

Precálculo



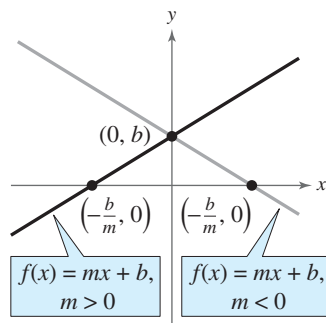
Larson

Octava edición

GRÁFICAS DE FUNCIONES GENERATRICES

Función lineal

$$f(x) = mx + b$$



Dominio: $(-\infty, \infty)$

Rango: $(-\infty, \infty)$

Intercepción x: $(-b/m, 0)$

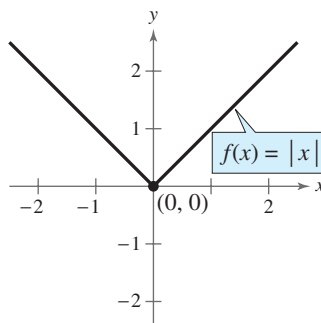
Intercepción y: $(0, b)$

Creciente cuando $m > 0$

Decreciente cuando $m < 0$

Función de valor absoluto

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$



Dominio: $(-\infty, \infty)$

Rango: $[0, \infty)$

Intercepción: $(0, 0)$

Decreciente en $(-\infty, 0)$

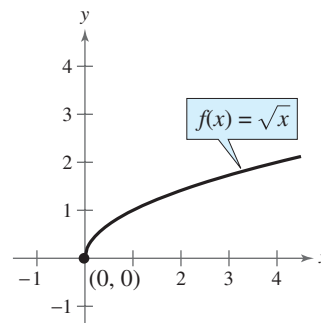
Creciente en $(0, \infty)$

Función par

Simetría con eje y

Función raíz cuadrada

$$f(x) = \sqrt{x}$$



Dominio: $[0, \infty)$

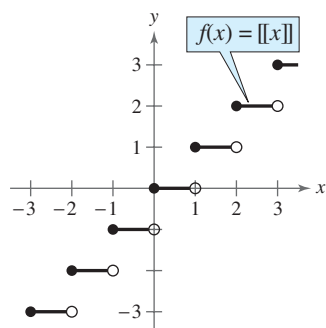
Rango: $[0, \infty)$

Intercepción: $(0, 0)$

Creciente en $(0, \infty)$

Función de máximo entero

$$f(x) = \llbracket x \rrbracket$$



Dominio: $(-\infty, \infty)$

Rango: el conjunto de los enteros

Intercepciones x: en el intervalo $[0, 1)$

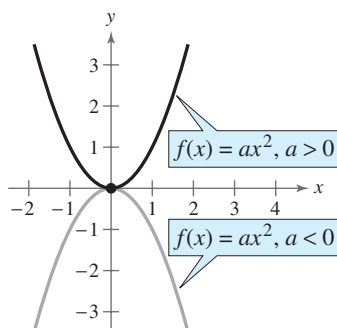
Intercepción y: $(0, 0)$

Constante entre cada par de enteros consecutivos

Salta verticalmente una unidad en cada valor entero

Función cuadrática (elevar al cuadrado)

$$f(x) = ax^2$$



Dominio: $(-\infty, \infty)$

Rango ($a > 0$): $[0, \infty)$

Rango ($a < 0$): $(-\infty, 0]$

Intercepción: $(0, 0)$

Decreciente en $(-\infty, 0)$ para $a > 0$

Creciente en $(0, \infty)$ para $a > 0$

Creciente en $(-\infty, 0)$ para $a < 0$

Decreciente en $(0, \infty)$ para $a < 0$

Función par

Simetría con eje y

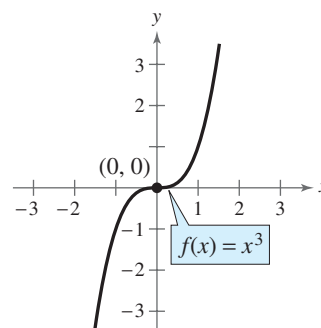
Mínimo relativo ($a > 0$),

máximo relativo ($a < 0$),

o vértice: $(0, 0)$

Función cúbica

$$f(x) = x^3$$



Dominio: $(-\infty, \infty)$

Rango: $(-\infty, \infty)$

Intercepción: $(0, 0)$

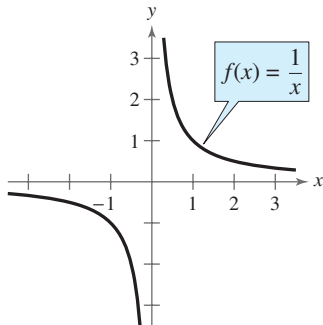
Creciente en $(-\infty, \infty)$

Función impar

Simetría en el origen

Función racional (recíproca)

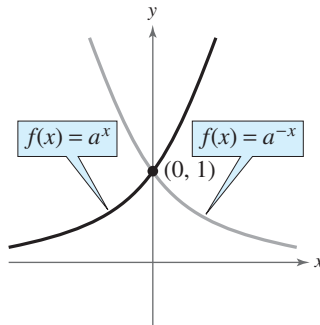
$$f(x) = \frac{1}{x}$$



Dominio: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
Rango: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
No hay intercepciones
Decreciente en $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$
Función impar
Simetría en el origen
Asíntota vertical: eje y
Asíntota horizontal: eje x

Función exponencial

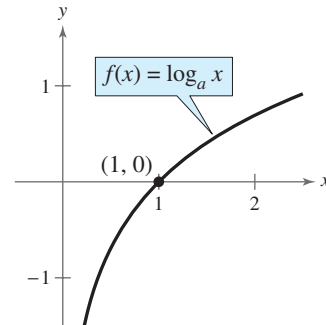
$$f(x) = a^x, a > 0, a \neq 1$$



Dominio: $(-\infty, \infty)$
Rango: $(0, \infty)$
Intercepción: $(0, 1)$
Creciente en $(-\infty, \infty)$
para $f(x) = a^x$
Decreciente en $(-\infty, \infty)$
para $f(x) = a^{-x}$
Asíntota horizontal: eje x
Continua

Función logarítmica

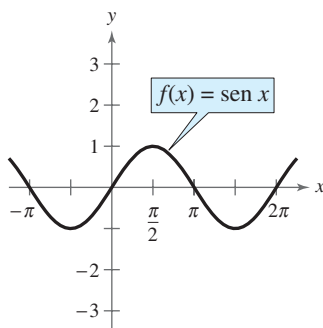
$$f(x) = \log_a x, a > 0, a \neq 1$$



Dominio: $(0, \infty)$
Rango: $(-\infty, \infty)$
Intercepción: $(1, 0)$
Creciente en $(0, \infty)$
Asíntota vertical: eje y
Continua
Reflexión de gráfica de $f(x) = a^x$
en la recta $y = x$

Función seno

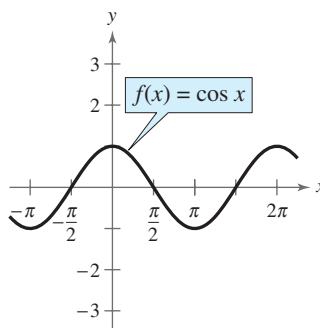
$$f(x) = \sin x$$



Dominio: $(-\infty, \infty)$
Rango: $[-1, 1]$
Periodo: 2π
Intercepciones x : $(n\pi, 0)$
Intercepciones y : $(0, 0)$
Función impar
Simetría en el origen

Función coseno

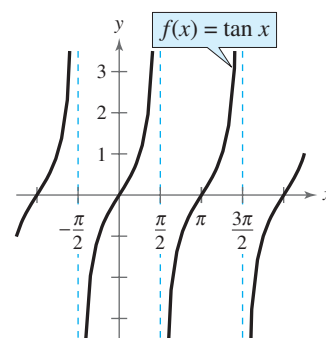
$$f(x) = \cos x$$



Dominio: $(-\infty, \infty)$
Rango: $[-1, 1]$
Periodo: 2π
Intercepciones x : $\left(\frac{\pi}{2} + n\pi, 0\right)$
Intercepciones y : $(0, 1)$
Función par
Simetría con eje y

Función tangente

$$f(x) = \tan x$$

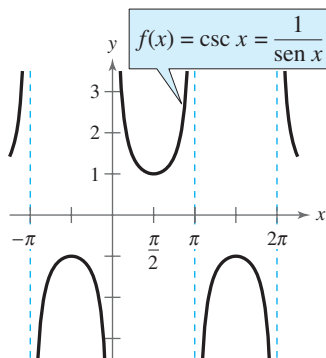


Dominio: toda $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$
Rango: $(-\infty, \infty)$
Periodo: π
Intercepciones x : $(n\pi, 0)$
Intercepciones y : $(0, 0)$
Asíntotas verticales:
$$x = \frac{\pi}{2} + n\pi$$

Función impar
Simetría en el origen

Función cosecante

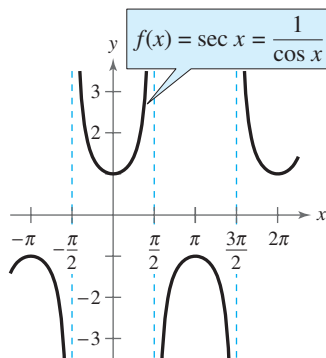
$$f(x) = \csc x$$



Dominio: toda $x \neq n\pi$
Rango: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
Periodo: 2π
No hay intercepciones
Asíntotas verticales: $x = n\pi$
Función impar
Simetría en el origen

Función secante

$$f(x) = \sec x$$

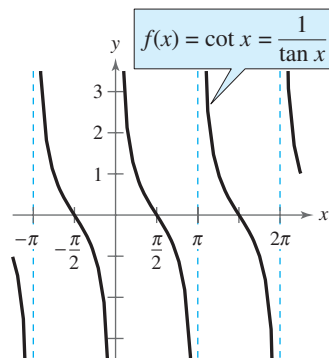


Dominio: toda $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$
Rango: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
Periodo: 2π
Intercepción y: $(0, 1)$
Asíntotas verticales:
$$x = \frac{\pi}{2} + n\pi$$

Función par
Simetría con eje y

Función cotangente

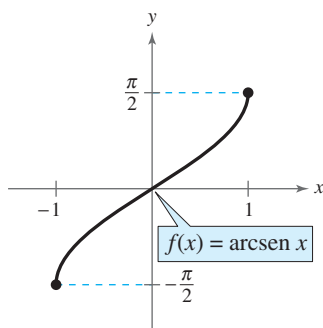
$$f(x) = \cot x$$



Dominio: toda $x \neq n\pi$
Rango: $(-\infty, \infty)$
Periodo: π
Intercepciones x: $\left(\frac{\pi}{2} + n\pi, 0\right)$
Asíntotas verticales: $x = n\pi$
Función impar
Simetría en el origen

Función seno inversa

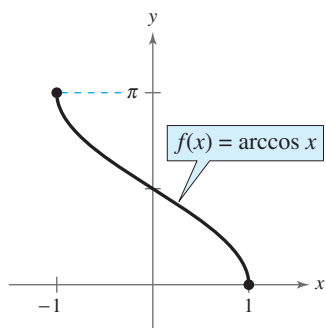
$$f(x) = \arcsen x$$



Dominio: $[-1, 1]$
Rango: $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
Intercepción: $(0, 0)$
Función impar
Simetría en el origen

Función coseno inversa

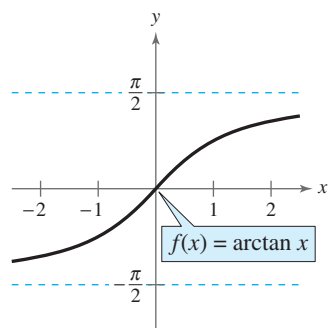
$$f(x) = \arccos x$$



Dominio: $[-1, 1]$
Rango: $[0, \pi]$
Intercepción y: $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Función tangente inversa

$$f(x) = \arctan x$$



Dominio: $(-\infty, \infty)$
Rango: $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
Intercepción: $(0, 0)$
Asíntotas horizontales:
$$y = \pm \frac{\pi}{2}$$

Función impar
Simetría en el origen

Precálculo

Octava edición

Ron Larson

The Pennsylvania State University
The Behrend College

Con la asistencia de

David C. Falvo

The Pennsylvania State University
The Behrend College

Traducción

Jorge Humberto Romo Muñoz
Traductor profesional

Revisión técnica

Dr. Ernesto Filio López
Unidad Profesional en Ingeniería y Tecnologías Avanzadas
Instituto Politécnico Nacional

M. en C. Manuel Robles Bernal
Escuela Superior de Física y Matemáticas
Instituto Politécnico Nacional



Precálculo, Octava edición

Ron Larson/David C. Falvo

**Presidente de Cengage Learning
Latinoamérica**

Fernando Valenzuela Migoya

**Director de producto y desarrollo
Latinoamérica**

Daniel Oti Yvonnet

**Director editorial y de producción
Latinoamérica**

Raúl D. Zendejas Espejel

Editor

Sergio R. Cervantes González

**Coordinadora de producción
editorial**

Abril Vega Orozco

Editora de producción

Gloria Luz Olguín Sarmiento

Coordinador de manufactura

Rafael Pérez González

Diseño de portada

Harold Burch

Imagen de portadaRichard Edelman/Woodstock
Graphics Studio**Composición tipográfica**

Imagen Editorial

© D.R. 2012 por Cengage Learning Editores, S.A. de C.V.,
una Compañía de Cengage Learning, Inc.

Corporativo Santa Fe

Av. Santa Fe núm. 505, piso 12

Col. Cruz Manca, Santa Fe

C.P. 05349, México, D.F.

Cengage Learning™ es una marca registrada usada
bajo permiso.

DERECHOS RESERVADOS. Ninguna parte de este
trabajo amparado por la Ley Federal del Derecho
de Autor, podrá ser reproducida, transmitida,
almacenada o utilizada en cualquier forma o
por cualquier medio, ya sea gráfico, electrónico
o mecánico, incluyendo, pero sin limitarse a lo
siguiente: fotocopiado, reproducción, escaneo,
digitalización, grabación en audio, distribución
en Internet, distribución en redes de información
o almacenamiento y recopilación en sistemas
de información, a excepción de lo permitido en
el Capítulo III, Artículo 27, de la Ley Federal
del Derecho de Autor, sin el consentimiento por
escrito de la Editorial.

Traducido del libro:

Precalculus, Eighth edition

Ron Larson/David C. Falvo

Publicado en inglés por

Brooks/Cole/Cengage Learning © 2011

ISBN 13: 978-1-4390-4577-0

Datos para catalogación bibliográfica:

Larson, Ron/David C. Falvo

Precálculo, Octava edición

ISBN 13: 978-607-481-761-4

ISBN 10: 607-481-761-8

Visite nuestro sitio en:

<http://latinoamerica.cengage.com>

Contenido

Unas palabras del autor (Prefacio) vii

Capítulo 1

Funciones y sus gráficas 1

- 1.1 Coordenadas rectangulares 2
- 1.2 Gráficas de ecuaciones 13
- 1.3 Ecuaciones lineales con dos variables 24
- 1.4 Funciones 39
- 1.5 Análisis de gráficas de funciones 54
- 1.6 Biblioteca de funciones principales 66
- 1.7 Transformaciones de funciones 73
- 1.8 Combinaciones de funciones: funciones compuestas 83
- 1.9 Funciones inversas 92
- 1.10 Modelado y variación matemáticos 102
- Resumen del capítulo 114
- Examen del capítulo 121
- Resolución de problemas 123
- Ejercicios de repaso 116
- Demostraciones en matemáticas 122

Capítulo 2

Funciones racionales y polinomiales 125

- 2.1 Funciones y modelos cuadráticos 126
- 2.2 Funciones polinomiales de grado superior 136
- 2.3 División de polinomios y sintética 150
- 2.4 Números complejos 159
- 2.5 Ceros de funciones polinomiales 166
- 2.6 Funciones racionales 181
- 2.7 Desigualdades no lineales 194
- Resumen del capítulo 204
- Examen del capítulo 210
- Resolución de problemas 213
- Ejercicios de repaso 206
- Demostraciones en matemáticas 211

Capítulo 3

Funciones exponenciales y logarítmicas 215

- 3.1 Funciones exponenciales y sus gráficas 216
- 3.2 Funciones logarítmicas y sus gráficas 227
- 3.3 Propiedades de los logaritmos 237
- 3.4 Ecuaciones exponenciales y logarítmicas 244

3.5	Modelos exponenciales y logarítmicos	255
Resumen del capítulo	268	Ejercicios de repaso 270
Examen del capítulo	273	
Examen acumulativo para los capítulos 1 a 3	274	
Demostraciones en matemáticas	276	
Resolución de problemas	277	

Capítulo 4

Trigonometría 279

4.1	Medidas en radianes y grados	280
4.2	Funciones trigonométricas: la circunferencia unitaria	292
4.3	Trigonometría del triángulo rectángulo	299
4.4	Funciones trigonométricas de cualquier ángulo	310
4.5	Gráficas de las funciones seno y coseno	319
4.6	Gráficas de otras funciones trigonométricas	330
4.7	Funciones trigonométricas inversas	341
4.8	Aplicaciones y modelos	351
Resumen del capítulo	362	Ejercicios de repaso 364
Examen del capítulo	367	Demostraciones en matemáticas 368
Resolución de problemas	369	

Capítulo 5

Trigonometría analítica 371

5.1	Uso de identidades fundamentales	372
5.2	Comprobación de identidades trigonométricas	380
5.3	Solución de ecuaciones trigonométricas	387
5.4	Fórmulas de suma y diferencia	398
5.5	Fórmulas de ángulos múltiples y de producto a suma	405
Resumen del capítulo	416	Ejercicios de repaso 418
Examen del capítulo	421	Demostraciones en matemáticas 422
Resolución de problemas	425	

Capítulo 6

Temas adicionales de trigonometría 427

6.1	Ley de los senos	428
6.2	Ley de los cosenos	437
6.3	Vectores en el plano	445
6.4	Vectores y producto punto	458
6.5	Forma trigonométrica de un número complejo	468
Resumen del capítulo	478	Ejercicios de repaso 480
Examen del capítulo	484	
Examen acumulativo para los capítulos 4 a 6	485	
Demostraciones en matemáticas	487	
Resolución de problemas	491	

Capítulo 7

Sistemas de ecuaciones y desigualdades 493

- 7.1 Sistemas de ecuaciones lineales y no lineales 494
- 7.2 Sistemas lineales de dos variables 505
- 7.3 Sistemas lineales de varias variables 517
- 7.4 Fracciones parciales 530
- 7.5 Sistemas de desigualdades 538
- 7.6 Programación lineal 549
- Resumen del capítulo 558
- Examen del capítulo 565
- Resolución de problemas 567
- Ejercicios de repaso 560
- Demostraciones en matemáticas 566

Capítulo 8

Matrices y determinantes 569

- 8.1 Matrices y sistemas de ecuaciones 570
- 8.2 Operaciones con matrices 584
- 8.3 Inversa de una matriz cuadrada 599
- 8.4 Determinante de una matriz cuadrada 608
- 8.5 Aplicaciones de matrices y determinantes 616
- Resumen del capítulo 628
- Examen del capítulo 635
- Resolución de problemas 637
- Ejercicios de repaso 630
- Demostraciones en matemáticas 636

Capítulo 9

Sucesiones, series y probabilidad 639

- 9.1 Sucesiones y series 640
- 9.2 Sucesiones aritméticas y sumas parciales 651
- 9.3 Sucesiones geométricas y series 661
- 9.4 Inducción matemática 671
- 9.5 El teorema del binomio 681
- 9.6 Principios de conteo 689
- 9.7 Probabilidad 699
- Resumen del capítulo 712
- Examen del capítulo 717
- Examen acumulativo para los capítulos 7 a 9 718
- Demostraciones en matemáticas 720
- Resolución de problemas 723
- Ejercicios de repaso 714

Capítulo 10

Temas de geometría analítica 725

- 10.1 Rectas 726
- 10.2 Introducción a las cónicas: parábolas 733
- 10.3 Elipses 742
- 10.4 Hipérbolas 751
- 10.5 Rotación de cónicas 761
- 10.6 Ecuaciones paramétricas 769
- 10.7 Coordenadas polares 777
- 10.8 Gráficas de ecuaciones polares 783
- 10.9 Ecuaciones polares de cónicas 791
- Resumen del capítulo 798
- Examen del capítulo 803
- Resolución de problemas 807
- Ejercicios de repaso 800
- Demostraciones en matemáticas 804

Apéndice A Repaso de conceptos fundamentales de álgebra A1

- A.1 Números reales y sus propiedades A1
- A.2 Exponentes y radicales A14
- A.3 Polinomios y factorización A27
- A.4 Expresiones racionales A39
- A.5 Resolución de ecuaciones A49
- A.6 Desigualdades lineales con una variable A63
- A.7 Errores y el álgebra del cálculo A73

Respuestas a ejercicios impares y exámenes A81

Índice A199

Índice de aplicaciones (web)

Apéndice B Conceptos de estadística (web)

- B.1 Representación de datos
- B.2 Medidas de tendencia central y dispersión centrales
- B.3 Regresión de mínimos cuadrados

Unas palabras del autor

Bienvenidos a la octava edición de *Precálculo*. Estamos orgullosos de ofrecerles una versión nueva y corregida de nuestro libro. En cada edición, les hemos escuchado a ustedes, nuestros usuarios, y hemos incorporado muchas de las sugerencias que recibimos para mejorar la edición.

En esta octava edición continuamos ofreciendo a maestros y estudiantes un texto sólido desde el punto de vista pedagógico, matemáticamente preciso y fácil de leer. Hay numerosos cambios en las matemáticas, figuras y diseño; veamos a continuación los más significativos.

- **Nuevos inicios de capítulo** Cada *Principio de capítulo* tiene tres partes. En *Matemáticas* describe un tema matemático importante que se imparte en el capítulo. En *la vida real* indica a los estudiantes dónde hallar este tema en situaciones reales. En *carreras* relaciona ejercicios de aplicación con varias profesiones.
- **Nuevas sugerencias de estudio y advertencia/atención** En dos secciones nuevas damos información útil a los estudiantes. Los *Tips de estudio* les dan información útil o sugerencias para aprender el tema. Las *Advertencia/Atención* señalan errores matemáticos comunes en que incurren los estudiantes.
- **Nuevas Ayudas de Álgebra** dirigen a los estudiantes a secciones del texto donde pueden repasar conceptos de álgebra necesarios para dominar el tema expuesto.
- **Nuevos ejemplos uno al lado del otro** En todo el texto presentamos soluciones a numerosos ejemplos desde múltiples perspectivas, ya sea algebraica, gráfica o numéricamente. El formato lado a lado de esta característica pedagógica ayuda a los estudiantes a ver que un problema puede ser resuelto en más de una forma y que diferentes métodos dan el mismo resultado. El formato lado a lado también permite el estudio mediante diferentes estilos de aprender.
- **Nuevas secciones de Toque final** Son problemas conceptuales que sintetizan temas clave y dan a los estudiantes una mejor comprensión de los conceptos expuestos en cada sección. Estos ejercicios son excelentes para estudiar en clase o como preparación para exámenes; los profesores pueden considerarlos valiosos para integrarlos en sus repases de la sección.
- **Nuevos Resúmenes del capítulo** El *Resumen del capítulo* ahora incluye una explicación o un ejemplo de cada tema impartido en el capítulo.
- **Conjuntos de ejercicios revisados** Los conjuntos de ejercicios han sido examinados cuidadosa y extensamente para asegurar que sean rigurosos y comprendan todos los temas sugeridos por nuestros usuarios. Se han agregado innumerables ejercicios, algunos de alto grado de dificultad, para aumentar el conocimiento.

Durante los últimos años hemos mantenido un sitio web independiente, **CalcChat.com**, que contiene resoluciones gratuitas a los ejercicios impares en el texto. Miles de estudiantes que utilizan nuestros libros han visitado el sitio para practicar y ayudarse en sus tareas. Para la octava edición, nos fue posible usar información del

CalcChat.com, incluyendo a cuáles soluciones los estudiantes acceden con más frecuencia, para ayudar a guiar la revisión de los ejercicios.

Espero que usted, lector, disfrute de la octava edición de *Precálculo*. Como siempre, daré la bienvenida a sus comentarios y sugerencias para hacer mejoras continuas.

A handwritten signature in black ink that reads "Ron Larson". The signature is written in a cursive, flowing style.

Ron Larson

Reconocimientos

Me gustaría agradecer a muchas personas que me han ayudado a preparar el texto y el paquete de suplementos. Sus estímulos, críticas y sugerencias me han sido de gran valor.

Agradezco a todos los profesores que se tomaron tiempo para revisar los cambios en esta edición y para dar sugerencias para mejorarla. Sin su ayuda, este libro no hubiera sido posible.

