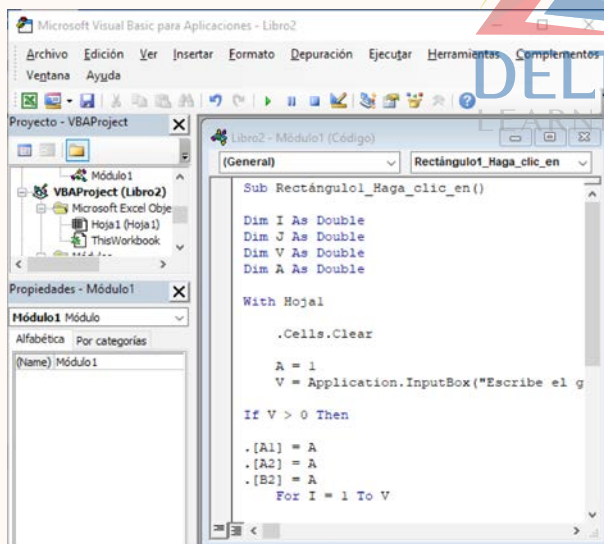
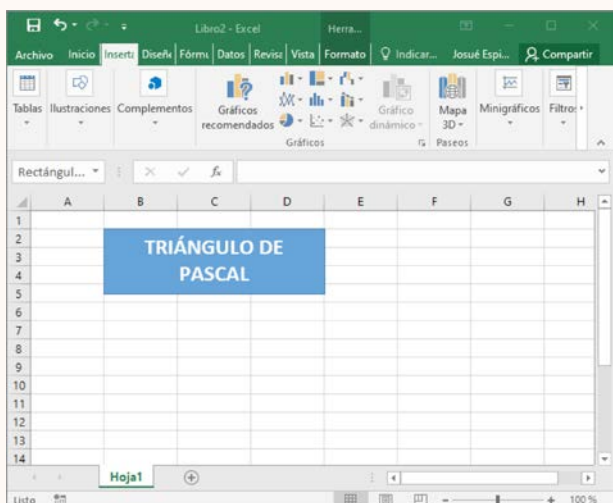
$$(a + b)^3 = 1 \cdot a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1 \cdot b^3$$

$$(a + b)^4 = 1 \cdot a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1 \cdot b^4$$

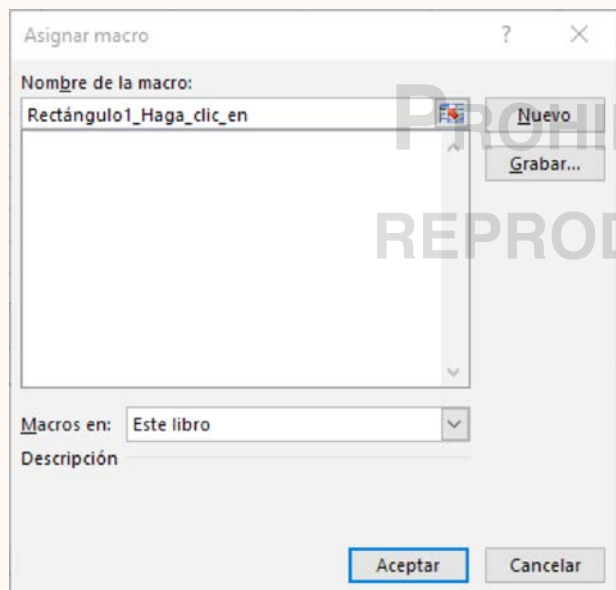
Observa también cómo el grado del primer término comienza con el grado del binomio y termina con grado cero, de manera simultánea el grado del segundo término comienza en grado cero y termina con el grado del binomio.

Con base en esto utilizaremos el programa Microsoft Excel para generar un código en VBA para generar este triángulo.

Abre un nuevo documento e inserta una forma con el título que tu desees.



Da clic derecho y selecciona Asignar macro y luego da clic en Nuevo.



Te aparecerá una ventana de programación donde escribirás el siguiente código.

```
Sub Rectángulo1_Haga clic en()  
Dim I As Double  
Dim J As Double  
Dim V As Double  
Dim A As Double  
With Hoja1  
    .Cells.Clear  
    A = 1  
    V = Application.InputBox("Escribe el grado de tu polinomio",  
    "TRIANGULO DE PASCAL")  
    If V > 0 Then  
        .[A1] = A  
        .[A2] = A  
        .[B2] = A  
        For I = 1 To V  
            For J = 1 To V + 1  
                .Cells(1 + I, 1) = A  
                .Cells(1 + I, 1 + J) =  
                .Cells(I, 1 + J) + .Cells(I, J)  
                If .Cells(1 + I, 1 + J)  
                = 0 Then .Cells(1 + I, 1 + J) = ""  
            Next  
        Next  
    End If  
End With  
End Sub
```

Guarda el código y da clic al rectángulo, te aparecerá la siguiente imagen.

TRIANGULO DE PASCAL

?

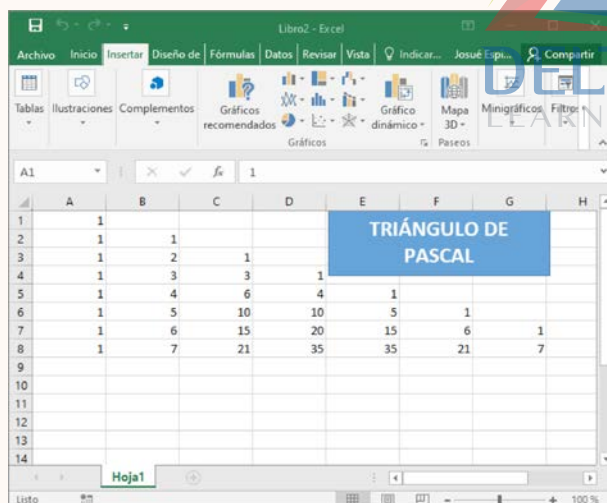
✕

Escribe el grado de tu polinomio

Aceptar

Cancelar

Para este caso escribiremos el grado 7, observa que te entregue todos los coeficientes que necesitas.