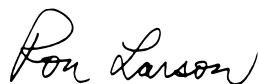
Revisores

Chad Pierson, *University of Minnesota-Duluth*; Sally Shao, *Cleveland State University*; Ed Stumpf, *Central Carolina Community College*; Fuzhen Zhang, *Nova Southeastern University*; Dennis Shepherd, *University of Colorado, Denver*; Rhonda Kilgo, *Jacksonville State University*; C. Altay Özgener, *Manatee Community College Bradenton*; William Forrest, *Baton Rouge Community College*; Tracy Cook, *University of Tennessee Knoxville*; Charles Hale, *California State Poly University Pomona*; Samuel Evers, *University of Alabama*; Seongchun Kwon, *University of Toledo*; Dr. Arun K. Agarwal, *Grambling State University*; Hyounkyun Oh, *Savannah State University*; Michael J. McConnell, *Clarion University*; Martha Chalhoub, *Collin County Community College*; Angela Lee Everett, *Chattanooga State Tech Community College*; Heather Van Dyke, *Walla Walla Community College*; Gregory Buthusiem, *Burlington County Community College*; Ward Shaffer, *College of Coastal Georgia*; Carmen Thomas, *Chatham University*; Emily J. Keaton.

Doy muchas gracias a David Falvo, The Behrend College, The Pennsylvania State University, por sus aportaciones a este proyecto. Muchas gracias también a Robert Hostetler, The Behrend College, The Pennsylvania State University, y a Bruce Edwards, University of Florida, por sus importantes contribuciones a ediciones previas de este texto.

También me gustaría dar las gracias a Larson Texts, Inc. que contribuyó con la lectura de pruebas del manuscrito, la elaboración y revisión del paquete de figuras, así como la revisión y tipografía de los suplementos.

En el nivel personal, estoy muy agradecido a mi esposa, Deanna Gilbert Larson, por su amor, paciencia y apoyo. También, gracias especiales a R. Scott O'Neil. Si usted tiene alguna sugerencia para mejorar este texto, por favor siéntase en libertad de escribirme. En las dos décadas pasadas he recibido innumerables comentarios útiles tanto de maestros como de estudiantes, a los que tengo en gran estima.



Ron Larson

Suplementos

Suplementos para el profesor (en inglés)

Annotated Instructor's Edition (AIE) (edición del profesor) Esta AIE es el texto completo para el estudiante más anotaciones puntuales para el profesor, incluidos proyectos adicionales, actividades en clase, estrategias de enseñanza y ejemplos adicionales. También incluye respuestas a ejercicios de número impar del texto, revisiones de vocabulario y exploraciones.

Complete Solutions Manual (manual con soluciones completas) Este manual contiene soluciones a todos los ejercicios del texto, incluidos los ejercicios de repaso del capítulo y exámenes de capítulo.

Instructor's Companion Website (sitio web adjunto del profesor) Este sitio web adjunto, gratuito, contiene abundantes recursos para el profesor.

PowerLecture™ with ExamView® El CD-ROM provee al profesor con herramientas dinámicas de medios para enseñar álgebra universitaria. Están disponibles transparencias de presentaciones en PowerPoint®, así como transparencias de las figuras del texto, junto con archivos electrónicos para el banco de exámenes y un enlace al Solution Builder. El ExamView algorítmico permite crear, entregar y personalizar exámenes (tanto impresos como en línea) en minutos. Mejore la interacción de sus estudiantes con usted, su clase y entre ellos.

Solutions Builder (formador de soluciones) Ésta es una versión electrónica del manual de resoluciones completas vía el sitio web PowerLecture y el Instructor's Companion. Da a los profesores un método eficiente para crear conjuntos de soluciones a tareas o exámenes que pueden imprimirse o pegarse.

Online AIE para la guía para tomar notas Esta AIE incluye las respuestas a todos los problemas de la innovadora Note Taking Guide (guía para tomar notas).

Suplementos para el estudiante (en inglés)

Student Companion Website Este sitio web gratuito contiene abundancia de recursos para el estudiante.

Instructional DVDs Relacionados al texto por sección, estos DVD hacen una cobertura completa del curso, junto con explicaciones adicionales de conceptos, problemas de muestra y aplicaciones, para ayudar a que el estudiante repase temas esenciales.

Student Study and Solutions Manual Esta guía ofrece soluciones paso a paso para todos los ejercicios impares del texto, exámenes del capítulo y acumulativos, así como exámenes de práctica con resoluciones.

Premium eBook El *Premium eBook* ofrece una versión interactiva del libro con características de búsqueda, destacando herramientas para tomar notas y ligas directas a videos o material didáctico que amplía las exposiciones del texto.

Enhanced WebAssign El *Enhanced WebAssign* está diseñado para que el estudiante haga sus tareas en línea. Este demostrado y confiable sistema utiliza pedagogía y contenidos que se encuentran en el texto de Larson, y los mejora para ayudar al lector a aprender precálculo de manera más eficiente. Las tareas calificadas automáticamente ayudan al lector a centrarse en su aprendizaje y obtener ayuda interactiva de estudio fuera de clase.

Note Taking Guide Ésta es una innovadora ayuda de estudio, hecha en forma de organizador de apuntes, que ayuda a estudiantes a desarrollar un resumen de conceptos clave sección por sección.

Funciones y sus gráficas

1

- 1.1 **Coordenadas rectangulares**
- 1.2 **Gráficas de ecuaciones**
- 1.3 **Ecuaciones lineales con dos variables**
- 1.4 **Funciones**
- 1.5 **Análisis de gráficas de funciones**
- 1.6 **Biblioteca de funciones principales (o generatrices)**
- 1.7 **Transformaciones de funciones**
- 1.8 **Combinaciones de funciones: funciones compuestas**
- 1.9 **Funciones inversas**
- 1.10 **Modelado y variación matemáticos**

En matemáticas

Las funciones muestran la forma en que una variable está relacionada con otra variable.

En la vida real

Las funciones se usan para calcular valores, simular procesos y descubrir relaciones. Por ejemplo, se puede modelar la variación de inscripciones de niños en preescolar y calcular el año en que alcanzará cierto número. Ese cálculo se puede usar para planear medidas a fin de satisfacer necesidades futuras, como contratar más profesores y comprar más libros. (Vea Ejercicio 113, página 64.)



Jose Luis Pelaez/Getty Images

EN CARRERAS

Las funciones se usan en muchas carreras, entre ellas, en las siguientes:

- Analista financiero
Ejercicio 95, página 51
- Preparador de impuestos
Ejercicio 3, página 104
- Biólogo
Ejercicio 73, página 91
- Oceanógrafo
Ejercicio 83, página 112

1.1 COORDENADAS RECTANGULARES

Lo que debe aprender

- Localizar puntos en el plano cartesiano
- Usar la fórmula de la distancia para hallar la distancia entre dos puntos.
- Usar la fórmula del punto medio para hallar el punto medio de un segmento de recta.
- Usar un plano de coordenadas para modelar y resolver problemas reales.

Por qué debe aprenderlo

El plano cartesiano se puede usar para representar relaciones entre dos variables. Por ejemplo, en el Ejercicio 70 de la página 11, una gráfica representa el salario mínimo en Estados Unidos de 1950 a 2009.



© Ariel Skelly/Cortis

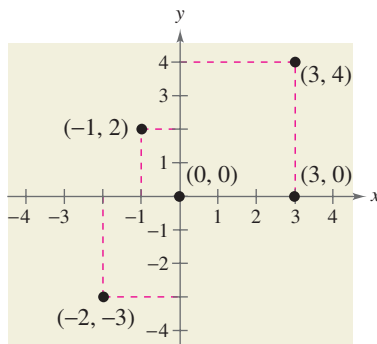


FIGURA 1.3

Plano cartesiano

En la misma forma en que se pueden representar números por medio de puntos en una recta numérica, se pueden representar pares ordenados de números reales por medio de puntos en un plano llamado **sistema de coordenadas rectangulares**, o **plano cartesiano**, designado así en honor al matemático francés René Descartes (1596-1650).

El plano cartesiano se forma mediante dos rectas numéricas que se intersectan en ángulos rectos, como se ve en la Figura 1.1. La recta horizontal suele recibir el nombre de **eje x** , y la vertical suele denominarse **eje y** . El punto de intersección de estos dos ejes es el **origen** y los dos ejes dividen el plano en cuatro partes llamadas **cuadrantes**.

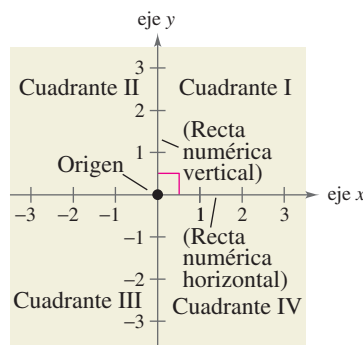


FIGURA 1.1

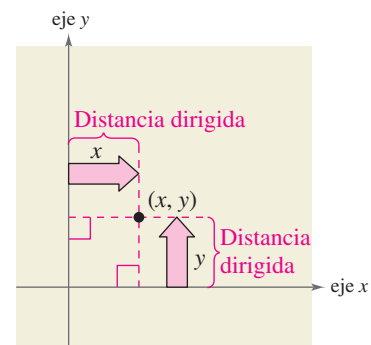
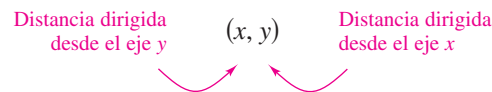


FIGURA 1.2

Cada punto del plano corresponde a un **par ordenado** (x, y) de números reales x y y , llamados **coordenadas** del punto. La **coordenada x** representa la distancia dirigida desde el eje y al punto, y la **coordenada y** representa la distancia dirigida desde el eje x al punto, como se ilustra en la Figura 1.2.



La notación (x, y) denota un punto en el plano y un intervalo abierto en la recta numérica real. El contexto nos dirá cuál es el significado que se busca.

Ejemplo 1 Localizar puntos en el plano cartesiano

Localice los puntos $(-1, 2)$, $(3, 4)$, $(0, 0)$, $(3, 0)$ y $(-2, -3)$.

Solución

Para localizar el punto $(-1, 2)$, imagine una recta vertical que pase por -1 sobre el eje x y una recta horizontal que pase por 2 en el eje y . La intersección de estas dos rectas es el punto $(-1, 2)$. Los otros cuatro puntos se pueden localizar en la misma forma, como se ve en la Figura 1.3.

PUNTO de repaso Ahora trate de hacer el Ejercicio 7.

La belleza de un sistema de coordenadas rectangulares es que permite *ver* relaciones entre dos variables. Sería difícil exagerar la importancia de que Descartes haya introducido coordenadas en el plano. Hoy en día, sus ideas están en uso común en prácticamente todos los campos científicos y los relacionados con negocios.

Ejemplo 2 Trazar una gráfica de dispersión



Año, t	Suscriptores, N
1994	24.1
1995	33.8
1996	44.0
1997	55.3
1998	69.2
1999	86.0
2000	109.5
2001	128.4
2002	140.8
2003	158.7
2004	182.1
2005	207.9
2006	233.0
2007	255.4

De 1994 a 2007, el número N (en millones) de suscriptores a un servicio de telefonía celular en Estados Unidos se ve en la tabla, donde t representa el año. Trace una gráfica de dispersión de los datos. (Fuente: CTIA-The Wireless Association)

Solución

Para trazar una *gráfica de dispersión* de los datos mostrados en la tabla, simplemente representamos cada par de valores por medio de un par ordenado (t, N) y localizamos los puntos resultantes, como se ve en la Figura 1.4. Por ejemplo, el primer par de valores está representado por el par ordenado $(1994, 24.1)$. Observe que el pico en el eje t indica que los números entre 0 y 1994 han sido omitidos.

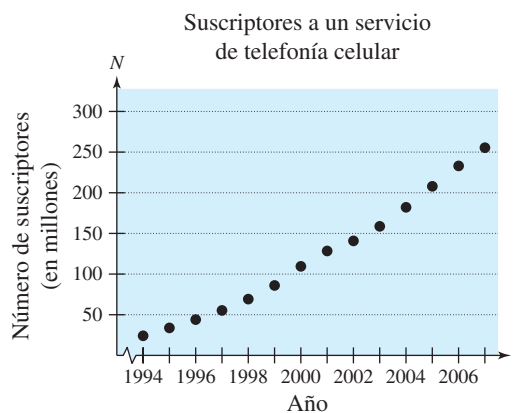


FIGURA 1.4

PUNTO de repaso Ahora trate de hacer el Ejercicio 25.

En el Ejemplo 2, se podría hacer que $t = 1$ represente el año 1994. En ese caso, el eje horizontal no hubiera mostrado el pico y las marcas de división hubieran estado rotuladas del 1 al 14 (en lugar de 1994 a 2007).

TECNOLOGÍA

La gráfica de dispersión del Ejemplo 2 es sólo una forma de representar los datos. También se pueden representar datos si se usa una gráfica de barras o una de rectas. Si usted tiene acceso a una calculadora de gráficas, trate de usarla para representar los datos dados en el Ejemplo 2.

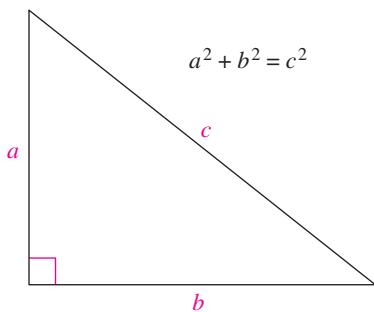


FIGURA 1.5

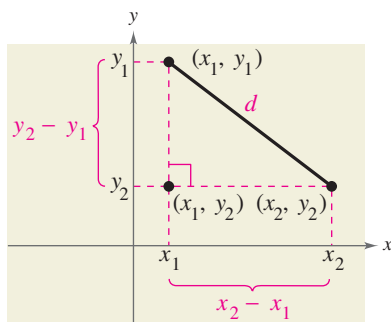


FIGURA 1.6

Teorema de Pitágoras y la fórmula de la distancia

El famoso teorema que sigue se emplea extensamente en todo este curso.

Teorema de Pitágoras

Para un triángulo rectángulo con hipotenusa de longitud c y lados de longitudes a y b , tenemos que $a^2 + b^2 = c^2$, como se muestra en la Figura 1.5. (Lo contrario también es cierto, es decir, si $a^2 + b^2 = c^2$, entonces el triángulo es rectángulo.)

Supongamos que se desea determinar la distancia d entre dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) del plano. Con estos dos puntos puede formarse un triángulo rectángulo, como se ve en la Figura 1.6. La longitud del lado vertical del triángulo es $|y_2 - y_1|$, y la longitud del lado horizontal es $|x_2 - x_1|$. Por el teorema de Pitágoras, podemos escribir

$$d^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$$

$$d = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Este resultado es la **fórmula de la distancia**.

Fórmula de la distancia

La distancia d entre los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) en el plano es

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Ejemplo 3 Hallar una distancia

Encuentre la distancia entre los puntos $(-2, 1)$ y $(3, 4)$.

Solución algebraica

Sea $(x_1, y_1) = (-2, 1)$ y $(x_2, y_2) = (3, 4)$. Aplicando la fórmula de la distancia,

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} && \text{Fórmula de la distancia} \\ &= \sqrt{[3 - (-2)]^2 + (4 - 1)^2} && \text{Sustituir por } x_1, y_1, x_2 \text{ y } y_2. \\ &= \sqrt{(5)^2 + (3)^2} && \text{Simplificar.} \\ &= \sqrt{34} && \text{Simplificar.} \\ &\approx 5.83 && \text{Usar calculadora.} \end{aligned}$$

Entonces, la distancia entre los puntos es alrededor de 5.83 unidades. Se puede usar el teorema de Pitágoras para verificar que la distancia es correcta.

$$\begin{aligned} d^2 &\stackrel{?}{=} 3^2 + 5^2 && \text{Teorema de Pitágoras} \\ (\sqrt{34})^2 &\stackrel{?}{=} 3^2 + 5^2 && \text{Sustituir por } d. \\ 34 &= 34 && \text{Prueba de distancias. } \checkmark \end{aligned}$$

Solución gráfica

Utilice papel cuadriculado en centímetros para graficar los puntos $A(-2, 1)$ y $B(3, 4)$. Con todo cuidado trace el segmento de recta de A a B y, a continuación, use una regla en centímetros para medir la longitud del segmento.

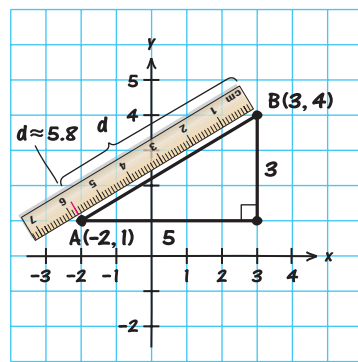


FIGURA 1.7

El segmento de recta mide 5.8 centímetros, aproximadamente, como se ve en la Figura 1.7. Por tanto, la distancia entre los puntos es alrededor de 5.8 unidades.

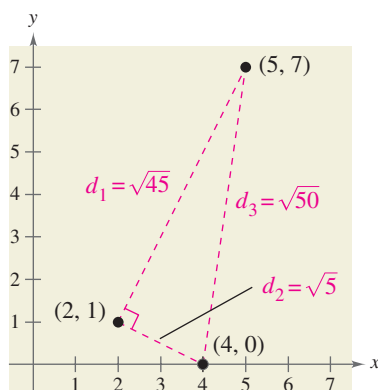


FIGURA 1.8

Ayuda de álgebra

En el Apéndice A.2 hay un repaso de las técnicas para evaluar un radical.

Ejemplo 4 Verificar un triángulo rectángulo

Demuestre que los puntos $(2, 1)$, $(4, 0)$, y $(5, 7)$ son vértices de un triángulo rectángulo.

Solución

Los tres puntos están localizados en la Figura 1.8. Con la fórmula de la distancia se puede hallar la longitud de los tres lados, como sigue:

$$d_1 = \sqrt{(5 - 2)^2 + (7 - 1)^2} = \sqrt{9 + 36} = \sqrt{45}$$

$$d_2 = \sqrt{(4 - 2)^2 + (0 - 1)^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$$

$$d_3 = \sqrt{(5 - 4)^2 + (7 - 0)^2} = \sqrt{1 + 49} = \sqrt{50}$$

Como

$$(d_1)^2 + (d_2)^2 = 45 + 5 = 50 = (d_3)^2$$

se puede concluir, por el teorema de Pitágoras, que el triángulo debe ser rectángulo.

PUNTO de repaso ➔ Ahora trate de hacer el Ejercicio 43.

Fórmula del punto medio

Para hallar el **punto medio** del segmento de recta que une dos puntos en un plano de coordenadas, simplemente se encuentran los valores promedio de las respectivas coordenadas de los dos puntos de extremo usando la **fórmula del punto medio**.

Fórmula del punto medio

El punto medio del segmento de recta que une los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) está dado por la fórmula del punto medio

$$\text{Punto medio} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right).$$

Para una demostración de la fórmula del punto medio, vea Demostraciones en matemáticas en la página 122.

Ejemplo 5 Hallar el punto medio de un segmento de recta

Encuentre el punto medio del segmento de recta que une los puntos $(-5, -3)$ y $(9, 3)$.

Solución

Sea $(x_1, y_1) = (-5, -3)$ y $(x_2, y_2) = (9, 3)$.

$$\text{Punto medio} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) \quad \text{Fórmula del punto medio}$$

$$= \left(\frac{-5 + 9}{2}, \frac{-3 + 3}{2} \right) \quad \text{Sustituir por } x_1, y_1, x_2 \text{ y } y_2.$$

$$= (2, 0) \quad \text{Simplificar.}$$

El punto medio del segmento de recta es $(2, 0)$, como se ve en la Figura 1.9.

PUNTO de repaso ➔ Ahora trate de hacer el Ejercicio 47(c).

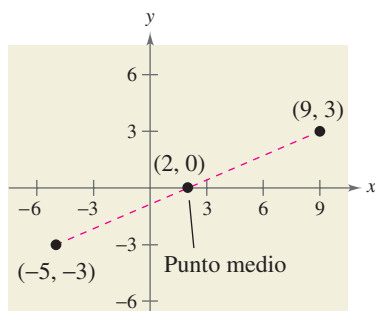


FIGURA 1.9

Aplicaciones

Ejemplo 6 Hallar la longitud de un pase

El “mariscal de campo” de un equipo de fútbol americano lanza un pase desde la línea de la yarda 28, a 40 yardas de la línea de banda. El pase es atrapado por un receptor en la línea de la yarda 5, a 20 yardas de la misma línea de banda, como se ve en la Figura 1.10. ¿Cuál es la longitud del pase?

Solución

Se puede determinar la longitud del pase al hallar la distancia entre los puntos (40, 28) y (20, 5).

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(40 - 20)^2 + (28 - 5)^2} \\ &= \sqrt{400 + 529} \\ &= \sqrt{929} \\ &\approx 30 \end{aligned}$$

Fórmula de la distancia

Sustituir por x_1, y_1, x_2 y y_2 .

Simplificar.

Simplificar.

Usar calculadora.

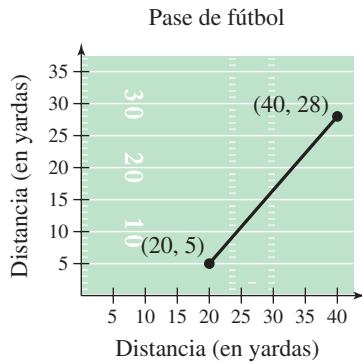


FIGURA 1.10

Por tanto, el pase es de alrededor de 30 yardas.

PUNTO de repaso Ahora trate de hacer el Ejercicio 57.

En el Ejemplo 6, la escala a lo largo de la línea de gol normalmente no aparece en un campo de fútbol. No obstante, cuando se usa geometría de coordenadas para resolver problemas reales, tenemos libertad de poner el sistema de coordenadas en cualquier forma que sea cómoda para la solución del problema.

Ejemplo 7 Calcular ingresos anuales

Barnes & Noble tuvo ventas anuales de alrededor de \$5100 millones de dólares en 2005, y \$5400 millones de dólares en 2007. Sin saber más información adicional, ¿cuáles calcularía usted que han sido las ventas de 2006? (Fuente: Barnes & Noble, Inc.)

Solución

Una solución al problema es suponer que las ventas siguieron una tendencia lineal. Con esta suposición, se pueden calcular las ventas de 2006 si se encuentra el punto medio del segmento de recta que enlaza los puntos (2005, 5.1) y (2007, 5.4).

$$\begin{aligned} \text{Punto medio} &= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) \\ &= \left(\frac{2005 + 2007}{2}, \frac{5.1 + 5.4}{2} \right) \\ &= (2006, 5.25) \end{aligned}$$

Fórmula del punto medio

Sustituir por x_1, x_2, y_1 y y_2 .

Simplificar.

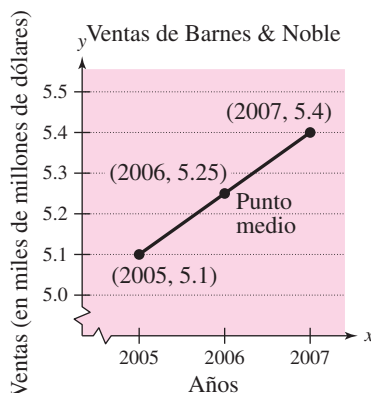


FIGURA 1.11

Entonces, se pueden calcular que las ventas de 2006 han sido de alrededor de \$5250 millones de dólares, como se muestra en la Figura 1.11. (Las ventas reales de 2006 fueron alrededor de \$5260 millones de dólares.)

PUNTO de repaso Ahora trate de hacer el Ejercicio 59.

Ejemplo 8 Trasladar puntos en el plano

El triángulo de la Figura 1.12 tiene vértices en los puntos $(-1, 2)$, $(1, -4)$, y $(2, 3)$. Desplace el triángulo tres unidades a la derecha y dos unidades hacia arriba y encuentre los vértices del triángulo desplazado, como se muestra en la Figura 1.13.

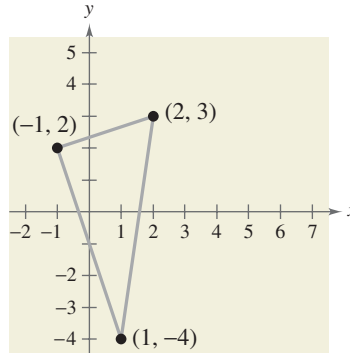


FIGURA 1.12

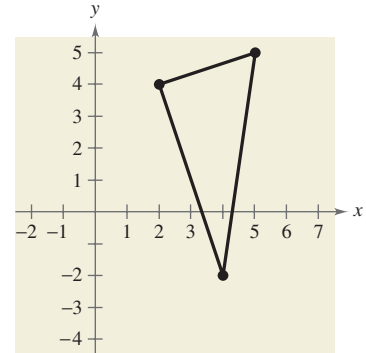


FIGURA 1.13

Solución

Para desplazar los vértices tres unidades a la derecha, sume 3 a cada una de las coordenadas x ; para desplazar los vértices dos unidades hacia arriba, sume 2 a cada una de las coordenadas y .

<i>Punto original</i>	<i>Punto trasladado</i>
$(-1, 2)$	$(-1 + 3, 2 + 2) = (2, 4)$
$(1, -4)$	$(1 + 3, -4 + 2) = (4, -2)$
$(2, 3)$	$(2 + 3, 3 + 2) = (5, 5)$

PUNTO de repaso ➔ Ahora trate de hacer el Ejercicio 61.

Las figuras proporcionadas en el Ejemplo 8 en realidad no eran esenciales para la solución, pero encarecidamente recomendamos al lector desarrolle el hábito de incluir bosquejos con sus soluciones, incluso si no se requieren.

DISCUSIÓN EN CLASE

Ampliación del ejemplo El Ejemplo 8 muestra cómo trasladar puntos en un plano de coordenadas. Escriba un breve párrafo que describa la forma en que cada uno de los siguientes puntos transformados está relacionado con el punto original.

<i>Punto original</i>	<i>Punto transformado</i>
(x, y)	$(-x, y)$
(x, y)	$(x, -y)$
(x, y)	$(-x, -y)$

1.1 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

VOCABULARIO

1. Relacione cada uno de los términos siguientes con su definición.

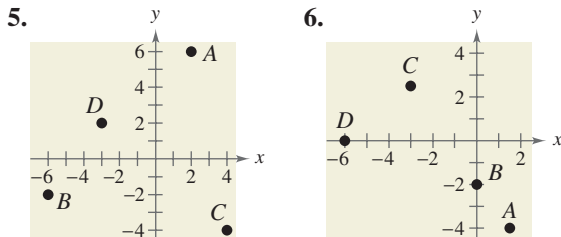
- | | |
|--------------------|--|
| (a) eje x | (i) punto de intersección del eje vertical y el eje horizontal |
| (b) eje y | (ii) distancia dirigida desde el eje x |
| (c) origen | (iii) distancia dirigida desde el eje y |
| (d) cuadrantes | (iv) cuatro regiones del plano de coordenadas |
| (e) coordenada x | (v) recta numérica horizontal |
| (f) coordenada y | (vi) recta numérica vertical |

En los Ejercicios 2-4, llene los espacios en blanco.

2. Un par ordenado de números reales puede estar representado en un plano llamado sistema de coordenadas rectangulares o plano _____.
3. La _____ es resultado derivado del teorema de Pitágoras.
4. Hallar los valores promedio de las coordenadas representativas de un segmento de recta en un plano de coordenadas también se conoce como usar la _____.

HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 5 y 6, aproxime las coordenadas de los puntos.



En los Ejercicios 7-10, ubique los puntos en el plano cartesiano.

7. $(-4, 2)$, $(-3, -6)$, $(0, 5)$, $(1, -4)$
8. $(0, 0)$, $(3, 1)$, $(-2, 4)$, $(1, -1)$
9. $(3, 8)$, $(0.5, -1)$, $(5, -6)$, $(-2, 2.5)$
10. $(1, -\frac{1}{3})$, $(\frac{3}{4}, 3)$, $(-3, 4)$, $(-\frac{4}{3}, -\frac{3}{2})$

En los Ejercicios 11-14, encuentre las coordenadas del punto.

11. El punto está situado tres unidades a la izquierda del eje y y cuatro unidades arriba del eje x .
12. El punto está situado ocho unidades abajo del eje x y cuatro unidades a la derecha del eje y .
13. El punto está situado cinco unidades abajo del eje x y las coordenadas del punto son iguales.
14. El punto está sobre el eje x y 12 unidades a la izquierda del eje y .

En los Ejercicios 15-24, determine el cuadrante(s) en el que (x, y) está situado de modo que la condición(es) se satisfaga.

- | | |
|------------------------|------------------------|
| 15. $x > 0$ y $y < 0$ | 16. $x < 0$ y $y < 0$ |
| 17. $x = -4$ y $y > 0$ | 18. $x > 2$ y $y = 3$ |
| 19. $y < -5$ | 20. $x > 4$ |
| 21. $x < 0$ y $-y > 0$ | 22. $-x > 0$ y $y < 0$ |
| 23. $xy > 0$ | 24. $xy < 0$ |

En los Ejercicios 25 y 26, trace una gráfica de dispersión de los datos mostrados en la tabla.

25. **NÚMERO DE TIENDAS** La tabla muestra el número y de tiendas Wal-Mart para cada año x de 2000 a 2007. (Fuente: Wal-Mart Stores, Inc.)



Año, x	Número de tiendas, y
2000	4189
2001	4414
2002	4688
2003	4906
2004	5289
2005	6141
2006	6779
2007	7262

26. METEOROLOGÍA La tabla siguiente muestra la temperatura y más baja registrada (en grados Fahrenheit) en Duluth, Minnesota, para cada mes x , donde $x = 1$ representa enero. (Fuente: NOAA)

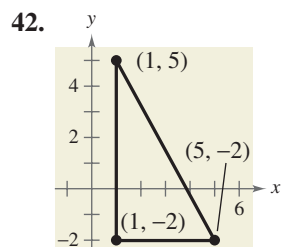
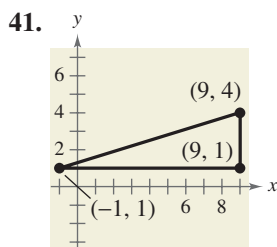
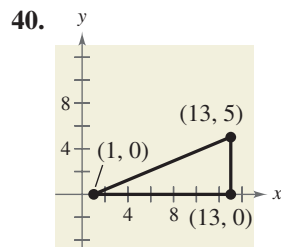
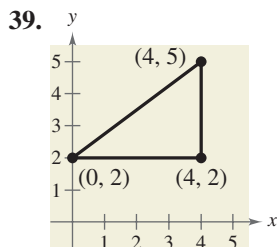


Mes, x	Temperatura, y
1	-39
2	-39
3	-29
4	-5
5	17
6	27
7	35
8	32
9	22
10	8
11	-23
12	-34

En los Ejercicios 27-38, encuentre la distancia entre los puntos.

27. $(6, -3), (6, 5)$ 28. $(1, 4), (8, 4)$
 29. $(-3, -1), (2, -1)$ 30. $(-3, -4), (-3, 6)$
 31. $(-2, 6), (3, -6)$ 32. $(8, 5), (0, 20)$
 33. $(1, 4), (-5, -1)$ 34. $(1, 3), (3, -2)$
 35. $(\frac{1}{2}, \frac{4}{3}), (2, -1)$ 36. $(-\frac{2}{3}, 3), (-1, \frac{5}{4})$
 37. $(-4.2, 3.1), (-12.5, 4.8)$
 38. $(9.5, -2.6), (-3.9, 8.2)$

En los Ejercicios 39-42, (a) encuentre la longitud de cada lado del triángulo recto y (b) demuestre que estas longitudes satisfacen el teorema de Pitágoras.



En los Ejercicios 43-46, demuestre que los puntos forman los vértices del polígono indicado.

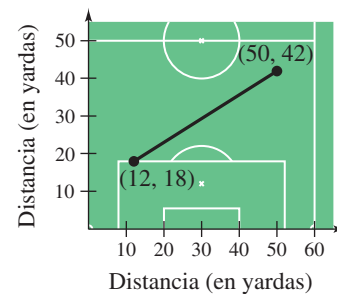
43. Triángulo rectángulo: $(4, 0), (2, 1), (-1, -5)$
 44. Triángulo rectángulo: $(-1, 3), (3, 5), (5, 1)$
 45. Triángulo isósceles: $(1, -3), (3, 2), (-2, 4)$
 46. Triángulo isósceles: $(2, 3), (4, 9), (-2, 7)$

En los Ejercicios 47-56, (a) sitúe los puntos, (b) encuentre la distancia entre ellos, y (c) encuentre el punto medio del segmento de recta que une los puntos.

47. $(1, 1), (9, 7)$ 48. $(1, 12), (6, 0)$
 49. $(-4, 10), (4, -5)$ 50. $(-7, -4), (2, 8)$
 51. $(-1, 2), (5, 4)$ 52. $(2, 10), (10, 2)$
 53. $(\frac{1}{2}, 1), (-\frac{5}{2}, \frac{4}{3})$ 54. $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}), (-\frac{1}{6}, -\frac{1}{2})$
 55. $(6.2, 5.4), (-3.7, 1.8)$ 56. $(-16.8, 12.3), (5.6, 4.9)$

57. DISTANCIA DE VUELO Un avión vuela de Nápoles, Italia, en línea recta a Roma, Italia, que está a 120 kilómetros al norte y 150 kilómetros al oeste de Nápoles. ¿Qué distancia vuela el avión?

58. DEPORTES Un jugador de fútbol pasa el balón de un punto que está a 18 yardas de la línea de meta y 12 yardas de la línea de banda. El pase es recibido por un compañero de equipo que está a 42 yardas de la misma línea de meta y 50 yardas de la misma línea de banda, como se indica en la figura. ¿Qué tan largo es el pase?



VENTAS En los Ejercicios 59 y 60, use la fórmula del punto medio para calcular las ventas de Big Lots, Inc. y Dollar Tree Stores, Inc. en 2005, dadas las ventas en 2003 y 2007. Suponga que las ventas siguieron un patrón lineal. (Fuente: Big Lots, Inc.; Dollar Tree Stores, Inc.)

59. Big Lots

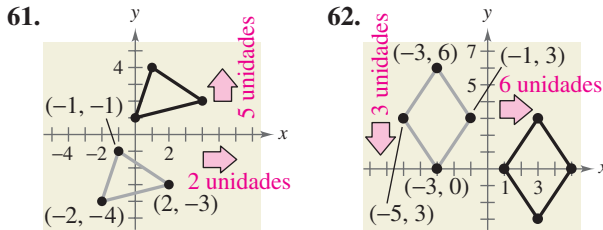


Año	Ventas (en millones)
2003	\$4174
2007	\$4656

60. Dollar Tree

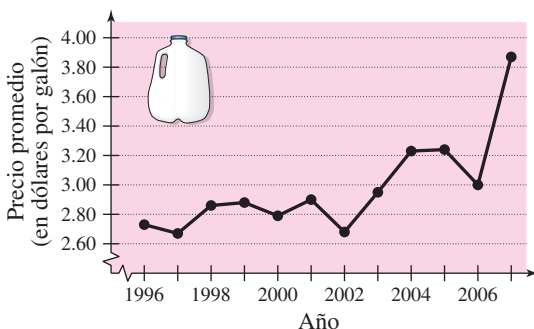
Año	Ventas (en millones)
2003	\$2800
2007	\$4243

En los Ejercicios 61-64, el polígono está desplazado a una nueva posición del plano. Encuentre las coordenadas de los vértices del polígono en su nueva posición.



63. Coordenadas originales de los vértices: $(-7, -2)$, $(-2, 2)$, $(-2, -4)$, $(-7, -4)$
Desplazamiento: ocho unidades hacia arriba, cuatro unidades a la derecha.
64. Coordenadas originales de los vértices: $(5, 8)$, $(3, 6)$, $(7, 6)$, $(5, 2)$
Desplazamiento: 6 unidades hacia abajo, 10 unidades a la izquierda.

PRECIO AL POR MENOR En los Ejercicios 65 y 66, use la gráfica, que muestra el promedio de precios al por menor de 1 galón de leche entera de 1996 a 2007. (Fuente: U.S. Bureau of Labor Statistics)



65. Aproxime el precio más alto de un galón de leche entera que se muestra en la gráfica. ¿Cuándo ocurrió?
66. Aproxime el porcentaje de cambio en el precio de leche a partir del precio en 1996 al precio más alto mostrado en la gráfica.
67. **PUBLICIDAD** La gráfica muestra el costo promedio de un anuncio de 30 segundos en televisión (en miles de dólares) durante el Súper Tazón de 2000 a 2008. (Fuente: Nielsen Media and TNS Media Intelligence)

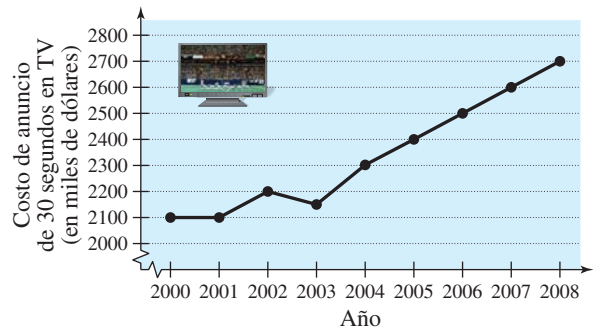
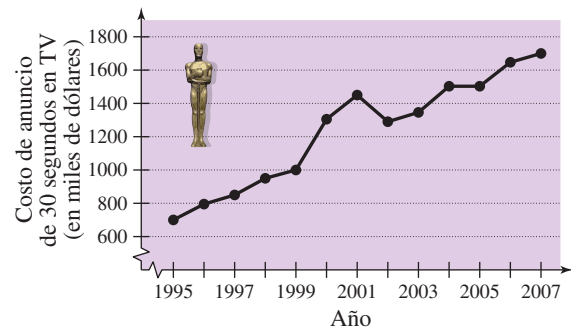
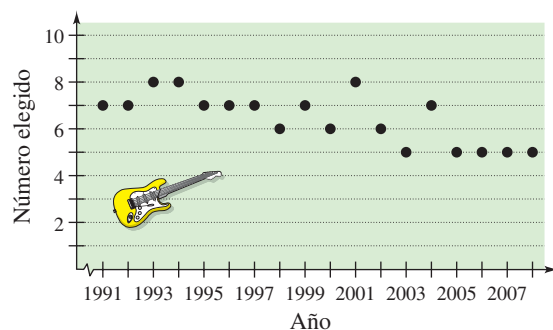


FIGURA PARA 67

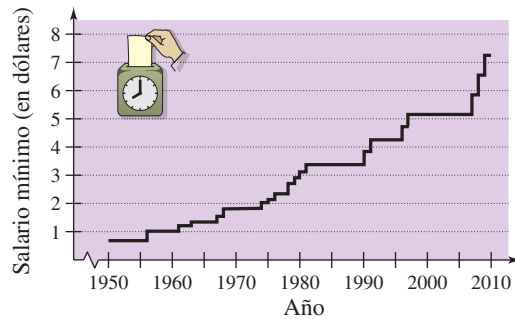
- (a) Calcule el porcentaje de aumento en el costo promedio de un anuncio de 30 segundos del Súper Tazón XXXIV en 2000 al Súper Tazón XXXVIII en 2004.
- (b) Calcule el porcentaje de aumento en el costo promedio de un anuncio de 30 segundos del Súper Tazón XXXIV en 2000 al Súper Tazón XLII en 2008.
68. **PUBLICIDAD** La gráfica muestra los costos promedio de un anuncio de 30 segundos en televisión (en miles de dólares) durante los Premios de la Academia, de 1995 a 2007. (Fuente: Nielsen Monitor-Plus)



- (a) Calcule el porcentaje de aumento en el costo promedio de un anuncio en 1996 al costo en 2002.
- (b) Calcule el porcentaje de aumento en el costo promedio de un anuncio en 1996 al costo en 2007.
69. **MÚSICA** La gráfica muestra los números de artistas que fueron elegidos para el Salón de la Fama del Rock and Roll de 1991 a 2008. Describa cualesquiera tendencias de los datos. A partir de estas tendencias, prediga el número de artistas elegidos en 2010. (Fuente: rockhall.com)



- 70. FUERZA LABORAL** Use la gráfica siguiente, que muestra el salario mínimo en Estados Unidos (en dólares) de 1950 a 2009. (Fuente: U.S. Department of Labor)



- (a) ¿Cuál década muestra el máximo aumento en salario mínimo?
- (b) Calcule el porcentaje de aumentos en el salario mínimo de 1990 a 1995 y de 1995 a 2009.
- (c) Use el porcentaje de aumento de 1995 a 2009 para predecir el salario mínimo en 2013.
- (d) ¿Piensa usted que su predicción en el inciso (c) es razonable? Explique.
- 71. VENTAS** La Coca-Cola Company tuvo ventas de \$19805 millones en 1999 y \$28857 millones en 2007. Utilice la fórmula del punto medio para calcular las ventas en 2003. Suponga que las ventas siguieron un patrón lineal. (Fuente: The Coca-Cola Company)
- 72. ANÁLISIS DE DATOS: CALIFICACIONES DE EXÁMENES** La tabla siguiente muestra las calificaciones x para examen de entrada, y las calificaciones y de examen final en un curso de álgebra, para una muestra de 10 estudiantes.

x	22	29	35	40	44	48	53	58	65	76
y	53	74	57	66	79	90	76	93	83	99

- (a) Trace una gráfica de dispersión de los datos.
- (b) Encuentre la calificación del examen de entrada de cualquier estudiante con calificación de examen final en los 80.
- (c) ¿Una calificación más alta en el examen de entrada implica una calificación más alta en el examen final? Explique.
- 73. ANÁLISIS DE DATOS: CORREO** La tabla siguiente muestra el número y de piezas de correo manejadas (en miles de millones) por el U.S. Postal Service por cada año x de 1996 a 2008. (Fuente: U.S. Postal Service)



Año, x	Piezas de correo, y
1996	183
1997	191
1998	197
1999	202
2000	208
2001	207
2002	203
2003	202
2004	206
2005	212
2006	213
2007	212
2008	203

TABLA PARA 73

- (a) Trace una gráfica de dispersión de los datos.
- (b) Calcule el año en el que hubo el máximo aumento en el número de piezas de correo manejadas.
- (c) ¿Por qué piensa usted que el número de piezas de correo manejadas disminuyó?
- 74. ANÁLISIS DE DATOS: DEPORTES** La tabla siguiente muestra los números de equipos de baloncesto colegial, para hombres M y para mujeres W , por cada año x de 1994 a 2007. (Fuente: National Collegiate Athletic Association)



Año, x	Equipos de hombres, M	Equipos de mujeres, W
1994	858	859
1995	868	864
1996	866	874
1997	865	879
1998	895	911
1999	926	940
2000	932	956
2001	937	958
2002	936	975
2003	967	1009
2004	981	1008
2005	983	1036
2006	984	1018
2007	982	1003

- (a) Trace gráficas de dispersión de estos dos conjuntos de datos en el mismo conjunto de ejes de coordenadas.

- (b) Encuentre el año en que el número de equipos de hombres y mujeres fueron casi iguales.
- (c) Encuentre el año en que la diferencia entre el número de equipos de hombres y mujeres fue máximo. ¿Cuál fue la diferencia?

EXPLORACIÓN

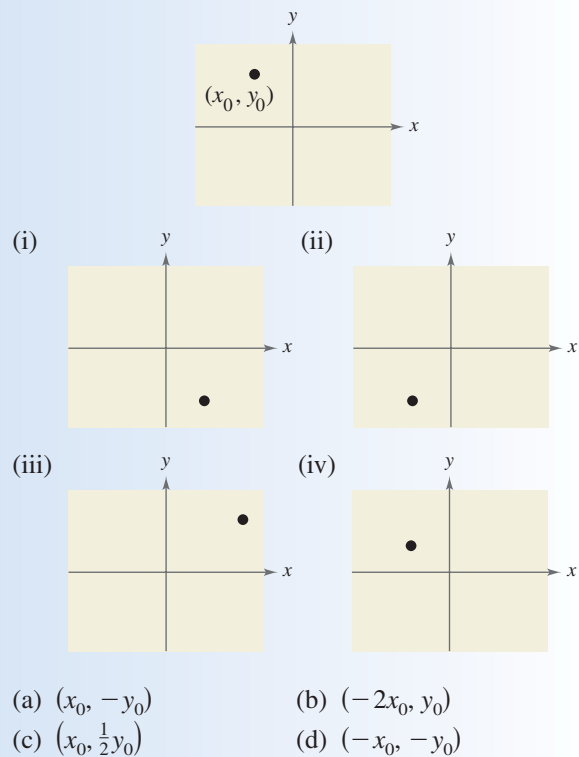
- 75. Un segmento de recta tiene (x_1, y_1) como un punto extremo y (x_m, y_m) como su punto medio. Encuentre el otro punto extremo (x_2, y_2) del segmento de recta en términos de x_1, y_1, x_m y y_m .
- 76. Use el resultado del Ejercicio 75 para hallar las coordenadas del punto extremo de un segmento de recta si las coordenadas del otro punto extremo y del punto medio son, respectivamente,
 - (a) $(1, -2), (4, -1)$ y (b) $(-5, 11), (2, 4)$.
- 77. Use la fórmula del punto medio tres veces para hallar los tres puntos que dividen, en cuatro partes, el segmento de recta que enlaza (x_1, y_1) y (x_2, y_2) .
- 78. Use el resultado del Ejercicio 77 para hallar los puntos que dividen, en cuatro partes iguales, el segmento que une los puntos dados.
 - (a) $(1, -2), (4, -1)$ (b) $(-2, -3), (0, 0)$
- 79. **HACER UNA CONJETURA** Localice los puntos $(2, 1)$, $(-3, 5)$, y $(7, -3)$ en un sistema de coordenadas rectangulares. A continuación cambie el signo de la coordenada x de cada punto y localice los tres nuevos puntos en el mismo sistema de coordenadas rectangulares. Haga una conjetura acerca de la ubicación de un punto cuando ocurra lo siguiente.
 - (a) El signo de la coordenada x se cambia.
 - (b) El signo de la coordenada y se cambia.
 - (c) Los signos de las coordenadas x y y se cambian.

- 80. **PUNTOS COLINEALES** Tres o más puntos son *colineales* si están todos en la misma recta. Use los pasos siguientes para determinar si los conjuntos de puntos $\{A(2, 3), B(2, 6), C(6, 3)\}$ y $\{A(8, 3), B(5, 2), C(2, 1)\}$ son colineales.
 - (a) Por cada conjunto de puntos, use la fórmula de la distancia para hallar las distancias de A a B , de B a C y de A a C . ¿Qué relación existe entre estas distancias para cada conjunto de puntos?
 - (b) Sitúe cada conjunto de puntos en el plano cartesiano. ¿Todos los puntos de cualquier conjunto parecen estar sobre la misma recta?
 - (c) Compare sus conclusiones del inciso (a) con las conclusiones a las que llegó por las gráficas del inciso (b). Haga un enunciado general acerca de cómo usar la fórmula de la distancia para determinar colinealidad.

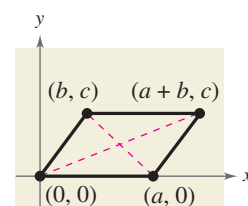
VERDADERO O FALSO En los Ejercicios 81 y 82, determine si el enunciado es verdadero o falso. Justifique su respuesta.

- 81. Para dividir un segmento en 16 partes iguales sería necesario usar 16 veces la fórmula del punto medio
- 82. Los puntos $(-8, 4)$, $(2, 11)$ y $(-5, 1)$ representan los vértices de un triángulo isósceles.
- 83. **PIÉNSELO** Cuando se localizan puntos en el sistema de coordenadas rectangulares, ¿es cierto que las escalas en los ejes x y y deben ser iguales? Explique.

- 84. **TOQUE FINAL** Utilice la gráfica del punto (x_0, y_0) de la figura. Relacione la transformación del punto con la gráfica correcta. Explique su razonamiento. [Las gráficas están marcadas (i), (ii), (iii) y (iv).]



- 85. **DEMOSTRACIÓN** Demuestre que las diagonales del paralelogramo de la figura se intersecan en sus puntos medios.



1.2 GRÁFICAS DE ECUACIONES

Lo que debe aprender

- Trazar gráficas de ecuaciones.
- Hallar intersecciones x y y de gráficas de ecuaciones.
- Usar simetría para trazar gráficas de ecuaciones.
- Hallar ecuaciones y trazar gráficas de circunferencias.
- Usar gráficas de ecuaciones para resolver problemas reales.

Por qué debe aprenderlo

La gráfica de una ecuación puede ayudar a ver relaciones entre cantidades reales. Por ejemplo, en el Ejercicio 87 de la página 23 se puede usar una gráfica para calcular las expectativas de vida de niños que nazcan en 2015.

Gráfica de una ecuación

En la Sección 1.1 utilizamos un sistema de coordenadas para representar gráficamente la relación entre dos cantidades. Ahí, la imagen gráfica estaba formada por un conjunto de puntos en un plano de coordenadas.

Con frecuencia, una relación entre dos cantidades se expresa como una **ecuación con dos variables**. Por ejemplo, $y = 7 - 3x$ es una ecuación en x y y . Un par ordenado (a, b) es una **solución** o **punto de solución** de una ecuación con x y y si la ecuación es verdadera cuando a se sustituye por x y b se sustituye por y . Por ejemplo, $(1, 4)$ es una solución de $y = 7 - 3x$ porque $4 = 7 - 3(1)$ es una proposición verdadera.

En esta sección repasaremos algunos procedimientos básicos para trazar la gráfica de una ecuación con dos variables. La **gráfica de una ecuación** es el conjunto de todos los puntos que son soluciones de la ecuación.

Ejemplo 1 Determinar puntos de solución

Determine si (a) $(2, 13)$ y (b) $(-1, -3)$ están en la gráfica de $y = 10x - 7$.

Solución

a. $y = 10x - 7$ Escribir la ecuación original.
 $13 \stackrel{?}{=} 10(2) - 7$ Sustituir 2 por x y 13 por y .
 $13 = 13$ $(2, 13)$ es una solución. ✓

El punto $(2, 13)$ *está* en la gráfica de $y = 10x - 7$ porque es un punto de solución de la ecuación.

b. $y = 10x - 7$ Escribir la ecuación original.
 $-3 \stackrel{?}{=} 10(-1) - 7$ Sustituir -1 por x y -3 por y .
 $-3 \neq -17$ $(-1, -3)$ no es una solución.

El punto $(-1, -3)$ *no está* en la gráfica de $y = 10x - 7$ porque *no es* un punto de solución de la ecuación.

PUNTO de repaso ➔ Ahora trate de hacer el Ejercicio 7.

La técnica básica empleada para trazar la gráfica de una ecuación es el **método de determinación de puntos**.