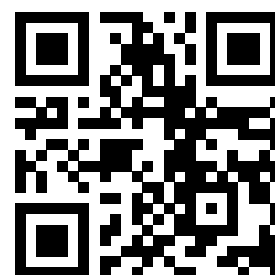
Revisa el código y que tu desafío sea crear un pequeño programa en Excel que te permita hacer un binomio elevado a cualquier potencia. Inténtalo.



Actividad Socioemocional

PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN

En esta lección podrás expresar con sus palabras qué es la atención y cuáles son los beneficios de entrenarla. Visita la página <https://qrگو.page.link/rfNW8> y descarga la ficha de la lección 4.6. La mente chango.





1. ¿Cuál es el grado del siguiente polinomio:
 $1 - x + x^3 - 5x^2$?

- a) 2
- b) 1
- c) 3
- d) 5

2. Resolver la siguiente operación con signos de agrupación: $\{-5 - [8 + (13 - 2)] + 20\}$

- a) -4
- b) 3
- c) -7
- d) 12

3. Resolver la multiplicación de polinomios:
 $(x+5)(x-7)$.

- a) $x^2 - 2x - 35$
- b) $x^2 + 2x - 35$
- c) $x^2 + 12x + 35$
- d) $x^2 - 12x + 35$

4. Realizar la siguiente división de fracciones algebraicas:

$$\frac{y^3 - y}{2y^2 + 6y} \div \frac{5y^2 - 5y}{2y + 6} =$$

- a) $\frac{2y+3}{y+1}$
- b) $\frac{y-3}{y+2}$
- c) $\frac{y+1}{5y}$
- d) $\frac{y^2+1}{2y+6}$

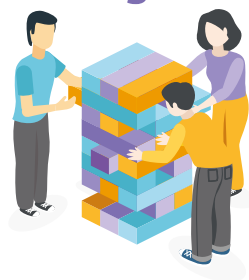
5. Calcular el valor numérico de
 $4m^2n + 3$ si $m = -2$ y $n = -1$

- a) 13
- b) -13
- c) -19
- d) 19

PROHIBIDA SU
REPRODUCCIÓN



Proyecto Intégrate



Autoevaluación y heteroevaluación

Evalúa tu desempeño, elige la calificación que representa el nivel que alcanzaste, escríbela en la casilla correspondiente, divide el total entre 5 y anota el resultado.

Criterio	Descripción	Nivel I (0-5)	Nivel II (6-8)	Nivel III (9-10)
Trabajo colaborativo	Propicia la participación, inclusión y respeto de todos los integrantes del equipo, modera las participaciones y propicia la toma de decisiones consensuadas.			
Uso de TIC'S	Indaga utilizando las TIC's para presentar un trabajo eficiente, presenta un dominio en el uso de Microsoft Excel y el editor de ecuaciones de Microsoft.			
Base de datos	La base de datos cuenta con la simbología matemática y sus traducciones a lenguaje común y están escritas en su forma lineal y profesional con base en el editor de ecuaciones.			
Uso de fórmulas	Las fórmulas en Excel permiten hacer la traducción de un banco de expresiones algebraicas con al menos 10 expresiones por cada integrante del equipo.			
Presentación	Se presenta la hoja de cálculo con un formato funcional y atractivo visualmente.			
Total				
Calificación				

Lista de cotejo para evaluación de las actividades de aprendizaje

Coevaluación

En parejas de trabajo revisen mutuamente la siguiente lista de cotejo para cada uno de los ejercicios resueltos en el parcial.

Criterios de evaluación	Cumple	No cumple
Se extrae la información de cada ejercicio para su solución.		
Elabora las gráficas, en caso de que lo requiera, para la solución del problema.		
Utiliza apropiadamente las leyes y reglas algebraicas.		
Realiza las operaciones correspondientes desarrolladas paso a paso.		
Obtiene resultados correctos.		
Desarrolla todos los procedimientos con orden y limpieza.		

Evaluación de las actividades socioemocionales

Autoevaluación

¿Qué funcionó bien y qué efectos positivos se observaron al realizar las actividades?

Escribe las dificultades o áreas de oportunidad que analizaste en las lecciones Construye T

¿Qué lecciones contribuyeron a identificar situaciones que favorecen el desarrollo de la confianza, el respeto y por tanto la seguridad psicológica?

¿Por qué me involucré o no, en las actividades guiadas por el docente?

¿Tuve confianza en el grupo durante el desarrollo de las lecciones?



Portafolio de Evidencias

Es momento de hacer un recuento de los trabajos realizados durante el primer parcial de álgebra, completa la siguiente lista de verificación y marca con X en la casilla que corresponda.

Aprendizaje o Producto Esperado		Sí	No
1.	Actividad de aprendizaje 1.		
2.	Actividad de aprendizaje 2.		
3.	Actividad transversal.		
4.	Actividad de realidad aumentada.		
5.	Actividad de aprendizaje 3.		
6.	Actividad socioemocional.		
7.	Desarrollo formativo del estudiante.		
8.	Proyecto Intégrate.		