Ayuda de álgebra

Al evaluar una expresión o ecuación, recuerde seguir las reglas básicas del álgebra. Para repasar estas reglas, vea el Apéndice A.1.

Trazar la gráfica de una ecuación al determinar puntos

1. Si posible, vuelva a escribir la ecuación para que una de las variables quede aislada en uno de sus lados (miembros).
2. Haga una tabla de valores que muestre varios puntos de solución.
3. Sitúe esos puntos en un sistema de coordenadas rectangulares.
4. Enlace los puntos con una curva o recta lisas.

Ejemplo 2 Trazar la gráfica de una ecuación

Trace la gráfica de

$$y = 7 - 3x.$$

Solución

Como la ecuación ya está despejada (resuelta para y), construya una tabla de valores formada por varios puntos de solución de la ecuación. Por ejemplo, cuando $x = -1$,

$$\begin{aligned} y &= 7 - 3(-1) \\ &= 10 \end{aligned}$$

lo que implica que $(-1, 10)$ es un punto de solución de la gráfica.

x	$y = 7 - 3x$	(x, y)
-1	10	$(-1, 10)$
0	7	$(0, 7)$
1	4	$(1, 4)$
2	1	$(2, 1)$
3	-2	$(3, -2)$
4	-5	$(4, -5)$

De la tabla, se deduce que

$$(-1, 10), (0, 7), (1, 4), (2, 1), (3, -2) \text{ y } (4, -5)$$

son puntos de solución de la ecuación. Después de graficar estos puntos, se puede ver que aparecen en una recta, como se muestra en la Figura 1.14. La gráfica de la ecuación es la recta que pasa por los seis puntos determinados.

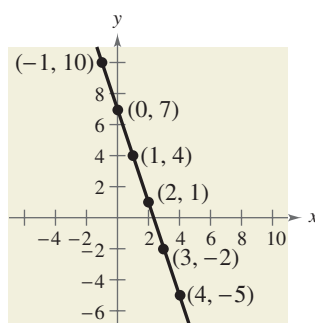


FIGURA 1.14

PUNTO de repaso

Ahora trate de hacer el Ejercicio 15.

Ejemplo 3 Trazar la gráfica de una ecuación

Trace la gráfica de

$$y = x^2 - 2.$$

Solución

Como la ecuación ya está despejada, empecemos por construir una tabla de valores.

x	-2	-1	0	1	2	3
$y = x^2 - 2$	2	-1	-2	-1	2	7
(x, y)	$(-2, 2)$	$(-1, -1)$	$(0, -2)$	$(1, -1)$	$(2, 2)$	$(3, 7)$

Tip de estudio

Uno de los objetivos de este curso es aprender a clasificar la forma básica de una gráfica a partir de su ecuación. Por ejemplo, usted aprenderá que la *ecuación lineal* del Ejemplo 2 tiene la forma

$$y = mx + b$$

y su gráfica es una recta. Del mismo modo, la *ecuación cuadrática* del Ejemplo 3 tiene la forma

$$y = ax^2 + bx + c$$

y su gráfica es una parábola.

A continuación, grafique los puntos dados en la tabla, como se ve en la Figura 1.15. Por último, enlace los puntos con una curva lisa, como se muestra en la Figura 1.16.

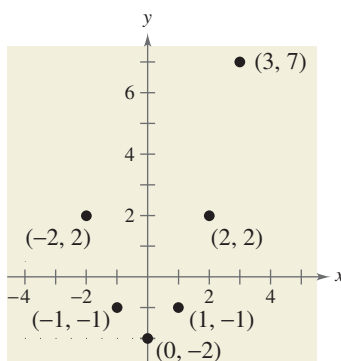


FIGURA 1.15

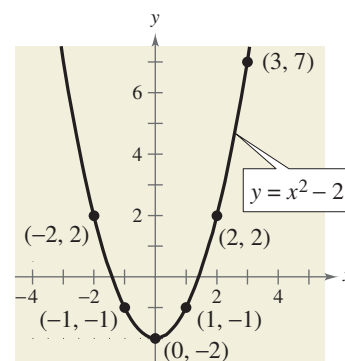


FIGURA 1.16

PUNTO de repaso → Ahora trate de hacer el Ejercicio 17.

El método de determinación de puntos demostrado en los Ejemplos 2 y 3 es fácil de usar, pero tiene algunos defectos. Con muy pocos puntos de solución se puede malinterpretar la gráfica de una ecuación. Por ejemplo, si sólo cuatro puntos

$$(-2, 2), (-1, -1), (1, -1) \text{ y } (2, 2)$$

se determinan en la Figura 1.15, cualquiera de las tres gráficas de la Figura 1.17 sería razonable.

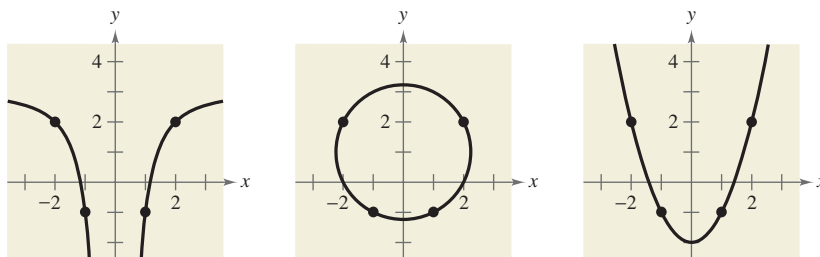
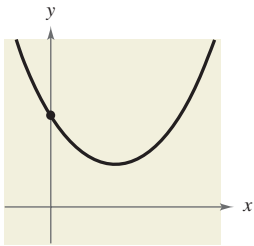
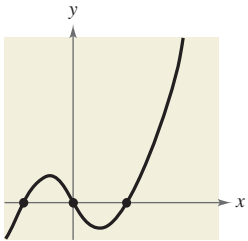


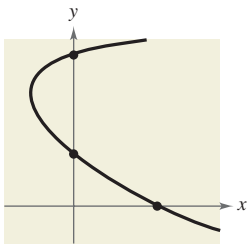
FIGURA 1.17



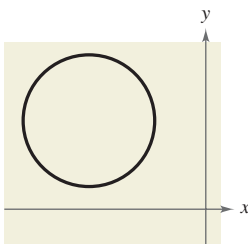
Sin intersección con el eje x ; una con y



Tres intersecciones con el eje x ; una con el y



Una intersección con el eje x ; dos con el y



Sin intersecciones con los ejes

FIGURA 1.18

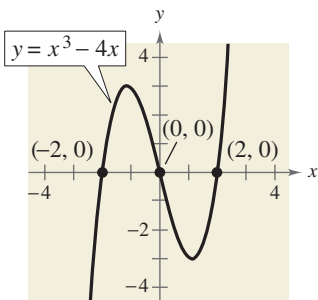


FIGURA 1.19

TECNOLOGÍA

Para graficar una ecuación con x y y en una calculadora de gráficas, use el siguiente procedimiento.

1. Vuelva a escribir la ecuación para aislar y en el lado izquierdo.
2. Ingrese la ecuación en la calculadora de gráficas.
3. Determine la *pantalla* que muestre todas las características importantes de la gráfica.
4. Grafique la ecuación.

Intersecciones de una gráfica con los ejes x y y

Con frecuencia es fácil determinar los puntos de solución que tengan 0 (cero) ya sea como coordenada x o como y . Estos puntos se denominan **intersecciones** con los ejes porque son los puntos en los que la gráfica corta o toca el eje x o el y . Es posible que una gráfica no tenga intersecciones, o que tenga una o varias, como se ve en la Figura 1.18.

Nótese que una intersección con x puede escribirse como el par ordenado $(x, 0)$ y una con el eje y como el par ordenado $(0, y)$. Algunos textos denotan la intersección con x como la coordenada x del punto $(a, 0)$ [y la intersección con y como la coordenada y del punto $(0, b)$] más que el punto mismo. A menos que sea necesario hacer una distinción, usaremos el término *intersección* para dar a entender que es el punto o la coordenada.

Hallar intersecciones con los ejes x y y

1. Para hallar intersecciones con el eje x , sea $y = 0$ y despejemos x de la ecuación.
2. Para hallar intersecciones con el eje y , sea $x = 0$ y despejemos y de la ecuación.

Ejemplo 4 Hallar intersecciones con los ejes x y y

Encuentre las intersecciones con los ejes x y y de la gráfica de $y = x^3 - 4x$.

Solución

Sea $y = 0$. Entonces

$$0 = x^3 - 4x = x(x^2 - 4)$$

tiene soluciones $x = 0$ y $x = \pm 2$.

intersecciones con el eje x : $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(-2, 0)$

Sea $x = 0$. Entonces

$$y = (0)^3 - 4(0)$$

tiene una solución, $y = 0$.

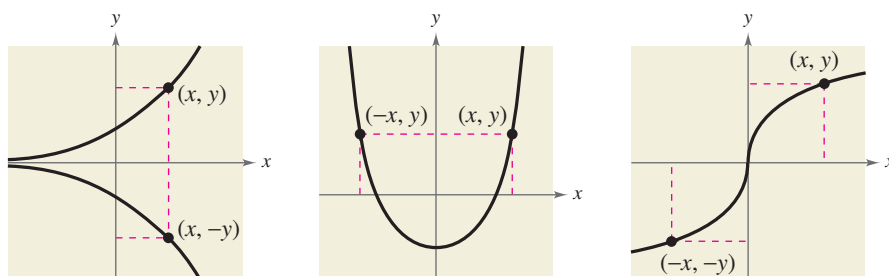
intersecciones con el eje y : $(0, 0)$

Vea Figura 1.19.

PUNTO de repaso ➔ Ahora trate de hacer el Ejercicio 23.

Simetría

Las gráficas de ecuaciones pueden tener **simetría** respecto a uno de los ejes de coordenadas o respecto al origen. La simetría respecto al eje x significa que si el plano cartesiano se doblara a lo largo del eje x , la parte de la gráfica arriba de ese eje coincidiría con la parte de abajo. La simetría respecto al eje y o al origen se puede describir de un modo semejante, como se ilustra en la Figura 1.20.

Simetría respecto al eje x Simetría respecto al eje y

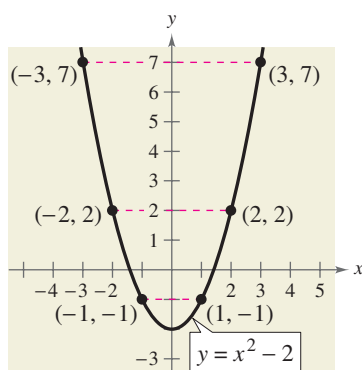
Simetría respecto al origen

FIGURA 1.20

Es útil conocer la simetría de una gráfica *antes* de tratar de trazarla, porque entonces se necesita sólo la mitad de los puntos de solución para hacerlo. Hay tres tipos básicos de simetría, que se describen a continuación.

Pruebas gráficas de simetría

1. Una gráfica es **simétrica respecto al eje x** si, siempre que (x, y) esté en la gráfica, $(x, -y)$ también lo está.
2. Una gráfica es **simétrica respecto al eje y** si, siempre que (x, y) esté en la gráfica, $(-x, y)$ también lo está.
3. Una gráfica es **simétrica respecto al origen** si, siempre que (x, y) esté en la gráfica, $(-x, -y)$ también lo está.

FIGURA 1.21 Simetría respecto al eje y

Se puede concluir que la gráfica de $y = x^2 - 2$ es simétrica respecto al eje y porque el punto $(-x, y)$ también está en la gráfica. (Vea la tabla siguiente y la Figura 1.21.)

x	-3	-2	-1	1	2	3
y	7	2	-1	-1	2	7
(x, y)	$(-3, 7)$	$(-2, 2)$	$(-1, -1)$	$(1, -1)$	$(2, 2)$	$(3, 7)$

Pruebas algebraicas de simetría

1. La gráfica de una ecuación es simétrica respecto al eje x si sustituyendo y con $-y$ resulta una ecuación equivalente.
2. La gráfica de una ecuación es simétrica respecto al eje y si sustituyendo x con $-x$ resulta una ecuación equivalente.
3. La gráfica de una ecuación es simétrica respecto al origen si sustituyendo x con $-x$ y y con $-y$ resulta una ecuación equivalente.

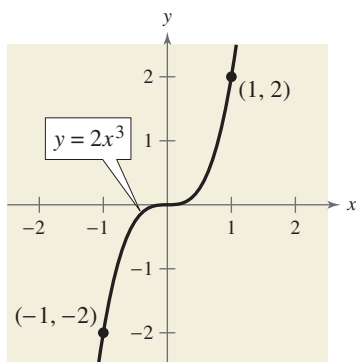


FIGURA 1.22

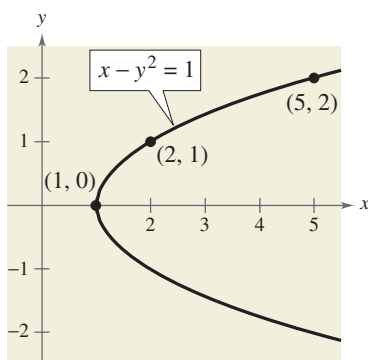


FIGURA 1.23

Ayuda de álgebra

En el Ejemplo 7, $|x - 1|$ es una expresión de valor absoluto. En el Apéndice 1 se pueden repasar las técnicas para evaluar una expresión de valor absoluto.

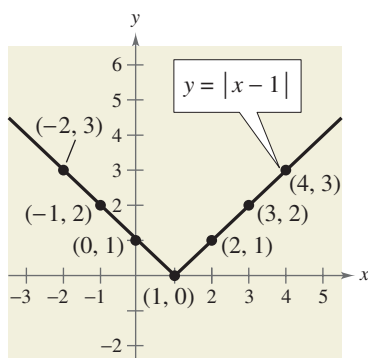


FIGURA 1.24

Ejemplo 5 Prueba de simetría

Pruebe si $y = 2x^3$ tiene simetría respecto a ambos ejes y al origen.

Solución

eje x : $y = 2x^3$

Escribir la ecuación original.

$-y = 2x^3$

Sustituir y con $-y$. El resultado *no es* una ecuación equivalente.

eje y : $y = 2x^3$

Escribir la ecuación original.

$y = 2(-x)^3$

Sustituir x con $-x$.

$y = -2x^3$

Simplificar. El resultado *no es* una ecuación equivalente.

Origen: $y = 2x^3$

Escribir la ecuación original.

$-y = 2(-x)^3$

Sustituir y con $-y$ y x con $-x$.

$-y = -2x^3$

Simplificar.

$y = 2x^3$

Ecuación equivalente

De las tres pruebas de simetría, la única que se satisface es la de simetría respecto al origen (vea Figura 1.22).

PUNTO de repaso Ahora trate de hacer el Ejercicio 33.

Ejemplo 6 La simetría como apoyo de la graficación

Use simetría para trazar la gráfica de $x - y^2 = 1$.

Solución

De las tres pruebas de simetría, la única que se satisface es la de simetría respecto al eje x porque $x - (-y)^2 = 1$ es equivalente a $x - y^2 = 1$. Por tanto, la gráfica es simétrica respecto al eje x . Usando simetría, sólo se necesita hallar los puntos de solución arriba del eje x y a continuación reflejarlos para obtener la gráfica, como se muestra en la Figura 1.23.

PUNTO de repaso Ahora trate de hacer el Ejercicio 49.

Ejemplo 7 Trazar la gráfica de una ecuación

Trace la gráfica de $y = |x - 1|$.

Solución

Esta ecuación no satisface las tres pruebas de simetría y, en consecuencia, su gráfica no es simétrica respecto a cualquiera de los ejes o al origen. El signo de valor absoluto indica que y es siempre no negativa. Genere una tabla de valores y grafique los puntos, como se muestra en la Figura 1.24. De la tabla, se puede ver que $x = 0$ cuando $y = 1$. Por tanto, la intersección con el eje y es $(0, 1)$. Del mismo modo, $y = 0$ cuando $x = 1$. En consecuencia, la intersección con el eje x es $(1, 0)$.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = x - 1 $	3	2	1	0	1	2	3
(x, y)	$(-2, 3)$	$(-1, 2)$	$(0, 1)$	$(1, 0)$	$(2, 1)$	$(3, 2)$	$(4, 3)$

PUNTO de repaso Ahora trate de hacer el Ejercicio 53.

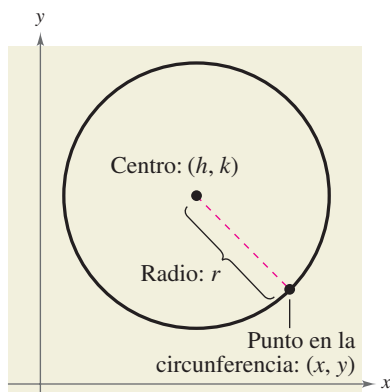


FIGURA 1.25

ATENCIÓN

Sea cuidadoso cuando busque h y k de la ecuación estándar de una circunferencia. Por ejemplo, para hallar las h y k correctas de la ecuación de la circunferencia del Ejemplo 8, vuelva a escribir las cantidades $(x + 1)^2$ y $(y - 2)^2$ usando sustracción.

$$(x + 1)^2 = [x - (-1)]^2,$$

$$(y - 2)^2 = [y - (2)]^2$$

Por tanto, $h = -1$ y $k = 2$.

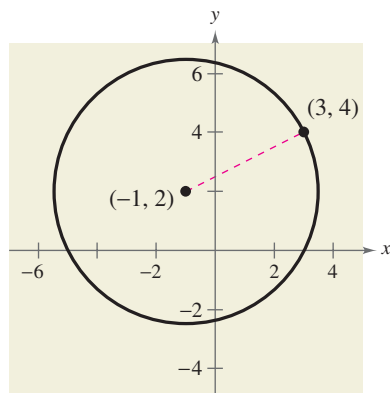


FIGURA 1.26

En todo este curso usted aprenderá a reconocer varios tipos de gráficas a partir de sus ecuaciones. Por ejemplo, aprenderá a reconocer que la gráfica de una ecuación de segundo grado de la forma

$$y = ax^2 + bx + c$$

es una parábola (vea el Ejemplo 3). La gráfica de una **circunferencia** también es fácil de reconocer.

Circunferencias

Considere la circunferencia que se ilustra en la Figura 1.25. Un punto (x, y) está en la circunferencia si y sólo si su distancia desde el centro (h, k) es r . Por la fórmula de la distancia,

$$\sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} = r.$$

Al elevar al cuadrado cada lado de esta ecuación se obtiene la **forma estándar de la ecuación de una circunferencia**.

Forma estándar de la ecuación de una circunferencia

El punto (x, y) está en la circunferencia de **radio r** y **centro (h, k)** si y sólo si

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2.$$

De este resultado, se puede ver que la forma estándar de la ecuación de una circunferencia *con centro en el origen*, $(h, k) = (0, 0)$, es simplemente

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Circunferencia con centro en el origen

Ejemplo 8 Hallar la ecuación de una circunferencia

El punto $(3, 4)$ está en una circunferencia cuyo centro está en $(-1, 2)$, como se ilustra en la Figura 1.26. Escriba la forma estándar de la ecuación de esta circunferencia.

Solución

El radio de la circunferencia es la distancia entre $(-1, 2)$ y $(3, 4)$.

$$r = \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2}$$

Fórmula de la distancia

$$= \sqrt{[3 - (-1)]^2 + (4 - 2)^2}$$

Sustituir x, y, h y k .

$$= \sqrt{4^2 + 2^2}$$

Simplificar.

$$= \sqrt{16 + 4}$$

Simplificar.

$$= \sqrt{20}$$

Radio

Usando $(h, k) = (-1, 2)$ y $r = \sqrt{20}$, la ecuación de la circunferencia es

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Ecuación de la circunferencia

$$[x - (-1)]^2 + (y - 2)^2 = (\sqrt{20})^2$$

Sustituir h, k y r .

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 20.$$

Forma estándar

PUNTO de repaso

Ahora trate de hacer el Ejercicio 73.

Tip de estudio

Usted debe desarrollar el hábito de usar al menos dos métodos para resolver cualquier problema. Esto ayuda a su intuición y a comprobar que sus respuestas son razonables.

Aplicación

En este curso, aprenderá que hay numerosas formas de abordar un problema. En el Ejemplo 9 se ilustran tres métodos comunes.

Un *método numérico*: construya y use una tabla.

Un *método gráfico*: trace y use una gráfica.

Un *método algebraico*: use las reglas de álgebra.

Ejemplo 9 **Peso recomendado**

El peso mediano recomendado y (en libras) para hombres de constitución mediana, de entre 25 y 59 años de edad, se puede calcular con el modelo matemático

$$y = 0.073x^2 - 6.99x + 289.0, \quad 62 \leq x \leq 76$$

donde x es la estatura del hombre (en pulgadas). (Fuente: Metropolitan Life Insurance Company)

- Construya una tabla de valores que muestre los pesos medianos recomendados para hombres con estaturas de 62, 64, 66, 68, 70, 72, 74 y 76 pulgadas.
- Use la tabla de valores para trazar una gráfica del modelo. A continuación use la gráfica para calcular *gráficamente* el peso mediano recomendado para un hombre cuya estatura es 71 pulgadas.
- Use el modelo para confirmar *algebraicamente* el cálculo que usted encontró en el inciso (b).



Estatura, x	Peso, y
62	136.2
64	140.6
66	145.6
68	151.2
70	157.4
72	164.2
74	171.5
76	179.4

Solución

- Puede usar una calculadora para completar la tabla como se muestra a la izquierda.
- La tabla de valores puede usarse para trazar la gráfica de la ecuación, como se muestra en la Figura 1.27. Con base en la gráfica puede estimarse que una estatura de 71 pulgadas corresponde a un peso de 161 libras, aproximadamente.

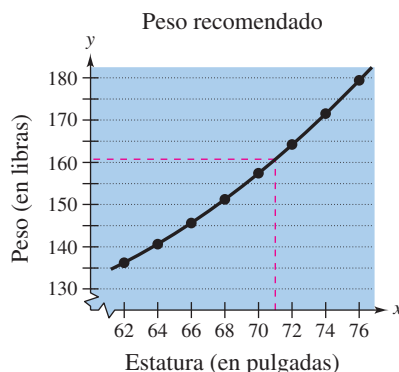


FIGURA 1.27

- Para confirmar algebraicamente el cálculo hallado en el inciso (b), se puede sustituir 71 por x en el modelo.

$$y = 0.073(71)^2 - 6.99(71) + 289.0 \approx 160.70$$

Entonces, el cálculo gráfico de 161 libras es muy bueno.

PUNTO de repaso

Ahora trate de hacer el Ejercicio 87.

1.2 EJERCICIOS

VOCABULARIO: Llene los espacios en blanco.

- Un par ordenado (a, b) es un _____ de una ecuación con x y y si la ecuación es verdadera cuando a se sustituya por x y b se sustituya por y .
- El conjunto de todos los puntos de solución de una ecuación es la _____ de la ecuación.
- Los puntos en los que una gráfica interseca o corta un eje se denominan las _____ de la gráfica.
- Una gráfica es simétrica respecto al _____ si, siempre que (x, y) está en la gráfica, $(-x, y)$ también lo está.
- La ecuación $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ es la forma estándar de la ecuación de una _____ con centro _____ y radio _____.
- Cuando se construya y use una tabla para resolver un problema se usa un método _____.

HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 7-14, determine si cada punto se encuentra en la gráfica de la ecuación.

Ecuación	Puntos	
7. $y = \sqrt{x + 4}$	(a) $(0, 2)$	(b) $(5, 3)$
8. $y = \sqrt{5 - x}$	(a) $(1, 2)$	(b) $(5, 0)$
9. $y = x^2 - 3x + 2$	(a) $(2, 0)$	(b) $(-2, 8)$
10. $y = 4 - x - 2 $	(a) $(1, 5)$	(b) $(6, 0)$
11. $y = x - 1 + 2$	(a) $(2, 3)$	(b) $(-1, 0)$
12. $2x - y - 3 = 0$	(a) $(1, 2)$	(b) $(1, -1)$
13. $x^2 + y^2 = 20$	(a) $(3, -2)$	(b) $(-4, 2)$
14. $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2$	(a) $(2, -\frac{16}{3})$	(b) $(-3, 9)$

En los Ejercicios 15-18, complete la tabla. Use los puntos de solución resultantes para trazar la gráfica de la ecuación.

15. $y = -2x + 5$

x	-1	0	1	2	$\frac{5}{2}$
y					
(x, y)					

16. $y = \frac{3}{4}x - 1$

x	-2	0	1	$\frac{4}{3}$	2
y					
(x, y)					

17. $y = x^2 - 3x$

x	-1	0	1	2	3
y					
(x, y)					

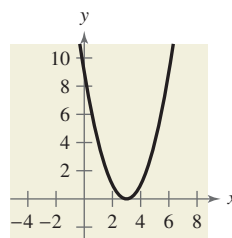
En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

18. $y = 5 - x^2$

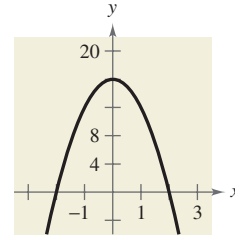
x	-2	-1	0	1	2
y					
(x, y)					

En los Ejercicios 19-22, gráficamente calcule las intersecciones con los ejes x y y de la gráfica. Verifique algebraicamente sus resultados.

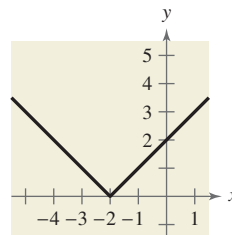
19. $y = (x - 3)^2$



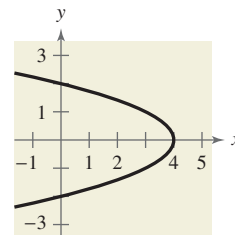
20. $y = 16 - 4x^2$



21. $y = |x + 2|$



22. $y^2 = 4 - x$



En los Ejercicios 23-32, encuentre las intersecciones con los ejes x y y de la gráfica de la ecuación.

23. $y = 5x - 6$

24. $y = 8 - 3x$

25. $y = \sqrt{x + 4}$

26. $y = \sqrt{2x - 1}$

27. $y = |3x - 7|$

28. $y = -|x + 10|$

29. $y = 2x^3 - 4x^2$

30. $y = x^4 - 25$

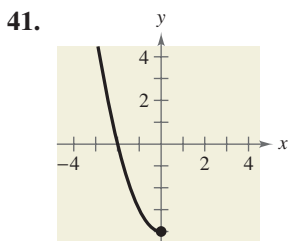
31. $y^2 = 6 - x$

32. $y^2 = x + 1$

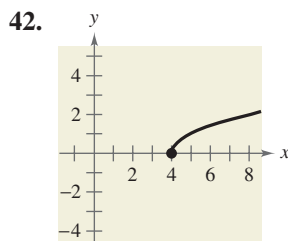
En los Ejercicios 33-40, use las pruebas algebraicas para verificar simetría respecto a ambos ejes y el origen.

33. $x^2 - y = 0$ 34. $x - y^2 = 0$
 35. $y = x^3$ 36. $y = x^4 - x^2 + 3$
 37. $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ 38. $y = \frac{1}{x^2 + 1}$
 39. $xy^2 + 10 = 0$ 40. $xy = 4$

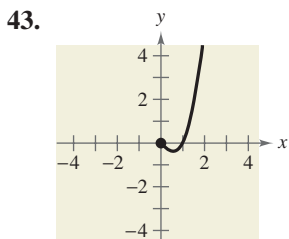
En los Ejercicios 41-44, suponga que la gráfica tiene el tipo de simetría indicado. Trace completa la gráfica de la ecuación. Para imprimir una copia ampliada de la gráfica, visite el sitio web www.mathgraphs.com.



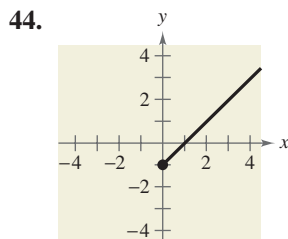
simetría con el eje y



simetría con el eje x



simetría con el origen



simetría con el eje y

En los Ejercicios 45-56, identifique cualesquiera intersecciones con los ejes y pruebe simetría. A continuación, trace la gráfica de la ecuación.

45. $y = -3x + 1$ 46. $y = 2x - 3$
 47. $y = x^2 - 2x$ 48. $y = -x^2 - 2x$
 49. $y = x^3 + 3$ 50. $y = x^3 - 1$
 51. $y = \sqrt{x - 3}$ 52. $y = \sqrt{1 - x}$
 53. $y = |x - 6|$ 54. $y = 1 - |x|$
 55. $x = y^2 - 1$ 56. $x = y^2 - 5$

En los Ejercicios 57-68, use una calculadora de gráficas para graficar la ecuación. Use un ajuste estándar. Aproxime cualesquiera intersecciones con los ejes.

57. $y = 3 - \frac{1}{2}x$ 58. $y = \frac{2}{3}x - 1$
 59. $y = x^2 - 4x + 3$ 60. $y = x^2 + x - 2$
 61. $y = \frac{2x}{x - 1}$ 62. $y = \frac{4}{x^2 + 1}$
 63. $y = \sqrt[3]{x} + 2$ 64. $y = \sqrt[3]{x + 1}$

El símbolo indica un ejercicio o parte de uno en el que se le pide que use una calculadora de gráficas.

65. $y = x\sqrt{x + 6}$ 66. $y = (6 - x)\sqrt{x}$
 67. $y = |x + 3|$ 68. $y = 2 - |x|$

En los Ejercicios 69-76, escriba la forma estándar de la ecuación de la circunferencia con las características dadas.

69. Centro: (0, 0); radio: 4
 70. Centro: (0, 0); radio: 5
 71. Centro: (2, -1); radio: 4
 72. Centro: (-7, -4); radio: 7
 73. Centro: (-1, 2); punto solución: (0, 0)
 74. Centro: (3, -2); punto solución: (-1, 1)
 75. Puntos extremos de un diámetro: (0, 0), (6, 8)
 76. Puntos extremos de un diámetro: (-4, -1), (4, 1)

En los Ejercicios 77-82, encuentre el centro y radio de la circunferencia y trace su gráfica.

77. $x^2 + y^2 = 25$ 78. $x^2 + y^2 = 16$
 79. $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 9$ 80. $x^2 + (y - 1)^2 = 1$
 81. $(x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{9}{4}$
 82. $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = \frac{16}{9}$

83. DEPRECIACIÓN Un hospital compra una nueva máquina para imágenes de resonancia magnética en \$500 000 dólares. El valor depreciado y (valor reducido) después de t años está dado por $y = 500\,000 - 40\,000t$, $0 \leq t \leq 8$. Trace la gráfica de la ecuación.

84. CONSUMISMO Una persona compra un vehículo para todo terreno (ATV) en \$8000. El valor depreciado y después de t años está dado por $y = 8000 - 900t$, $0 \leq t \leq 6$. Trace la gráfica de la ecuación.

85. GEOMETRÍA Un campo de juego reglamentario de la NFL (incluidas las zonas de extremo) de longitud x y ancho y tiene un perímetro de $346\frac{2}{3}$, o sea, $\frac{1040}{3}$ yardas.

- (a) Trace un rectángulo que dé una representación visual del problema. Use las variables especificadas para marcar los lados del rectángulo.
 (b) Demuestre que el ancho del rectángulo es $y = \frac{520}{3} - x$ y su área es $A = x\left(\frac{520}{3} - x\right)$.
 (c) Use una calculadora de gráficas para graficar la ecuación del área. Asegúrese de ajustar la imagen en la pantalla de la calculadora.
 (d) De la gráfica del inciso (c), calcule las dimensiones del rectángulo que produzca un área máxima.
 (e) Use la biblioteca de su escuela, el internet o alguna otra fuente de consulta para hallar las dimensiones y área reales de un campo de juego de la NFL, y compare sus hallazgos con los resultados del inciso (d).



86. GEOMETRÍA Un campo de fútbol soccer de longitud x y ancho y tiene un perímetro de 360 metros.

- Trace un rectángulo que dé una representación visual del problema. Use las variables especificadas para marcar los lados del rectángulo.
- Demuestre que el ancho del rectángulo es $y = 180 - x$ y su área es $A = x(180 - x)$.
- Use una calculadora de gráficas para graficar la ecuación del área. Asegúrese de ajustar la imagen en la pantalla de la calculadora.
- De la gráfica del inciso (c), calcule las dimensiones del rectángulo que dará un área máxima.
- Use la biblioteca de su escuela, el internet o alguna otra fuente de consulta para hallar las dimensiones y área reales de un campo de juego de la Major League Soccer, y compare sus hallazgos con los resultados del inciso (d).

87. ESTADÍSTICAS DE POBLACIÓN La tabla siguiente muestra las expectativas de vida de un niño (al nacer) en Estados Unidos, para los años seleccionados de 1920 a 2000. (Fuente: U.S. National Center for Health Statistics)



Año	Expectativa de vida, y
1920	54.1
1930	59.7
1940	62.9
1950	68.2
1960	69.7
1970	70.8
1980	73.7
1990	75.4
2000	77.0

Un modelo para la expectativa de vida durante este periodo es

$$y = -0.0025t^2 + 0.574t + 44.25, \quad 20 \leq t \leq 100$$

donde y representa la expectativa de vida y t es el tiempo en años, con $t = 20$ correspondiente a 1920.



- Use una calculadora de gráficas para graficar los datos de la tabla y el modelo en la misma pantalla. ¿Qué tan bien se ajusta el modelo a los datos? Explique.
- Determine la expectativa de vida en 1990 tanto gráfica como algebraicamente.
- Use la gráfica para determinar el año cuando la expectativa de vida era alrededor de 76.0. Verifique algebraicamente su respuesta.
- Una proyección para la expectativa de vida de un niño nacido en 2015 es 78.9. ¿Cómo se compara esto con la proyección dada en el modelo?

- ¿Piensa usted que este modelo se puede usar para predecir la expectativa de vida de un niño dentro de 50 años? Explique.

88. ELECTRÓNICA La resistencia y (en ohms) de 1000 pies de alambre sólido de cobre a 68 grados Fahrenheit puede calcularse con el siguiente modelo

$$y = \frac{10770}{x^2} - 0.37, \quad 5 \leq x \leq 100$$

donde x es el diámetro del alambre en mils (0.001 de pulgada). (Fuente: American Wire Gage)

- Complete la tabla.

x	5	10	20	30	40	50
y						

x	60	70	80	90	100
y					

- Use la tabla de valores del inciso (a) para trazar una gráfica del modelo. A continuación use su gráfica para calcular la resistencia cuando $x = 85.5$.
- Use el modelo para confirmar algebraicamente el cálculo que encontró en el inciso (b).
- ¿Qué se puede concluir en general acerca de la relación entre el diámetro del alambre de cobre y la resistencia?

EXPLORACIÓN

89. PIÉNSELO Encuentre a y b si la gráfica de $y = ax^2 + bx^3$ es simétrica respecto a (a) el eje y y (b) al origen. (Hay muchas respuestas correctas.)

90. TOQUE FINAL Relacione la ecuación o ecuaciones con las características dadas.

- $y = 3x^3 - 3x$
- $y = (x + 3)^2$
- $y = 3x - 3$
- $y = \sqrt[3]{x}$
- $y = 3x^2 + 3$
- $y = \sqrt{x + 3}$

- Simétrica respecto al eje y
- Tres intersecciones con el eje x
- Simétrica respecto al eje x
- $(-2, 1)$ es un punto sobre la gráfica
- Simétrica respecto al origen
- La gráfica pasa por el origen

1.3 ECUACIONES LINEALES CON DOS VARIABLES

Lo que debe aprender

- Usar la pendiente para graficar ecuaciones lineales con dos variables.
- Encontrar la pendiente de una recta dados dos puntos sobre ésta.
- Escribir ecuaciones lineales con dos variables.
- Usar la pendiente para identificar rectas paralelas y perpendiculares.
- Usar la pendiente y ecuaciones lineales con dos variables para modelar y resolver problemas reales.

Por qué debe aprenderlo

Las ecuaciones lineales con dos variables se pueden usar para modelar y resolver problemas reales. Por ejemplo, en el Ejercicio 129 de la página 36 se ve una ecuación lineal para modelar inscripciones de estudiantes en la Pennsylvania State University.

Uso de la pendiente

El modelo matemático más sencillo para relacionar dos variables es la **ecuación lineal con dos variables** $y = mx + b$. La ecuación se llama *lineal* porque su gráfica es una recta. (En matemáticas, el término *línea* quiere decir una *línea recta*.) Si hacemos $x = 0$, obtenemos

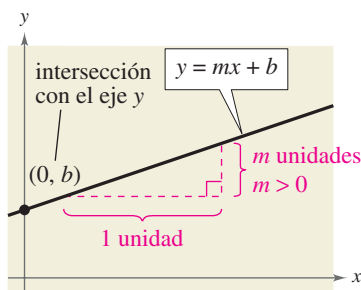
$$\begin{aligned} y &= m(0) + b && \text{Sustituir 0 por } x. \\ &= b. \end{aligned}$$

Entonces, la recta corta el eje y en $y = b$, como se muestra en la Figura 1.28. En otras palabras, la intersección con el eje y es $(0, b)$. La pendiente de la recta es m .

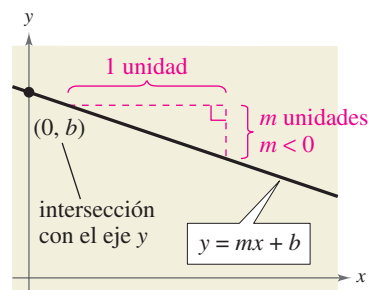
$$y = mx + b$$

↑ Pendiente ↑ Intersección con el eje y

La **pendiente** de una recta no vertical es el número de unidades que la recta sube (o baja) verticalmente por cada unidad de cambio horizontal de izquierda a derecha, como se ve en las Figuras 1.28 y 1.29.



Pendiente positiva, la recta sube
FIGURA 1.28



Pendiente negativa, la recta baja
FIGURA 1.29

Se dice que una ecuación lineal en la forma $y = mx + b$ está escrita en **forma pendiente-intersección con el eje y** .

Forma pendiente-intersección de la ecuación de una recta

La gráfica de la ecuación

$$y = mx + b$$

es una recta cuya pendiente es m y cuya intersección con el eje y es $(0, b)$.

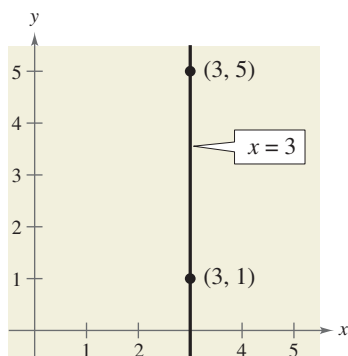


FIGURA 1.30 La pendiente no está definida

Una vez determinada la pendiente y la intersección con el eje y de una recta, es relativamente más sencillo trazar su gráfica. En el siguiente ejemplo, nótese que ninguna de las rectas es vertical. Una recta vertical tiene una ecuación de la forma

$$x = a.$$

Recta vertical

La ecuación de una recta vertical no se puede escribir en la forma $y = mx + b$ porque la pendiente de una recta vertical no está definida, como se indica en la Figura 1.30.

Ejemplo 1 Graficar una ecuación lineal

Trace la gráfica de cada una de las siguientes ecuaciones lineales.

a. $y = 2x + 1$

b. $y = 2$

c. $x + y = 2$

Solución

a. Como $b = 1$, la intersección con el eje y es $(0, 1)$. Además, como la pendiente es $m = 2$, la recta sube dos unidades por cada unidad que la recta se mueva a la derecha, como se ve en la Figura 1.31.

b. Al escribir esta ecuación en la forma $y = (0)x + 2$, se puede ver que la intersección con el eje y es $(0, 2)$ y la pendiente es cero. Una pendiente cero implica que la recta es horizontal, es decir, no sube *ni* baja, como se ve en la Figura 1.32.

c. Al escribir esta ecuación en forma pendiente-intersección

$$x + y = 2$$

Escribir la ecuación original.

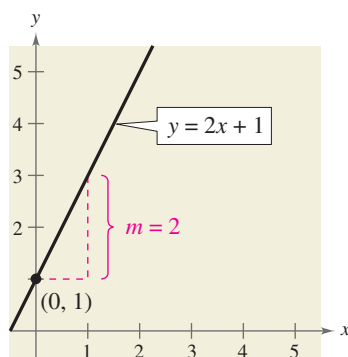
$$y = -x + 2$$

Restar x de cada lado.

$$y = (-1)x + 2$$

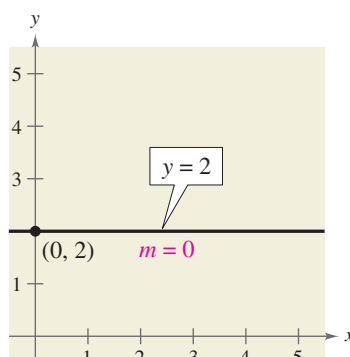
Escribir en forma pendiente-intersección.

se puede ver que la intersección con el eje y es $(0, 2)$. Además, como la pendiente es $m = -1$, la recta *baja* una unidad por cada unidad que la recta se mueva a la derecha, como se muestra en la Figura 1.33.



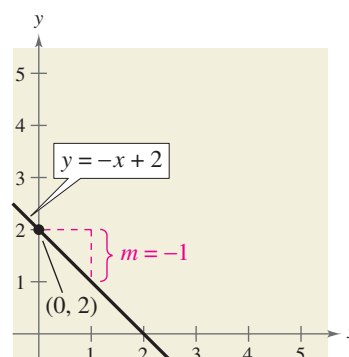
Cuando m es positiva, la recta sube

FIGURA 1.31



Cuando m es 0, la recta es horizontal

FIGURA 1.32



Cuando m es negativa, la recta baja

FIGURA 1.33

PUNTO de repaso

Ahora trate de hacer el Ejercicio 17.

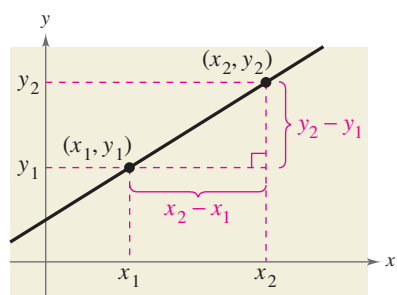


FIGURA 1.34

Hallar la pendiente de una recta

Dada una ecuación de una recta, se puede hallar su pendiente si se escribe en forma pendiente-intersección. Si no nos dan una ecuación, aún es posible hallar la pendiente de una recta. Supongamos que se desea hallar la pendiente de la recta que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) , como se ve en la Figura 1.34. Al moverse de izquierda a derecha a lo largo de esta recta, un cambio de $(y_2 - y_1)$ unidades en dirección vertical corresponde a un cambio de $(x_2 - x_1)$ unidades en dirección horizontal.

$$y_2 - y_1 = \text{el cambio en } y = \text{elevación}$$

$$x_2 - x_1 = \text{el cambio en } x = \text{corrimiento}$$

La razón $(y_2 - y_1)$ a $(x_2 - x_1)$ representa la pendiente de la recta que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) .

$$\begin{aligned} \text{Pendiente} &= \frac{\text{cambio en } y}{\text{cambio en } x} \\ &= \frac{\text{elevación}}{\text{corrimiento}} \\ &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \end{aligned}$$

Pendiente de una recta que pasa por dos puntos

La **pendiente** m de la recta no vertical que pasa por (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

donde $x_1 \neq x_2$.

Cuando esta fórmula se usa para la pendiente, el orden de sustracción es importante. Dados dos puntos sobre una recta, tenemos libertad de marcar cualquiera de ellos como (x_1, y_1) y el otro como (x_2, y_2) , pero, una vez hecho esto, se debe formar el numerador y el denominador usando el mismo orden de sustracción.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Correcto

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

Correcto

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2}$$

Incorrecto

Por ejemplo, la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(3, 4)$ y $(5, 7)$ se puede calcular como

$$m = \frac{7 - 4}{5 - 3} = \frac{3}{2}$$

o bien, invirtiendo el orden de sustracción en numerador y denominador, como

$$m = \frac{4 - 7}{3 - 5} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

Ejemplo 2 Hallar la pendiente de una recta que pasa por dos puntos

Encuentre la pendiente de la recta que pasa por cada par de puntos.

- a. $(-2, 0)$ y $(3, 1)$ b. $(-1, 2)$ y $(2, 2)$
 c. $(0, 4)$ y $(1, -1)$ d. $(3, 4)$ y $(3, 1)$

Solución

- a. Haciendo $(x_1, y_1) = (-2, 0)$ y $(x_2, y_2) = (3, 1)$, resulta una pendiente de

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - 0}{3 - (-2)} = \frac{1}{5}. \quad \text{Vea Figura 1.35.}$$

- b. La pendiente de la recta que pasa por $(-1, 2)$ y $(2, 2)$ es

$$m = \frac{2 - 2}{2 - (-1)} = \frac{0}{3} = 0. \quad \text{Vea Figura 1.36.}$$

- c. La pendiente de la recta que pasa por $(0, 4)$ y $(1, -1)$ es

$$m = \frac{-1 - 4}{1 - 0} = \frac{-5}{1} = -5. \quad \text{Vea Figura 1.37.}$$

- d. La pendiente de la recta que pasa por $(3, 4)$ y $(3, 1)$ es

$$m = \frac{1 - 4}{3 - 3} = \frac{-3}{0}. \quad \text{Vea Figura 1.38.}$$

Como la división entre 0 no está definida, la pendiente tampoco lo está y la recta es vertical.

Ayuda de álgebra

Para hallar las pendientes del Ejemplo 2, es necesario que el estudiante pueda evaluar expresiones racionales. En el Apéndice A.4 se pueden repasar las técnicas para ello.

Tip de estudio

En las Figuras 1.35 a 1.38, nótese las relaciones entre la pendiente y la orientación de la recta.

- a. Pendiente positiva: la recta sube de izquierda a derecha
 b. Pendiente cero: la recta es horizontal
 c. Pendiente negativa: la recta baja de izquierda a derecha
 d. Pendiente no definida: la recta es vertical

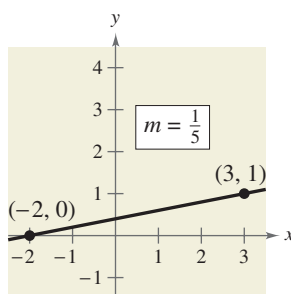


FIGURA 1.35

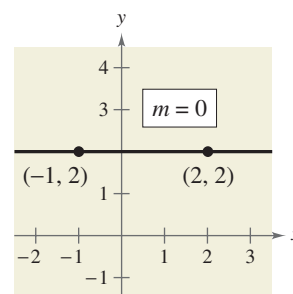


FIGURA 1.36

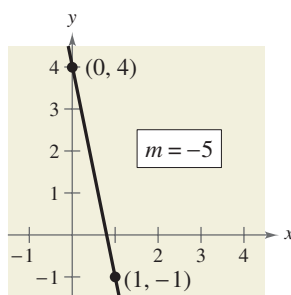


FIGURA 1.37

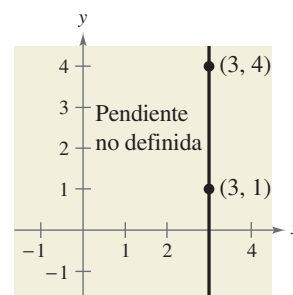


FIGURA 1.38

PUNTO de repaso ➔ Ahora trate de hacer el Ejercicio 31.

Escribir ecuaciones lineales con dos variables

Si (x_1, y_1) es un punto sobre la recta de pendiente m y (x, y) es *cualquier otro* punto sobre la recta, entonces

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m.$$

Esta ecuación, en la que aparecen las variables x y y , se puede reescribir en la forma

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

que es la forma **punto-pendiente** de la ecuación de una recta.

Forma punto-pendiente de la ecuación de una recta

La ecuación de la recta con pendiente m que pasa por el punto (x_1, y_1) es

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

La forma punto-pendiente es más útil para *hallar* la ecuación de una recta. El estudiante debe recordarla.

Ejemplo 3 Usar la forma punto-pendiente

Encuentre la forma punto-pendiente de la ecuación de la recta que tiene una pendiente de 3 y pasa por el punto $(1, -2)$.

Solución

Use la forma punto-pendiente con $m = 3$ y $(x_1, y_1) = (1, -2)$.

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \text{Forma punto-pendiente}$$

$$y - (-2) = 3(x - 1) \quad \text{Sustituir por } m, x_1 \text{ y } y_1.$$

$$y + 2 = 3x - 3 \quad \text{Simplificar.}$$

$$y = 3x - 5 \quad \text{Escribir en forma pendiente-intersección.}$$

La forma pendiente-intersección de la ecuación de la recta es $y = 3x - 5$. La gráfica de esta recta se ilustra en la Figura 1.39.

PUNTO de repaso ➔ Ahora trate de hacer el Ejercicio 51.

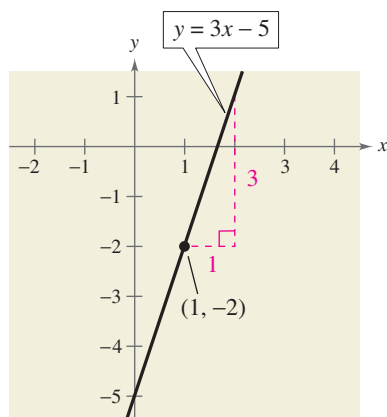


FIGURA 1.39

Tip de estudio

Cuando encuentre una ecuación de la recta que pase por dos puntos determinados, sólo necesita sustituir las coordenadas de uno de los puntos en la forma punto-pendiente. No importa cuál punto se escoja porque ambos darán el mismo resultado.

La forma punto-pendiente se puede usar para hallar una ecuación de la recta que pase por dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) . Para hacer esto, primero encuentre la pendiente de la recta

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad x_1 \neq x_2$$

y a continuación use la forma punto-pendiente para obtener la ecuación

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1). \quad \text{Forma de dos puntos}$$

Esto a veces se conoce como **forma de dos puntos** de la ecuación de una recta.

Rectas paralelas y perpendiculares

La pendiente se puede usar para determinar si dos rectas no verticales en un plano son paralelas, perpendiculares o ninguna de ellas.

Rectas paralelas y perpendiculares

1. Dos rectas no verticales son **paralelas** si y sólo si sus pendientes son iguales. Esto es, $m_1 = m_2$.
2. Dos rectas no verticales son **perpendiculares** si y sólo si sus pendientes son recíprocas no negativas entre sí. Esto es, $m_1 = -1/m_2$.

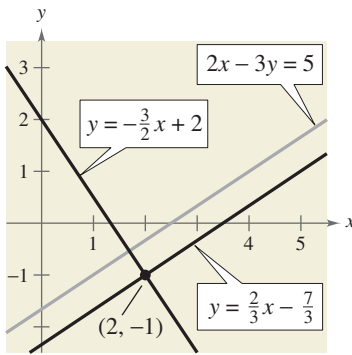


FIGURA 1.40

Ejemplo 4 Hallar rectas paralelas y perpendiculares

Encuentre las formas pendiente-intersección de las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto $(2, -1)$ y son (a) paralelas y (b) perpendiculares a la recta $2x - 3y = 5$.

Solución

Escribiendo la ecuación de la recta dada en forma pendiente-intersección

$$2x - 3y = 5$$

Escribir la ecuación original.

$$-3y = -2x + 5$$

Restar $2x$ de cada lado.

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$$

Escribir en forma pendiente-intersección.

se puede ver que tiene una pendiente de $m = \frac{2}{3}$, como se muestra en la Figura 1.40.

- a. Cualquier recta paralela a la recta dada también debe tener una pendiente de $\frac{2}{3}$. Por tanto, la recta que pasa por $(2, -1)$ que es paralela a la recta dada tiene la siguiente ecuación.

$$y - (-1) = \frac{2}{3}(x - 2)$$

Escribir en forma punto-pendiente.

$$3(y + 1) = 2(x - 2)$$

Multiplicar cada lado por 3.

$$3y + 3 = 2x - 4$$

Propiedad distributiva

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{7}{3}$$

Escribir en forma pendiente-intersección.

- b. Cualquier recta perpendicular a la recta dada debe tener una pendiente de $-\frac{3}{2}$ (porque $-\frac{3}{2}$ es el recíproco negativo de $\frac{2}{3}$). Entonces, la recta que pasa por $(2, -1)$ que es perpendicular a la recta dada tiene la siguiente ecuación.

$$y - (-1) = -\frac{3}{2}(x - 2)$$

Escribir en forma punto-pendiente.

$$2(y + 1) = -3(x - 2)$$

Multiplicar cada lado por 2.

$$2y + 2 = -3x + 6$$

Propiedad distributiva

$$y = -\frac{3}{2}x + 2$$

Escribir en forma pendiente-intersección.

PUNTO de repaso → Ahora trate de hacer el Ejercicio 87.

Nótese en el Ejemplo 4 cómo se usa la forma pendiente-intersección para obtener información acerca de la gráfica de una recta, mientras que la forma punto-pendiente se usa para escribir la ecuación de una recta.

TECNOLOGÍA

En una calculadora de gráficas, las rectas no parecerán tener la pendiente correcta a menos que use una pantalla que tenga ajuste cuadrado. Por ejemplo, trate de graficar las rectas del Ejemplo 4 usando el ajuste estándar $-10 \leq x \leq 10$ y $-10 \leq y \leq 10$. A continuación reajuste la pantalla con el ajuste cuadrado de $-9 \leq x \leq 9$ y $-6 \leq y \leq 6$. ¿En cuál ajuste parecen perpendiculares las rectas $y = \frac{2}{3}x - \frac{7}{3}$ y $y = -\frac{3}{2}x + 2$?

Aplicaciones

En problemas reales, la pendiente de una recta se puede interpretar como una *razón* o *tasa*. Si el eje x y el eje y tienen la misma unidad de medida, entonces la pendiente no tiene unidades y es una **razón**. Si el eje x y el eje y tienen diferentes unidades de medida, entonces la pendiente es una **tasa** o **razón de cambio**.

Ejemplo 5 Usar una pendiente como razón

La máxima pendiente recomendada en una rampa para sillas de ruedas es $\frac{1}{12}$. Un negocio está instalando una rampa para sillas de ruedas que sube 22 pulgadas sobre una longitud horizontal de 24 pies. ¿La rampa está más inclinada que lo recomendado? (Fuente: *Americans with Disabilities Act Handbook*)

Solución

La longitud horizontal de la rampa es 24 pies, o sea $12(24) = 288$ pulgadas, como se ve en la Figura 1.41. Entonces, la pendiente de la rampa es

$$\text{Pendiente} = \frac{\text{cambio vertical}}{\text{cambio horizontal}} = \frac{22 \text{ in.}}{288 \text{ in.}} \approx 0.076.$$

Como $\frac{1}{12} \approx 0.083$, la pendiente de la rampa no está más inclinada que lo recomendado.

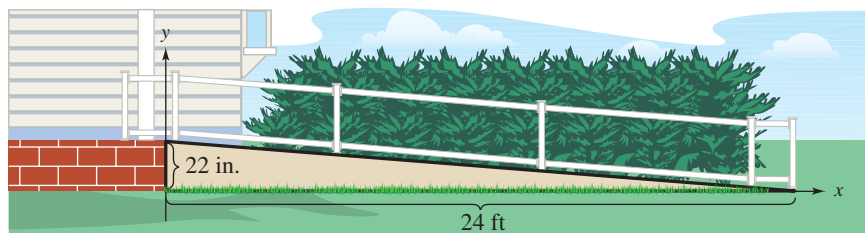


FIGURA 1.41

PUNTO de repaso ➔ Ahora trate de hacer el Ejercicio 115.

Ejemplo 6 Usar la pendiente como razón de cambio

Una compañía fabricante de aparatos de cocina determina que el costo total en dólares de producir x unidades de una licuadora es

$$C = 25x + 3500. \quad \text{Ecuación de costo}$$

Describe el significado práctico de la intersección con el eje y y la pendiente de esta recta.

Solución

La intersección con el eje y $(0, 3500)$ nos dice que el costo de producir cero unidades es \$3500. Éste es el *costo fijo* de producción que incluye costos que deben ser pagados cualquiera que sea el número de unidades producidas. La pendiente de $m = 25$ nos dice que el costo de producir cada unidad es \$25, como se ve en la Figura 1.42. Los economistas llaman *costo marginal* al costo por unidad. Si la producción aumenta en una unidad, entonces el “margen”, o cantidad extra de costo, es \$25. Entonces, el costo aumenta a razón de \$25 por unidad.

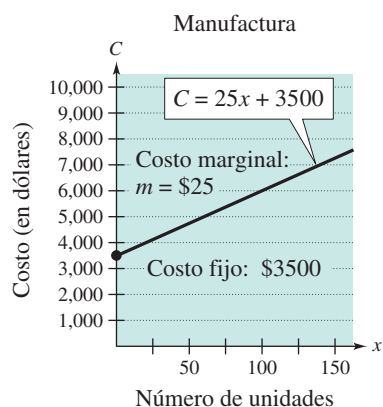


FIGURA 1.42 Costo de producción

PUNTO de repaso ➔ Ahora trate de hacer el Ejercicio 119.

Casi todos los gastos empresariales se pueden deducir en el mismo año en que ocurren. Una excepción es el costo de propiedad, que tiene una vida útil de más de 1 año. Estos costos deben *depreciarse* (disminuir de valor) en la vida útil de la propiedad. Si la *misma cantidad* se deprecia cada año, el procedimiento recibe el nombre de *depreciación lineal* o *en línea recta*. El *valor en libros* es la diferencia entre el valor original y la cantidad total de depreciación acumulada a la fecha.

Ejemplo 7

Depreciación en línea recta

Un colegio compró equipo para hacer ejercicios valuado en \$12 000 para el nuevo centro de acondicionamiento físico del plantel. El equipo tiene una vida útil de 8 años. El valor recuperado al término de los 8 años es de \$2000. Escriba una ecuación lineal que describa el valor en libros del equipo en cada año.

Solución

Representemos con V el valor del equipo al término del año t . Se puede representar el valor inicial del equipo con el punto de datos $(0, 12\,000)$ y el valor recuperado del equipo por el punto de datos $(8, 2000)$. La pendiente de la recta es

$$m = \frac{2000 - 12\,000}{8 - 0} = -\$1250$$

que representa la depreciación anual en *dólares por año*. Usando la forma punto-pendiente se puede escribir la ecuación de la recta como sigue.

$$V - 12\,000 = -1250(t - 0)$$

Escribir en forma punto-pendiente.

$$V = -1250t + 12\,000$$

Escribir en forma pendiente-intersección.

La tabla muestra el valor en libros al término de cada año, y la gráfica de la ecuación se muestra en la Figura 1.43.

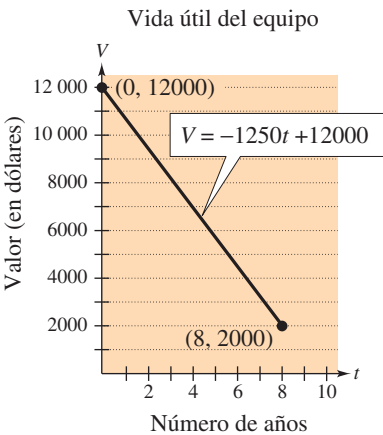


FIGURA 1.43 Depreciación en línea recta

Año, t	Valor, V
0	12 000
1	10 750
2	9500
3	8250
4	7000
5	5750
6	4500
7	3250
8	2000

PUNTO de repaso

Ahora trate de hacer el Ejercicio 121.

En numerosas aplicaciones prácticas, los dos puntos de datos que determinan la recta a veces se dan en forma disfrazada. Observe la forma en que los puntos de datos se describen en el Ejemplo 7.

Ejemplo 8 Pronosticar ventas

Las ventas de Best Buy fueron alrededor de \$35 900 millones de dólares en 2006 y \$40 000 millones en 2007. Usando sólo esta información, escriba una ecuación lineal que dé las ventas (en miles de millones de dólares) en términos del año. A continuación pronostique las ventas para 2010. (Fuente: Best Buy Company, Inc.)

Solución

Con $t = 6$ represente 2006. Entonces los dos valores dados están representados por los puntos de datos $(6, 35.9)$ y $(7, 40.0)$. La pendiente de la recta que pasa por estos puntos es

$$m = \frac{40.0 - 35.9}{7 - 6} = 4.1.$$

Usando la forma punto-pendiente, se puede hallar que la ecuación que relaciona las ventas y y el año t es

$$y - 35.9 = 4.1(t - 6) \quad \text{Escribir en forma punto-pendiente.}$$

$$y = 4.1t + 11.3. \quad \text{Escribir en forma pendiente-intersección.}$$

De acuerdo con esta ecuación, las ventas para 2010 serán de

$$y = 4.1(10) + 11.3 = 41 + 11.3 = \$52.3 \text{ mil millones. (Vea Figura 1.44.)}$$

PUNTO de repaso Ahora trate de hacer el Ejercicio 129.

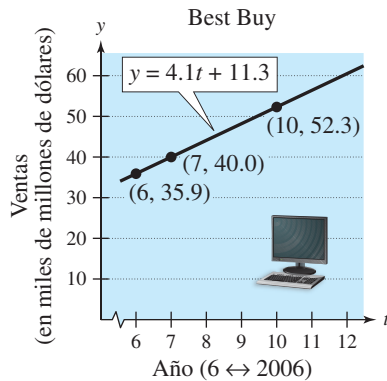
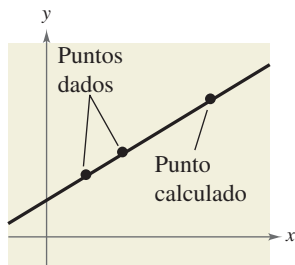
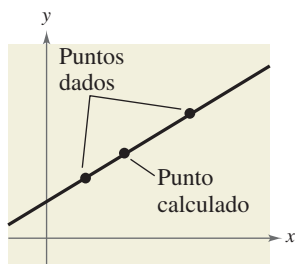


FIGURA 1.44



Extrapolación lineal
FIGURA 1.45



Interpolación lineal
FIGURA 1.46

El método de predicción ilustrado en el Ejemplo 8 se denomina **extrapolación lineal**. Nótese en la Figura 1.45 que un punto extrapolado no está entre los puntos dados. Cuando el punto estimado se encuentra entre dos puntos dados, como se muestra en la Figura 1.46, el procedimiento recibe el nombre de **interpolación lineal**.

Como la pendiente de una recta vertical no está definida, su ecuación no se puede escribir en forma pendiente-intersección. No obstante, toda recta tiene una ecuación que se puede escribir en la **forma general**

$$Ax + By + C = 0 \quad \text{Forma general}$$

donde A y B son diferentes de cero. Por ejemplo, la recta vertical dada por $x = a$ puede ser representada por la forma general $x - a = 0$.

Resumen de ecuaciones de rectas

- | | |
|----------------------------------|--|
| 1. Forma general: | $Ax + By + C = 0$ |
| 2. Recta vertical: | $x = a$ |
| 3. Recta horizontal: | $y = b$ |
| 4. Forma pendiente-intersección: | $y = mx + b$ |
| 5. Forma punto-pendiente: | $y - y_1 = m(x - x_1)$ |
| 6. Forma de dos puntos: | $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ |

1.3 EJERCICIOS

VOCABULARIO

En los Ejercicios 1-7, llene los espacios en blanco.

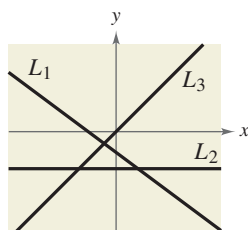
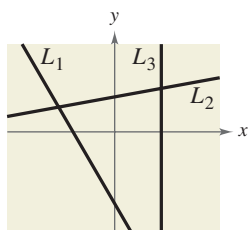
1. El modelo matemático más sencillo para relacionar dos variables es la ecuación _____ con dos variables $y = mx + b$.
2. Para una recta, la razón entre el cambio en y y el cambio en x se denomina _____ de la recta.
3. Dos rectas son _____ si y sólo si sus pendientes son iguales.
4. Dos rectas son _____ si y sólo si sus pendientes son recíprocas negativas entre sí.
5. Cuando el eje x y el eje y tienen diferentes unidades de medida, la pendiente se puede interpretar como _____.
6. El método de predicción _____ es el método empleado para calcular un punto en una recta cuando el punto no se encuentra entre los puntos dados.
7. Toda recta tiene una ecuación que se puede escribir en forma de _____.
8. Relacione cada una de las ecuaciones siguientes de una recta con su forma.

(a) $Ax + By + C = 0$	(i) Recta vertical
(b) $x = a$	(ii) Forma pendiente-intersección
(c) $y = b$	(iii) Forma general
(d) $y = mx + b$	(iv) Forma punto-pendiente
(e) $y - y_1 = m(x - x_1)$	(v) Recta horizontal

HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 9 y 10, identifique la recta que tiene cada pendiente.

9. (a) $m = \frac{2}{3}$
(b) m no está definida.
(c) $m = -2$
10. (a) $m = 0$
(b) $m = -\frac{3}{4}$
(c) $m = 1$



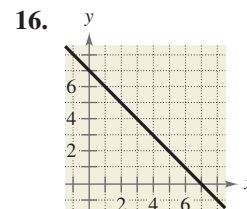
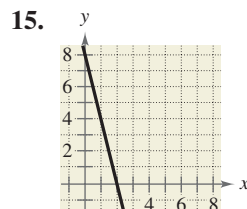
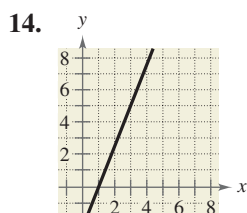
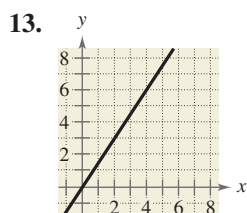
En los Ejercicios 11 y 12, trace las rectas que pasan por el punto con las pendientes indicadas, en el mismo conjunto de ejes de coordenadas.

Punto

Pendientes

11. (2, 3) (a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) -3
12. (-4, 1) (a) 3 (b) -3 (c) $\frac{1}{2}$ (d) No definida

En los Ejercicios 13-16, calcule la pendiente de la recta.



En los Ejercicios 17-28, encuentre la pendiente y la intersección con el eje y (si es posible) de la ecuación de la recta. Trace la recta.

17. $y = 5x + 3$
18. $y = x - 10$
19. $y = -\frac{1}{2}x + 4$
20. $y = -\frac{3}{2}x + 6$
21. $5x - 2 = 0$
22. $3y + 5 = 0$
23. $7x + 6y = 30$
24. $2x + 3y = 9$
25. $y - 3 = 0$
26. $y + 4 = 0$
27. $x + 5 = 0$
28. $x - 2 = 0$

En los Ejercicios 29-40, grafique los puntos y encuentre la pendiente de la recta que pasa por el par de puntos.

29. (0, 9), (6, 0)
30. (12, 0), (0, -8)
31. (-3, -2), (1, 6)
32. (2, 4), (4, -4)
33. (5, -7), (8, -7)
34. (-2, 1), (-4, -5)
35. (-6, -1), (-6, 4)
36. (0, -10), (-4, 0)
37. $(\frac{11}{2}, -\frac{4}{3}), (-\frac{3}{2}, -\frac{1}{3})$
38. $(\frac{7}{8}, \frac{3}{4}), (\frac{5}{4}, -\frac{1}{4})$
39. (4.8, 3.1), (-5.2, 1.6)
40. (-1.75, -8.3), (2.25, -2.6)

En los Ejercicios 41-50, use el punto sobre la recta y la pendiente m de ésta para hallar tres puntos adicionales por los que pasa la recta. (Hay numerosas respuestas correctas.)

41. $(2, 1)$, $m = 0$ 42. $(3, -2)$, $m = 0$
 43. $(5, -6)$, $m = 1$ 44. $(10, -6)$, $m = -1$
 45. $(-8, 1)$, m no está definida.
 46. $(1, 5)$, m no está definida.
 47. $(-5, 4)$, $m = 2$ 48. $(0, -9)$, $m = -2$
 49. $(7, -2)$, $m = \frac{1}{2}$ 50. $(-1, -6)$, $m = -\frac{1}{2}$

En los Ejercicios 51-64, encuentre la forma pendiente-intersección de la ecuación de la recta que pasa por el punto dado y tiene la pendiente indicada m . Trace la recta.

51. $(0, -2)$, $m = 3$ 52. $(0, 10)$, $m = -1$
 53. $(-3, 6)$, $m = -2$ 54. $(0, 0)$, $m = 4$
 55. $(4, 0)$, $m = -\frac{1}{3}$ 56. $(8, 2)$, $m = \frac{1}{4}$
 57. $(2, -3)$, $m = -\frac{1}{2}$ 58. $(-2, -5)$, $m = \frac{3}{4}$
 59. $(6, -1)$, m no está definida.
 60. $(-10, 4)$, m no está definida.
 61. $(4, \frac{5}{2})$, $m = 0$ 62. $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$, $m = 0$
 63. $(-5.1, 1.8)$, $m = 5$ 64. $(2.3, -8.5)$, $m = -2.5$

En los Ejercicios 65-78, encuentre la forma pendiente-intersección de la ecuación de la recta que pasa por los puntos. Trace la recta.

65. $(5, -1)$, $(-5, 5)$ 66. $(4, 3)$, $(-4, -4)$
 67. $(-8, 1)$, $(-8, 7)$ 68. $(-1, 4)$, $(6, 4)$
 69. $(2, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, \frac{5}{4})$ 70. $(1, 1)$, $(6, -\frac{2}{3})$
 71. $(-\frac{1}{10}, -\frac{3}{5})$, $(\frac{9}{10}, -\frac{9}{5})$ 72. $(\frac{3}{4}, \frac{3}{2})$, $(-\frac{4}{3}, \frac{7}{4})$
 73. $(1, 0.6)$, $(-2, -0.6)$ 74. $(-8, 0.6)$, $(2, -2.4)$
 75. $(2, -1)$, $(\frac{1}{3}, -1)$ 76. $(\frac{1}{5}, -2)$, $(-6, -2)$
 77. $(\frac{7}{3}, -8)$, $(\frac{7}{3}, 1)$ 78. $(1.5, -2)$, $(1.5, 0.2)$

En los Ejercicios 79-82, determine si las rectas son paralelas, perpendiculares o ninguna de ellas.

79. $L_1: y = \frac{1}{3}x - 2$ 80. $L_1: y = 4x - 1$
 $L_2: y = \frac{1}{3}x + 3$ $L_2: y = 4x + 7$
 81. $L_1: y = \frac{1}{2}x - 3$ 82. $L_1: y = -\frac{4}{5}x - 5$
 $L_2: y = -\frac{1}{2}x + 1$ $L_2: y = \frac{5}{4}x + 1$

En los Ejercicios 83-86, determine si las rectas L_1 y L_2 que pasan por los pares de puntos son paralelas, perpendiculares o ninguna de ellas.

83. $L_1: (0, -1)$, $(5, 9)$ 84. $L_1: (-2, -1)$, $(1, 5)$
 $L_2: (0, 3)$, $(4, 1)$ $L_2: (1, 3)$, $(5, -5)$

85. $L_1: (3, 6)$, $(-6, 0)$ 86. $L_1: (4, 8)$, $(-4, 2)$
 $L_2: (0, -1)$, $(5, \frac{7}{3})$ $L_2: (3, -5)$, $(-1, \frac{1}{3})$

En los Ejercicios 87-96, escriba las formas pendiente-intersección de las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto dado (a) paralelo a la recta dada y (b) perpendicular a la recta dada.

87. $4x - 2y = 3$, $(2, 1)$ 88. $x + y = 7$, $(-3, 2)$
 89. $3x + 4y = 7$, $(-\frac{2}{3}, \frac{7}{8})$ 90. $5x + 3y = 0$, $(\frac{7}{8}, \frac{3}{4})$
 91. $y + 3 = 0$, $(-1, 0)$ 92. $y - 2 = 0$, $(-4, 1)$
 93. $x - 4 = 0$, $(3, -2)$ 94. $x + 2 = 0$, $(-5, 1)$
 95. $x - y = 4$, $(2.5, 6.8)$
 96. $6x + 2y = 9$, $(-3.9, -1.4)$

En los Ejercicios 97-102, use la *forma de intersección* con los ejes para hallar la ecuación de la recta con las intersecciones dadas. La forma de intersección con los ejes de la ecuación de una recta con intersecciones $(a, 0)$ y $(0, b)$ es

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0.$$

97. intersección x : $(2, 0)$ 98. intersección x : $(-3, 0)$
 intersección y : $(0, 3)$ intersección y : $(0, 4)$
 99. intersección x : $(-\frac{1}{6}, 0)$ 100. intersección x : $(\frac{2}{3}, 0)$
 intersección y : $(0, -\frac{2}{3})$ intersección y : $(0, -2)$
 101. Punto en la recta: $(1, 2)$
 intersección x : $(c, 0)$
 intersección y : $(0, c)$, $c \neq 0$
 102. Punto en la recta: $(-3, 4)$
 intersección x : $(d, 0)$
 intersección y : $(0, d)$, $d \neq 0$



ANÁLISIS GRÁFICO En los Ejercicios 103-106, identifique cualesquiera relaciones que existan entre las rectas y, a continuación, utilice una calculadora de gráficas para graficar las tres ecuaciones en la misma ventana de observación. Ajuste la ventana para que la pendiente aparezca visualmente correcta, es decir, de modo que las rectas paralelas parezcan paralelas y las rectas perpendiculares parezcan intersectarse en ángulos rectos.

103. (a) $y = 2x$ (b) $y = -2x$ (c) $y = \frac{1}{2}x$
 104. (a) $y = \frac{2}{3}x$ (b) $y = -\frac{3}{2}x$ (c) $y = \frac{2}{3}x + 2$
 105. (a) $y = -\frac{1}{2}x$ (b) $y = -\frac{1}{2}x + 3$ (c) $y = 2x - 4$
 106. (a) $y = x - 8$ (b) $y = x + 1$ (c) $y = -x + 3$

En los Ejercicios 107-110, encuentre la relación entre x y y tal que (x, y) sea equidistante (la misma distancia) desde los dos puntos.

107. $(4, -1)$, $(-2, 3)$ 108. $(6, 5)$, $(1, -8)$
 109. $(3, \frac{5}{2})$, $(-7, 1)$ 110. $(-\frac{1}{2}, -4)$, $(\frac{7}{2}, \frac{5}{4})$

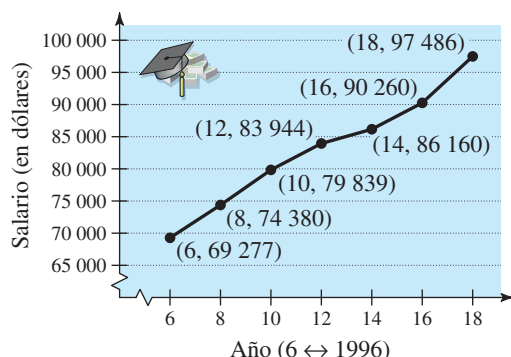
111. VENTAS Las siguientes son las pendientes de rectas que representan ventas anuales y en términos de tiempo x en años. Use las pendientes para interpretar cualquier cambio en las ventas anuales para un aumento de un año en tiempo.

- (a) La recta tiene una pendiente de $m = 135$.
- (b) La recta tiene una pendiente de $m = 0$.
- (c) La recta tiene una pendiente de $m = -40$.

112. INGRESOS Las siguientes son las pendientes de rectas que representan ingresos diarios y en términos de tiempo x en días. Use las pendientes para interpretar cualquier cambio en los ingresos diarios para aumento de un día en tiempo.

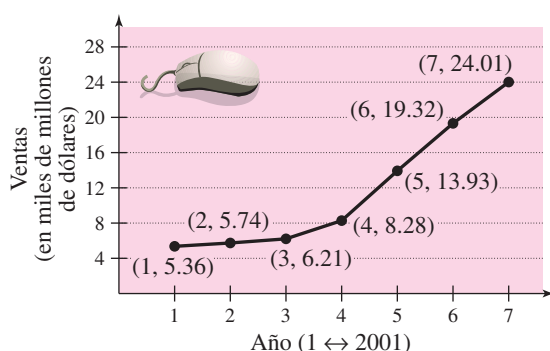
- (a) La recta tiene una pendiente de $m = 400$.
- (b) La recta tiene una pendiente de $m = 100$.
- (c) La recta tiene una pendiente de $m = 0$.

113. SALARIO PROMEDIO La gráfica muestra los salarios promedio para directores decanos de preparatoria, de 1996 a 2008. (Fuente: Educational Research Service)



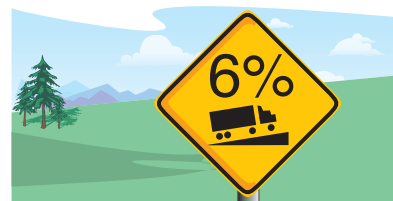
- (a) Use las pendientes de los segmentos de recta para determinar los periodos en los que el salario promedio aumentó lo más y lo menos.
- (b) Encuentre la pendiente del segmento de recta que enlaza los puntos para los años 1996 y 2008.
- (c) Interprete el significado de la pendiente del inciso (b) en el contexto del problema.

114. VENTAS La gráfica muestra las ventas (en miles de millones de dólares) de Apple Inc. para los años 2001 a 2007. (Fuente: Apple Inc.)



- (a) Use las pendientes de los segmentos de recta para determinar los años en los que las ventas mostraron el aumento máximo y mínimo.
- (b) Encuentre la pendiente del segmento de recta que enlaza los puntos para los años 2001 y 2007.
- (c) Interprete el significado de la pendiente del inciso (b) en el contexto del problema.

115. PENDIENTE EN UNA CARRETERA Una persona conduce un vehículo en una carretera que tiene una cuesta de 6% (vea figura). Esto significa que la cuesta de la carretera es $\frac{6}{100}$. Calcule la variación vertical en su posición si recorre 200 pies.



116. PENDIENTE EN UNA CARRETERA Desde una carretera en lo alto de una montaña, un topógrafo toma varias mediciones horizontales x y varias mediciones verticales y , como se muestra en la tabla (x y y se miden en pies).

x	300	600	900	1200	1500	1800	2100
y	-25	-50	-75	-100	-125	-150	-175

- (a) Trace una gráfica de dispersión de los datos.
- (b) Utilice una regla para trazar la recta que usted piensa que mejor se ajusta a los datos.
- (c) Encuentre una ecuación para la recta que trazó en el inciso (b).
- (d) Interprete el significado de la pendiente de la recta en el inciso (c) en el contexto del problema.
- (e) El topógrafo necesita poner un señalamiento en la carretera que indique lo empinado de ésta. Por ejemplo, un topógrafo pondría un señalamiento que indicara "pendiente de 8%" en una carretera con una pendiente descendente de $-\frac{8}{100}$. ¿Qué debe indicar el señalamiento de la carretera en este problema?

VARIACIÓN En los Ejercicios 117 y 118, nos dan el valor en dólares de un producto en 2010 y la tasa que se espera cambie durante los siguientes 5 años. Use esta información para escribir una ecuación lineal que dé el valor V en dólares del producto, en términos del año t . (Represente 2010 con $t = 10$.)

	Valor en 2010	Tasa
117.	\$2540	\$125 de reducción por año
118.	\$156	\$4.50 de aumento por año

- 119. DEPRECIACIÓN** El valor V de una máquina moldeadora t años después de adquirirla es

$$V = -4000t + 58\,500, \quad 0 \leq t \leq 5.$$

Explique lo que miden la intersección con V y la pendiente.

- 120. COSTO** El costo C de producir n bolsas para laptops está dado por

$$C = 1.25n + 15\,750, \quad 0 < n.$$

Explique lo que miden la intersección con C y la pendiente.

- 121. DEPRECIACIÓN** Una pequeña tienda compra un horno para pizzas usado en \$875. Después de 5 años, el horno tendrá que cambiarse. Escriba una ecuación lineal que dé el valor V del equipo durante los 5 años que estará en uso.

- 122. DEPRECIACIÓN** Un distrito escolar compra una impresora de alto volumen, copiadora y escáner en \$25 000. Después de 10 años, el equipo tendrá que cambiarse. Se espera que su valor en ese tiempo sea de \$2000. Escriba una ecuación lineal que dé el valor V del equipo durante los 10 años que estará en uso.

- 123. VENTAS** Una tienda de descuento está ofreciendo un 20% de rebaja en todos los artículos. Escriba una ecuación lineal que dé el precio de venta S para un artículo con precio de lista L .

- 124. SALARIO POR HORA** Un fabricante de microchips paga \$12.25 por hora a sus trabajadores de la línea de ensamble. Además, los trabajadores reciben la cantidad de \$0.75 por unidad producida. Escriba una ecuación lineal para hallar el sueldo por hora W en términos del número de unidades x producidas por hora.

- 125. SALARIO MENSUAL** Un vendedor farmacéutico recibe un salario mensual de \$2500 más una comisión de 7% de ventas. Escriba una ecuación lineal para hallar el sueldo mensual W del vendedor, en términos de las ventas mensuales V .

- 126. COSTOS DE NEGOCIOS** Un representante de ventas de una compañía, que usa un auto personal, recibe \$120 por día por alojamiento y comidas más \$0.55 por milla recorrida. Escriba una ecuación lineal que dé el costo diario C a la compañía en términos de x , el número de millas recorridas.

- 127. FLUJO DE DINERO POR ACCIÓN** El flujo de dinero por acción para la Timberland Co. fue de \$1.21 en 1999 y \$1.46 en 2007. Escriba una ecuación lineal que dé el flujo de dinero por acción en términos del año. Represente 1999 con $t = 9$. A continuación pronostique el flujo de dinero para los años 2012 y 2014. (Fuente: The Timberland Co.)

- 128. NÚMERO DE TIENDAS** Para 2003 había 1078 tiendas J.C. Penney y en 2007 había 1067 tiendas. Escriba una ecuación lineal que dé el número de tiendas en términos del año.

ba una ecuación lineal que dé el número de tiendas en términos del año. Represente 2003 con $t = 3$. A continuación pronostique el número de tiendas para los años 2012 y 2014. ¿Sus respuestas son razonables? Explique. (Fuente: J.C. Penney Co.)

- 129. INSCRIPCIONES EN UNA UNIVERSIDAD** La Universidad de Pennsylvania tuvo inscripciones de 40 571 estudiantes en 2000 y 44 112 estudiantes en 2008 en su plantel principal en University Park, Pennsylvania. (Fuente: Penn State Fact Book)

- (a) Suponiendo que el crecimiento de inscripciones sea lineal, encuentre un modelo lineal que dé las inscripciones en términos del año t , donde $t = 0$ corresponde a 2000.
- (b) Use su modelo del inciso (a) para pronosticar la inscripción en 2010 y 2015.
- (c) ¿Cuál es la pendiente de su modelo? Explique su significado en el contexto de la situación.

- 130. INSCRIPCIÓN EN UNA UNIVERSIDAD** La Universidad de Florida tuvo inscripciones de 46 107 estudiantes en 2000 y 51 413 estudiantes en 2008. (Fuente: University of Florida)

- (a) ¿Cuál es el promedio de cambio anual en inscripción de 2000 a 2008?
- (b) Use el promedio de cambio anual en inscripciones para calcular las inscripciones en 2002, 2004 y 2006.
- (c) Escriba la ecuación de una recta que represente los datos dados en términos del año t , donde $t = 0$ corresponde a 2000. ¿Cuál es la pendiente? Interprete la pendiente en el contexto del problema.
- (d) Usando los resultados de los incisos (a)-(c), escriba un breve párrafo que discuta los conceptos de *pendiente* y *razón de cambio promedio*.

- 131. COSTO, INGRESO Y UTILIDAD** Un contratista de impermeabilizaciones compra en \$42 000 un camión repartidor de tejas con elevador de tejas. El vehículo requiere un promedio de gasto de \$6.50 por hora en combustible y mantenimiento, y al operador se le pagan \$11.50 por hora.

- (a) Escriba una ecuación lineal que dé el costo total C de operar este equipo durante t horas. (Incluya el costo de compra del equipo.)
- (b) Suponiendo que a los clientes se les cobren \$30 por hora de uso de la máquina, escriba una ecuación para hallar el ingreso R derivado de t horas de uso.
- (c) Use la fórmula de la utilidad

$$P = R - C$$

para escribir una ecuación para obtener la utilidad derivada de t horas de uso.

- (d) Use la fórmula del inciso (c) para hallar el punto de equilibrio, es decir, el número de horas que este equipo debe usarse para dar una utilidad de 0 dólares.

132. DEMANDA DE RENTAS Una oficina de bienes raíces maneja un complejo de departamentos con 50 unidades. Cuando la renta por unidad es de \$580 por mes, las 50 unidades están ocupadas. No obstante, cuando la renta es de \$625 por mes, el número promedio de unidades ocupadas baja a 47. Suponga que la relación entre la renta mensual p y la demanda x es lineal.

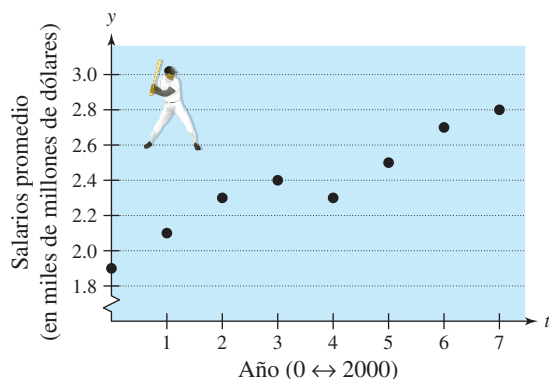
- Escriba la ecuación de la recta que dé la demanda x en términos de la renta p .
- Use la ecuación para pronosticar el número de unidades ocupadas cuando la renta sea de \$655.
- Pronostique el número de unidades ocupadas cuando la renta sea de \$595.



133. GEOMETRÍA El largo y ancho de un jardín rectangular son 15 y 10 metros, respectivamente. Un pasillo de ancho x rodea el jardín.

- Trace un diagrama que dé una representación visual del problema.
- Escriba la ecuación para hallar el perímetro y del pasillo en términos de x .
- Use calculadora de gráficas para graficar la ecuación para hallar el perímetro.
- Determine la pendiente de la gráfica del inciso (c). Por cada metro adicional de aumento en el ancho del pasillo, determine el aumento en su perímetro.

134. PROMEDIO DE SALARIO ANUAL Los salarios promedio (en millones de dólares) de jugadores de béisbol de las Ligas Mayores de 2000 a 2007 se muestran en la gráfica de dispersión. Encuentre la ecuación de la recta que usted piense que mejor se ajusta a estos datos. (Con y represente el salario promedio y con t represente el año, donde $t = 0$ corresponde a 2000.) (Fuente: Major League Baseball Players Association)



135. ANÁLISIS DE DATOS: NÚMERO DE DOCTORES

El número y de doctores de medicina osteopática (en miles) en Estados Unidos, de 2000 a 2008, donde x es el año, se muestra como puntos de datos (x, y) . (Fuente: American Osteopathic Association)

(2000, 44.9), (2001, 47.0), (2002, 49.2), (2003, 51.7), (2004, 54.1), (2005, 56.5), (2006, 58.9), (2007, 61.4), (2008, 64.0)

- Trace una gráfica de dispersión de los datos. Haga que $x = 0$ corresponda a 2000.
- Use una regla para trazar la recta que usted piense que se ajusta mejor a los datos.
- Encuentre la ecuación de la recta del inciso (b). Explique el procedimiento que utilizó.
- Escriba un breve párrafo que explique los significados de la pendiente y la intersección con el eje y de la recta, en términos de los datos.
- Compare los valores obtenidos usando su modelo con los valores reales.
- Use su modelo para calcular el número de doctores de medicina osteopática en 2012.

136. ANÁLISIS DE DATOS: PROMEDIO DE CALIFICACIONES

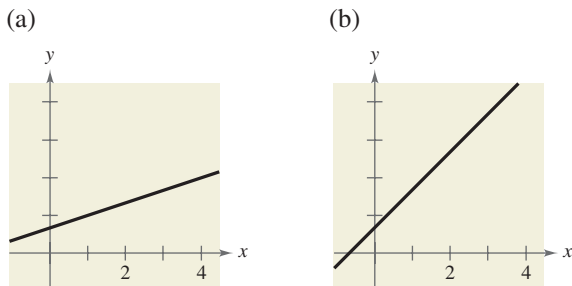
Un profesor aplica cuestionarios regulares de 20 puntos y exámenes de 100 puntos en un curso de álgebra. Las calificaciones promedio de seis estudiantes, dadas como puntos de datos (x, y) , donde x son calificaciones promedio del cuestionario y y son las calificaciones promedio del examen, son (18, 87), (10, 55), (19, 96), (16, 79), (13, 76) y (15, 82). [Nota: Hay numerosas respuestas correctas para los incisos (b)–(d).]

- Trace una gráfica de dispersión de los datos.
- Use una regla para trazar la recta que usted piense que mejor se ajusta a los datos.
- Encuentre una ecuación para la recta que trazó en el inciso (b).
- Use la ecuación del inciso (c) para calcular el promedio de calificaciones de examen para una persona con promedio de calificación de cuestionario de 17.
- El profesor agrega 4 puntos al promedio de calificaciones de examen de cada estudiante en la clase. Describa los cambios en las posiciones de los puntos localizados y el cambio en la ecuación de la recta.

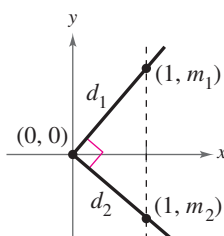
EXPLORACIÓN

¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 137 y 138, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

137. Una recta con pendiente de $-\frac{5}{7}$ es más empinada que una recta con pendiente de $-\frac{6}{7}$.
138. La recta que pasa por $(-8, 2)$ y $(-1, 4)$ y la recta que pasa por $(0, -4)$ y $(-7, 7)$ son paralelas.
139. Explique cómo demostraría que los puntos $A(2, 3)$, $B(2, 9)$ y $C(4, 3)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.
140. Explique por qué se dice que la pendiente de una recta vertical no está definida.
141. Con la información mostrada en las gráficas, ¿es posible determinar la pendiente de cada recta? ¿Es posible que las rectas puedan tener la misma pendiente? Explique.

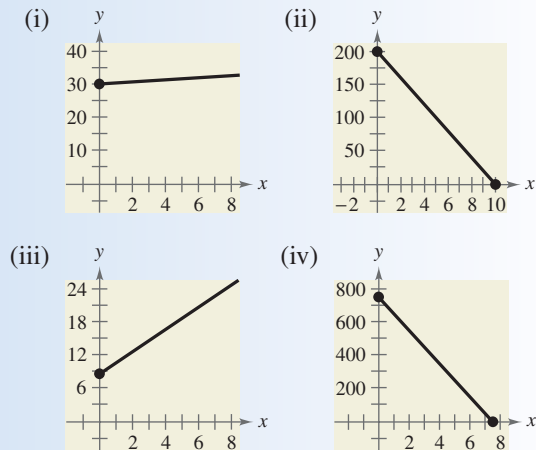


142. Las pendientes de dos rectas son -4 y $\frac{5}{2}$. ¿Cuál es más empinada? Explique.
143. Use calculadora de gráficas para comparar las pendientes de las rectas $y = mx$, donde $m = 0.5, 1, 2$ y 4 . ¿Cuál recta sube más rápidamente? Ahora, sea $m = -0.5, -1, -2$ y -4 . ¿Cuál recta baja más rápidamente? Use un ajuste en cuadro para obtener una verdadera perspectiva geométrica. ¿Qué se puede concluir acerca de la pendiente y la “rapidez” a la que sube o baja la recta?
144. Encuentre d_1 y d_2 en términos de m_1 y m_2 , respectivamente (vea la figura). A continuación use el Teorema de Pitágoras para hallar una relación entre m_1 y m_2 .



145. **PIÉNSELO** ¿Es posible que dos rectas con pendientes positivas sean perpendiculares? Explique.

146. **TOQUE FINAL** Relacione la descripción de la situación con su gráfica. También determine la pendiente y la intersección con el eje y de cada gráfica, e interprete la pendiente y la intersección con el eje y en el contexto de la situación. [Las gráficas están marcadas (i), (ii), (iii) y (iv).]



- (a) Una persona está pagando \$20 por semana a un amigo para reembolsar un préstamo de \$200.
- (b) A un empleado le pagan \$8.50 por hora más \$2 por cada unidad producida por hora.
- (c) Un representante de ventas recibe \$30 por día por sus alimentos más \$0.32 por cada milla que recorra.
- (d) Una computadora comprada en \$750 se deprecia \$100 por año.

PROYECTO: CALIFICACIONES DE BACHILLER Para resolver una aplicación extendida que analiza los números de títulos de bachiller obtenidos por mujeres en Estados Unidos, de 1996 a 2007, visite el sitio web de este texto en academic.cengage.com. (Fuente de datos: U.S. National Center for Education Statistics)

1.4 FUNCIONES

Lo que debe aprender

- Determinar si las relaciones entre dos variables son funciones.
- Usar notación de funciones y evaluar funciones.
- Hallar los dominios de funciones.
- Usar funciones para modelar y resolver problemas reales.
- Evaluar diferencias de cocientes.

Por qué debe aprenderlo

Se pueden usar funciones para modelar y resolver problemas reales. Por ejemplo, en el Ejercicio 100 de la página 52 usaremos una función para modelar la fuerza del agua contra la cara de una represa.

Introducción a las funciones

Numerosos fenómenos que ocurren todos los días comprenden dos cantidades que están relacionadas entre sí por alguna regla de correspondencia. El término matemático para esa regla de correspondencia es **relación**. En matemáticas, es frecuente que las relaciones se representen con ecuaciones y fórmulas matemáticas. Por ejemplo, el interés simple I ganado por \$1000 en un año está relacionado con la tasa de interés anual r mediante la fórmula $I = 1000r$.

La fórmula $I = 1000r$ representa una clase especial de relación que compara cada elemento de un conjunto con *exactamente un* elemento de un conjunto diferente. Esa relación se denomina **función**.

Definición de función

Una **función** f de un conjunto A a un conjunto B es una relación que asigna a cada elemento x del conjunto A exactamente un elemento y del conjunto B . El conjunto A es el **dominio** (o conjunto de entradas) de la función f , y el conjunto B contiene el **rango** (o conjunto de salidas).

Para ayudar a entender esta definición, vea la función que relaciona la hora del día con la temperatura en la Figura 1.47.

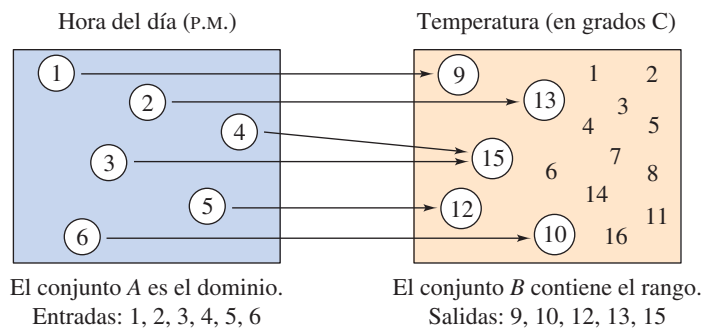


FIGURA 1.47

Esta función puede estar representada por los siguientes pares ordenados, en los que la primera coordenada (valor x) es la entrada y la segunda (valor y) es la salida.

$$\{(1, 9^\circ), (2, 13^\circ), (3, 15^\circ), (4, 15^\circ), (5, 12^\circ), (6, 10^\circ)\}$$

Características de una función del conjunto A al conjunto B

1. Cada elemento de A debe relacionarse con un elemento de B .
2. Algunos elementos de B pueden no relacionarse con algún elemento de A .
3. Dos o más elementos de A pueden relacionarse con el mismo elemento de B .
4. Un elemento de A (el dominio) no puede relacionarse con dos elementos diferentes de B .

En general, las funciones se representan de cuatro modos.

Cuatro modos para representar una función

1. *Verbalmente* por medio de una oración que describe la forma en que la variable de entrada está relacionada con la variable de salida
2. *Numéricamente* mediante una tabla o lista de pares ordenados que relacione los valores de entrada con los valores de salida
3. *Gráficamente* por medio de puntos en una gráfica en un plano de coordenadas, en el que los valores de entrada están representados por el eje horizontal y los valores de salida por el eje vertical
4. *Algebraicamente* mediante una ecuación con dos variables.

Para determinar si una relación es o no una función se debe establecer si cada valor de entrada está relacionado con exactamente un valor de salida. Si cualquier valor de entrada está relacionado con dos o más valores de salida, la relación no es una función.

Ejemplo 1 Prueba de funciones

Determine si la relación representa y como función de x .

- a. El valor de entrada x es el número de diputados de un estado, y el valor de salida y es el número de senadores.

b.

Entrada, x	Salida, y
2	11
2	10
3	8
4	5
5	1

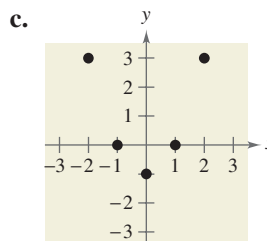


FIGURA 1.48

Solución

- a. Esta expresión verbal *describe* a y como función de x . Cualquiera que sea el valor de x , el valor de y siempre es 2. Esas funciones se denominan *funciones constantes*.
- b. Esta tabla *no describe* a y como función de x . El valor de entrada 2 está relacionado con dos valores diferentes de y .
- c. La gráfica de la Figura 1.48 *describe* a y como función de x . Cada valor de entrada está relacionado con exactamente un valor de salida.

PUNTO de repaso ➔ Ahora trate de hacer el Ejercicio 11.

Representar funciones por medio de conjuntos o pares ordenados es común en *matemáticas discretas*, pero en álgebra es más frecuente expresarlas mediante ecuaciones o fórmulas con dos variables. Por ejemplo, la ecuación

$$y = x^2 \quad \text{y es una función de } x.$$

representa la variable y como función de la variable x . En esta ecuación, x es la **varia-**

NOTA HISTÓRICA



© Bettmann/Corbis

Se considera que el suizo Leonhard Euler (1707-1783), ha sido el matemático más prolífico y productivo de la historia. Una de sus más grandes aportaciones en matemáticas fue su uso de símbolos, o notación. La notación de función $y = f(x)$ fue introducida por Euler.

ble independiente y y es la **variable dependiente**. El dominio de la función es el conjunto de todos los valores tomados por la variable independiente x , y el rango de la función es el conjunto de todos los valores tomados por la variable dependiente y .

Ejemplo 2 Prueba de funciones representadas algebraicamente

¿Cuál de las ecuaciones representa a y como función de x ?

a. $x^2 + y = 1$ b. $-x + y^2 = 1$

Solución

Para determinar si y es una función de x , trate de despejar y en términos de x .

a. Despejando y tendremos

$$x^2 + y = 1$$

Escribir la ecuación original.

$$y = 1 - x^2.$$

Despejar y .

A cada valor de x corresponde exactamente un valor de y . Entonces, y es una función de x .

b. Despejando y tendremos

$$-x + y^2 = 1$$

Escribir la ecuación original.

$$y^2 = 1 + x$$

Sumar x a cada lado.

$$y = \pm\sqrt{1 + x}.$$

Despejar y .

El signo $\pm$ indica que a un valor determinado de x corresponden dos valores de y . En consecuencia, y no es una función de x .

PUNTO de repaso ➔ Ahora trate de hacer el Ejercicio 21.

Notación de funciones

Cuando se usa una ecuación para representar una función es conveniente asignar un nombre a la función para que pueda consultarse fácilmente. Por ejemplo, sabemos que la ecuación $y = 1 - x^2$ describe a y como función de x . Supongamos que a esta función se le asigna el nombre de “ f .” Entonces se puede usar la siguiente **notación de función**.

Entrada	Salida	Ecuación
x	$f(x)$	$f(x) = 1 - x^2$

El símbolo $f(x)$ se lee como el *valor de f en x* o simplemente *f de x* . El símbolo $f(x)$ corresponde al valor y para una x determinada. Por tanto, se puede escribir $y = f(x)$. Recordemos que f es el *nombre* de la función, en tanto que $f(x)$ es el *valor* de la función en x . Por ejemplo, la función dada por

$$f(x) = 3 - 2x$$

tiene *valores de función* denotados por $f(-1)$, $f(0)$, $f(2)$, etcétera. Para hallar estos valores se sustituyen los valores de entrada especificados en la ecuación dada.

Para $x = -1$, $f(-1) = 3 - 2(-1) = 3 + 2 = 5$.

Para $x = 0$, $f(0) = 3 - 2(0) = 3 - 0 = 3$.

Para $x = 2$, $f(2) = 3 - 2(2) = 3 - 4 = -1$.

Aun cuando es frecuente que f se utilice como un nombre conveniente para una función y x se use como la variable independiente, se pueden usar otras letras. Por ejemplo,

$$f(x) = x^2 - 4x + 7, \quad f(t) = t^2 - 4t + 7 \quad \text{y} \quad g(s) = s^2 - 4s + 7$$

todas definen la misma función. En realidad, el papel de la variable independiente es la de un “ocupante de lugar”. En consecuencia, la función podría estar descrita por

$$f(\text{ }) = (\text{ })^2 - 4(\text{ }) + 7.$$

ATENCIÓN

En el Ejemplo 3, nótese que $g(x + 2)$ no es igual a $g(x) + g(2)$. En general, $g(u + v) \neq g(u) + g(v)$.

Ejemplo 3 Evaluar una función

Sea $g(x) = -x^2 + 4x + 1$. Encuentre cada uno de los valores de la función.

- a. $g(2)$ b. $g(t)$ c. $g(x + 2)$

Solución

- a. La sustitución de x con 2 en $g(x) = -x^2 + 4x + 1$ da lo siguiente.

$$g(2) = -(2)^2 + 4(2) + 1 = -4 + 8 + 1 = 5$$

- b. La sustitución de x con t da lo siguiente.

$$g(t) = -(t)^2 + 4(t) + 1 = -t^2 + 4t + 1$$

- c. La sustitución de x con $x + 2$ da lo siguiente.

$$\begin{aligned} g(x + 2) &= -(x + 2)^2 + 4(x + 2) + 1 \\ &= -(x^2 + 4x + 4) + 4x + 8 + 1 \\ &= -x^2 - 4x - 4 + 4x + 8 + 1 \\ &= -x^2 + 5 \end{aligned}$$

PUNTO de repaso ➔ Ahora trate de hacer el Ejercicio 41.

Una función definida por dos o más ecuaciones en un dominio especificado recibe el nombre de **función definida por tramos**.

Ejemplo 4 Una función definida por tramos

Evalúe la función cuando $x = -1, 0$ y 1 .

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 0 \\ x - 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

Solución

Como $x = -1$ es menor que 0, use $f(x) = x^2 + 1$ para obtener

$$f(-1) = (-1)^2 + 1 = 2.$$

Para $x = 0$, use $f(x) = x - 1$ para obtener

$$f(0) = (0) - 1 = -1.$$

Para $x = 1$, use $f(x) = x - 1$ para obtener

$$f(1) = (1) - 1 = 0.$$

PUNTO de repaso ➔ Ahora trate de hacer el Ejercicio 49.

Ayuda de álgebra

Para hacer los Ejemplos 5 y 6 es necesario que el estudiante pueda resolver ecuaciones. En el Apéndice A.5 puede repasar las técnicas de resolución de ecuaciones.

Ejemplo 5 Hallar valores para los cuales $f(x) = 0$

Encuentre todos los valores reales de x tales que $f(x) = 0$.

- a. $f(x) = -2x + 10$
 b. $f(x) = x^2 - 5x + 6$

Solución

Para cada una de las ecuaciones, haga $f(x) = 0$ y despeje x .

- a. $-2x + 10 = 0$ Hacer $f(x) = 0$.
 $-2x = -10$ Restar 10 de cada lado.
 $x = 5$ Dividir cada lado entre -2 .

Entonces, $f(x) = 0$ cuando $x = 5$.

- b. $x^2 - 5x + 6 = 0$ Hacer $f(x) = 0$.
 $(x - 2)(x - 3) = 0$ Factorizar.
 $x - 2 = 0$ Igualar a 0 el primer factor.
 $x - 3 = 0$ Igualar a 0 el segundo factor.

Entonces, $f(x) = 0$ cuando $x = 2$ o $x = 3$.

PUNTO de repaso → Ahora trate de hacer el Ejercicio 59.

Ejemplo 6 Hallar valores para los cuales $f(x) = g(x)$

Encuentre los valores de x para los que $f(x) = g(x)$.

- a. $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = 3x - x^2$
 b. $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = -x^2 + x + 2$

Solución

- a. $x^2 + 1 = 3x - x^2$ Hacer $f(x) = g(x)$.
 $2x^2 - 3x + 1 = 0$ Escribir en forma general.
 $(2x - 1)(x - 1) = 0$ Factorizar.
 $2x - 1 = 0$ Igualar a 0 el primer factor.
 $x - 1 = 0$ Igualar a 0 el segundo factor.

Entonces, $f(x) = g(x)$ cuando $x = \frac{1}{2}$ o $x = 1$.

- b. $x^2 - 1 = -x^2 + x + 2$ Hacer $f(x) = g(x)$.
 $2x^2 - x - 3 = 0$ Escribir en forma general.
 $(2x - 3)(x + 1) = 0$ Factorizar.
 $2x - 3 = 0$ Igualar a 0 el primer factor.
 $x + 1 = 0$ Igualar a 0 el segundo factor.

Entonces, $f(x) = g(x)$ cuando $x = \frac{3}{2}$ o $x = -1$.

PUNTO de repaso → Ahora trate de hacer el Ejercicio 67.

TECNOLOGÍA

Use calculadora de gráficas para graficar las funciones dadas por $y = \sqrt{4 - x^2}$ y $y = \sqrt{x^2 - 4}$. ¿Cuál es el dominio de cada función? ¿Se traslapan los dominios de estas dos funciones? Si es así, ¿para qué valores se traslapan los dominios?

El dominio de una función

Es posible describir explícitamente el dominio de una función o puede estar *implicado* por la expresión que se use para definir la función. El **dominio implicado** es el conjunto de todos los números reales para los cuales la expresión está definida. Por ejemplo, la función dada por

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$$

El dominio excluye valores de x que resulten en división entre cero.

tiene un dominio implicado formado por todos los valores reales de x que no sean $x = \pm 2$. Estos dos valores están excluidos del dominio porque la división entre cero no está definida. Otro tipo común de dominio implicado es el que se usa para evitar raíces pares de números negativos. Por ejemplo, la función dada por

$$f(x) = \sqrt{x}$$

El dominio excluye valores de x que resulten en raíces pares de números negativos.

está definida sólo para $x \geq 0$. Por tanto, su dominio implicado es el intervalo $[0, \infty)$. En general, el dominio de una función *excluye* valores que causarían división entre cero o que resultarían en la raíz par de un número negativo.

Ejemplo 7 Hallar el dominio de una función

Encuentre el dominio de cada función.

- a. $f: \{(-3, 0), (-1, 4), (0, 2), (2, 2), (4, -1)\}$ b. $g(x) = \frac{1}{x + 5}$
 c. Volumen de una esfera: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ d. $h(x) = \sqrt{4 - 3x}$

Solución

- a. El dominio de f está formado por todas las primeras coordenadas del conjunto de pares ordenados.

$$\text{Dominio} = \{-3, -1, 0, 2, 4\}$$

- b. Excluyendo valores de x que den cero en el denominador, el dominio de g es el conjunto de todos los números reales x excepto $x = -5$.

- c. Como esta función representa el volumen de una esfera, los valores del radio r deben ser positivos. Por tanto, el dominio es el conjunto de todos los números reales r tales que $r > 0$.

- d. Esta función está definida sólo para valores de x para los cuales

$$4 - 3x \geq 0.$$

Al resolver esta desigualdad, se puede concluir que $x \leq \frac{4}{3}$. Entonces, el dominio es el intervalo $(-\infty, \frac{4}{3}]$.

PUNTO de repaso ➔ Ahora trate de hacer el Ejercicio 73.

En el Ejemplo 7(c), nótese que el dominio de una función puede estar implicado por el contexto físico. Por ejemplo, en la ecuación

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

no habría razón para restringir r a valores positivos, pero el contexto físico implica que una esfera no puede tener un radio negativo o cero.

Ayuda de álgebra

En el Ejemplo 7(d), $4 - 3x \geq 0$ es una desigualdad lineal. En el Apéndice A.6 es posible hacer un repaso de las técnicas para resolver una desigualdad lineal.



FIGURA 1.49

Aplicaciones

Ejemplo 8 Dimensiones de un contenedor

Una persona trabaja en el departamento de ventas de una compañía embotelladora de bebidas y está experimentando con una nueva lata para té helado, que es ligeramente más angosta y más alta que la lata estándar. Para la lata experimental, la razón entre la altura y el radio es 4, como se ve en la Figura 1.49.

- Escriba el volumen de la lata como función del radio r .
- Escriba el volumen de la lata como función de la altura h .

Solución

a. $V(r) = \pi r^2 h = \pi r^2(4r) = 4\pi r^3$ Escribir V como función de r .

b. $V(h) = \pi \left(\frac{h}{4}\right)^2 h = \frac{\pi h^3}{16}$ Escribir V como función de h .

PUNTO de repaso → Ahora trate de hacer el Ejercicio 87.

Ejemplo 9 Trayectoria de una pelota de béisbol

Una pelota de béisbol es bateada en un punto a 3 pies sobre el nivel del suelo a una velocidad de 100 pies por segundo y a un ángulo de 45° . La trayectoria de la pelota está dada por la función

$$f(x) = -0.0032x^2 + x + 3$$

donde x y $f(x)$ se miden en pies. ¿La pelota rebasará una cerca de 10 pies situada a 300 pies desde el plato de home?

Solución algebraica

Cuando $x = 300$, puede hallar la altura de la bola como sigue.

$$f(x) = -0.0032x^2 + x + 3 \quad \text{Escribir la ecuación original.}$$

$$f(300) = -0.0032(300)^2 + 300 + 3 \quad \text{Sustituir 300 por } x.$$

$$= 15 \quad \text{Simplificar.}$$

Cuando $x = 300$, la altura de la pelota es de 15 pies, de modo que la pelota rebasará una cerca de 10 pies.

Solución gráfica

Use calculadora de gráficas para graficar la función $y = -0.0032x^2 + x + 3$. Use la función de valor o las funciones **zoom** y **trace** de la calculadora para calcular que $y = 15$ cuando $x = 300$, como se ve en la Figura 1.50. Por tanto, la pelota rebasará la cerca de 10 pies.

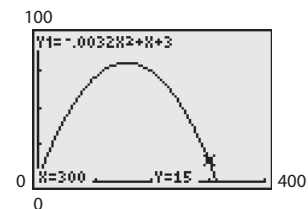


FIGURA 1.50

PUNTO de repaso → Ahora trate de hacer el Ejercicio 93.

En la ecuación del Ejemplo 9, la altura de la pelota es una función de la distancia desde el plato de home.

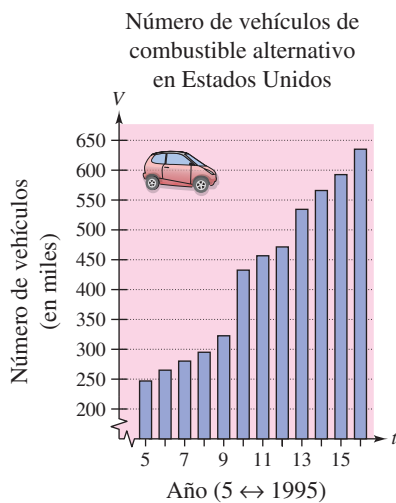


FIGURA 1.51

Ejemplo 10 Vehículos de combustible alternativo

El número V (en miles) de vehículos de combustible alternativo en Estados Unidos aumentó en forma lineal de 1995 a 1999, como se ve en la Figura 1.51. Entonces, en 2000, el número de vehículos dio un salto y, hasta 2006, aumentó en diferente forma lineal. Estas dos formas se pueden calcular mediante la función

$$V(t) = \begin{cases} 18.08t + 155.3, & 5 \leq t \leq 9 \\ 34.75t + 74.9, & 10 \leq t \leq 16 \end{cases}$$

donde t representa el año, con $t = 5$ correspondiente a 1995. Use esta función para calcular el número de vehículos de combustible alternativo para cada año de 1995 a 2006. (Fuente: Science Applications International Corporation; Energy Information Administration)

Solución

De 1995 a 1999, use $V(t) = 18.08t + 155.3$.

$$\begin{array}{ccccc} \underbrace{245.7}_{1995} & \underbrace{263.8}_{1996} & \underbrace{281.9}_{1997} & \underbrace{299.9}_{1998} & \underbrace{318.0}_{1999} \end{array}$$

De 2000 a 2006, use $V(t) = 34.75t + 74.9$.

$$\begin{array}{ccccccc} \underbrace{422.4}_{2000} & \underbrace{457.2}_{2001} & \underbrace{491.9}_{2002} & \underbrace{526.7}_{2003} & \underbrace{561.4}_{2004} & \underbrace{596.2}_{2005} & \underbrace{630.9}_{2006} \end{array}$$

PUNTO de repaso ➔ Ahora trate de hacer el Ejercicio 95.

Cocientes de diferencias

Una de las definiciones básicas en cálculo utiliza la relación

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad h \neq 0$$

Esta relación se denomina **cocientes de diferencias**, como se ilustra en el Ejemplo 11.

Ejemplo 11 Evaluar un cociente de diferencias



Para $f(x) = x^2 - 4x + 7$, encuentre $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Solución

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{[(x+h)^2 - 4(x+h) + 7] - (x^2 - 4x + 7)}{h} \\ &= \frac{x^2 + 2xh + h^2 - 4x - 4h + 7 - x^2 + 4x - 7}{h} \\ &= \frac{2xh + h^2 - 4h}{h} = \frac{h(2x + h - 4)}{h} = 2x + h - 4, \quad h \neq 0 \end{aligned}$$

PUNTO de repaso ➔ Ahora trate de hacer el Ejercicio 103.

El símbolo  indica un ejemplo o ejercicio en el que se destacan las técnicas algebraicas específicamente empleadas en cálculo.

Usted encontrará más fácil calcular el cociente de diferencias en el Ejemplo 11 si primero encuentra $f(x + h)$ y luego sustituye la expresión resultante en el cociente de diferencias, como sigue.

$$f(x + h) = (x + h)^2 - 4(x + h) + 7 = x^2 + 2xh + h^2 - 4x - 4h + 7$$

$$\begin{aligned}\frac{f(x + h) - f(x)}{h} &= \frac{(x^2 + 2xh + h^2 - 4x - 4h + 7) - (x^2 - 4x + 7)}{h} \\ &= \frac{2xh + h^2 - 4h}{h} = \frac{h(2x + h - 4)}{h} = 2x + h - 4, \quad h \neq 0\end{aligned}$$

Resumen de la terminología de funciones

Función: Una **función** es una relación entre dos variables tal que a cada valor de la variable independiente corresponde exactamente un valor de la variable dependiente.

Notación de función: $y = f(x)$

f es el *nombre* de la función.

y es la **variable dependiente**.

x es la **variable independiente**.

$f(x)$ es el *valor de la función en x* .

Dominio: El **dominio** de una función es el conjunto de todos los valores (entradas) de la variable independiente para los que la función está definida. Si x está en el dominio de f , se dice que f está definida en x . Si x no está en el dominio de f , se dice que f no *está definida* en x .

Rango: El **rango** de una función es el conjunto de todos los valores (salidas) que toma la variable dependiente (es decir, el conjunto de todos los valores de la función).

Dominio implicado: Si f está definida por medio de una expresión algebraica y el dominio no está especificado, el **dominio implicado** está formado por todos los números reales para los que la expresión está definida.

DISCUSIÓN EN CLASE

Funciones diarias En grupos de dos o tres personas, identifique funciones comunes en la vida real. Considere actividades diarias, eventos y gastos; por ejemplo, llamadas telefónicas de larga distancia y seguro de autos. A continuación veamos dos ejemplos.

- El enunciado “Tu felicidad es una función de la calificación que recibas en este curso” *no* es un uso matemático correcto de la palabra “función”. La palabra “felicidad” es ambigua.
- El enunciado “Tu impuesto federal sobre la renta es una función de tu ingreso bruto ajustado” es un uso matemático correcto de la palabra “función”. Una vez que hayas determinado tu ingreso bruto ajustado, podrá determinarse tu impuesto sobre la renta.

Describe verbalmente sus funciones. Evite usar palabras ambiguas. ¿Puede hallar un ejemplo de una función definida por partes?

1.4 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

VOCABULARIO: Llene los espacios en blanco.

- Una relación que asigna a cada elemento x de un conjunto de entradas, o _____, exactamente un elemento y en un conjunto de salidas, o _____, se denomina _____.
- Las funciones se representan comúnmente en cuatro formas diferentes, _____, _____, _____ y _____.
- Para una ecuación que representa a y como función de x , el conjunto de todos los valores tomados por la variable _____ x es el dominio, y el conjunto de todos los valores tomados por la variable _____ y es el rango.
- La función dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x < 0 \\ x^2 + 4, & x \geq 0 \end{cases}$$

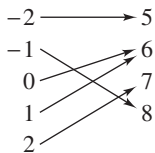
es un ejemplo de una función _____.

- Si no se da el dominio de la función f , entonces el conjunto de valores de la variable independiente para el que la expresión está definida se denomina _____.
- En cálculo, una de las definiciones básicas es la de un _____, dado por $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, $h \neq 0$.

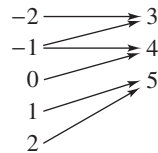
HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 7-10, ¿la relación es una función?

7. Dominio Rango



8. Dominio Rango

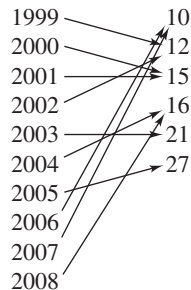
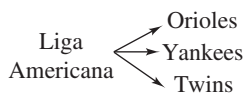


9. Dominio Rango



10. Dominio Rango

(Año) (Número de tormentas tropicales y huracanes en el Atlántico Norte)



En los Ejercicios 11-14, determine si la relación representa a y como función de x .

11.

Entrada, x	-2	-1	0	1	2
Salida, y	-8	-1	0	1	8

12.

Entrada, x	0	1	2	1	0
Salida, y	-4	-2	0	2	4

13.

Entrada, x	10	7	4	7	10
Salida, y	3	6	9	12	15

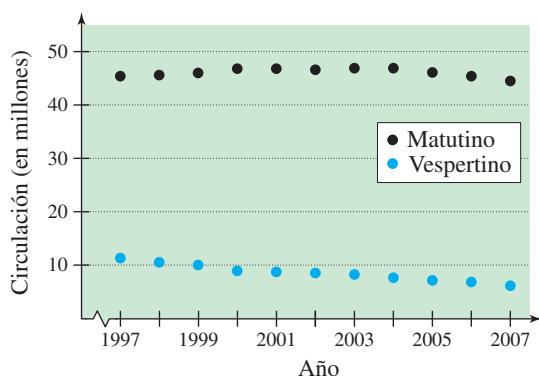
14.

Entrada, x	0	3	9	12	15
Salida, y	3	3	3	3	3

En los Ejercicios 15 y 16, ¿cuáles conjuntos de pares ordenados representan funciones de A a B ? Explique.

- $A = \{0, 1, 2, 3\}$ y $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$
 - $\{(0, 1), (1, -2), (2, 0), (3, 2)\}$
 - $\{(0, -1), (2, 2), (1, -2), (3, 0), (1, 1)\}$
 - $\{(0, 0), (1, 0), (2, 0), (3, 0)\}$
 - $\{(0, 2), (3, 0), (1, 1)\}$
- $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{0, 1, 2, 3\}$
 - $\{(a, 1), (c, 2), (c, 3), (b, 3)\}$
 - $\{(a, 1), (b, 2), (c, 3)\}$
 - $\{(1, a), (0, a), (2, c), (3, b)\}$
 - $\{(c, 0), (b, 0), (a, 3)\}$

CIRCULACIÓN DE PERIÓDICOS En los Ejercicios 17 y 18, use la gráfica que muestra la circulación (en millones) de diarios en Estados Unidos. (Fuente: Editor & Publisher Company)



17. ¿La circulación de diarios matutinos es una función del año? ¿La circulación de diarios vespertinos es una función del año? Explique.
18. Represente con $f(x)$ la circulación de diarios vespertinos en el año x . Encuentre $f(2002)$.

En los Ejercicios 19-36, determine si la ecuación representa a y como función de x .

- | | |
|----------------------------------|------------------------|
| 19. $x^2 + y^2 = 4$ | 20. $x^2 - y^2 = 16$ |
| 21. $x^2 + y = 4$ | 22. $y - 4x^2 = 36$ |
| 23. $2x + 3y = 4$ | 24. $2x + 5y = 10$ |
| 25. $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$ | |
| 26. $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ | |
| 27. $y^2 = x^2 - 1$ | 28. $x + y^2 = 4$ |
| 29. $y = \sqrt{16 - x^2}$ | 30. $y = \sqrt{x + 5}$ |
| 31. $y = 4 - x $ | 32. $ y = 4 - x$ |
| 33. $x = 14$ | 34. $y = -75$ |
| 35. $y + 5 = 0$ | 36. $x - 1 = 0$ |

En los Ejercicios 37-52, evalúe la función en cada valor especificado de la variable independiente y simplifique.

37. $f(x) = 2x - 3$
 (a) $f(1)$ (b) $f(-3)$ (c) $f(x - 1)$
38. $g(y) = 7 - 3y$
 (a) $g(0)$ (b) $g(\frac{7}{3})$ (c) $g(s + 2)$
39. $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$
 (a) $V(3)$ (b) $V(\frac{3}{2})$ (c) $V(2r)$
40. $S(r) = 4\pi r^2$
 (a) $S(2)$ (b) $S(\frac{1}{2})$ (c) $S(3r)$
41. $g(t) = 4t^2 - 3t + 5$
 (a) $g(2)$ (b) $g(t - 2)$ (c) $g(t) - g(2)$

42. $h(t) = t^2 - 2t$
 (a) $h(2)$ (b) $h(1.5)$ (c) $h(x + 2)$
43. $f(y) = 3 - \sqrt{y}$
 (a) $f(4)$ (b) $f(0.25)$ (c) $f(4x^2)$
44. $f(x) = \sqrt{x + 8} + 2$
 (a) $f(-8)$ (b) $f(1)$ (c) $f(x - 8)$
45. $q(x) = 1/(x^2 - 9)$
 (a) $q(0)$ (b) $q(3)$ (c) $q(y + 3)$
46. $q(t) = (2t^2 + 3)/t^2$
 (a) $q(2)$ (b) $q(0)$ (c) $q(-x)$
47. $f(x) = |x|/x$
 (a) $f(2)$ (b) $f(-2)$ (c) $f(x - 1)$
48. $f(x) = |x| + 4$
 (a) $f(2)$ (b) $f(-2)$ (c) $f(x^2)$
49. $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x < 0 \\ 2x + 2, & x \geq 0 \end{cases}$
 (a) $f(-1)$ (b) $f(0)$ (c) $f(2)$
50. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x \leq 1 \\ 2x^2 + 2, & x > 1 \end{cases}$
 (a) $f(-2)$ (b) $f(1)$ (c) $f(2)$
51. $f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & x < -1 \\ 4, & -1 \leq x \leq 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$
 (a) $f(-2)$ (b) $f(-\frac{1}{2})$ (c) $f(3)$
52. $f(x) = \begin{cases} 4 - 5x, & x \leq -2 \\ 0, & -2 < x < 2 \\ x^2 + 1, & x \geq 2 \end{cases}$
 (a) $f(-3)$ (b) $f(4)$ (c) $f(-1)$

En los Ejercicios 53-58, complete la tabla.

53. $f(x) = x^2 - 3$

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$					

54. $g(x) = \sqrt{x - 3}$

x	3	4	5	6	7
$g(x)$					

55. $h(t) = \frac{1}{2}|t + 3|$

t	-5	-4	-3	-2	-1
$h(t)$					

56. $f(s) = \frac{|s - 2|}{s - 2}$

s	0	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	4
$f(s)$					

57. $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + 4, & x \leq 0 \\ (x - 2)^2, & x > 0 \end{cases}$

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$					

58. $f(x) = \begin{cases} 9 - x^2, & x < 3 \\ x - 3, & x \geq 3 \end{cases}$

x	1	2	3	4	5
$f(x)$					

En los Ejercicios 59-66, encuentre todos los valores reales de x tales que $f(x) = 0$.

59. $f(x) = 15 - 3x$

60. $f(x) = 5x + 1$

61. $f(x) = \frac{3x - 4}{5}$

62. $f(x) = \frac{12 - x^2}{5}$

63. $f(x) = x^2 - 9$

64. $f(x) = x^2 - 8x + 15$

65. $f(x) = x^3 - x$

66. $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$

En los Ejercicios 67-70, encuentre el valor(es) de x para cada $f(x) = g(x)$.

67. $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 2$

68. $f(x) = x^2 + 2x + 1$, $g(x) = 7x - 5$

69. $f(x) = x^4 - 2x^2$, $g(x) = 2x^2$

70. $f(x) = \sqrt{x} - 4$, $g(x) = 2 - x$

En los Ejercicios 71-82, encuentre el dominio de la función.

71. $f(x) = 5x^2 + 2x - 1$

72. $g(x) = 1 - 2x^2$

73. $h(t) = \frac{4}{t}$

74. $s(y) = \frac{3y}{y + 5}$

75. $g(y) = \sqrt{y - 10}$

76. $f(t) = \sqrt[3]{t + 4}$

77. $g(x) = \frac{1}{x} - \frac{3}{x + 2}$

78. $h(x) = \frac{10}{x^2 - 2x}$

79. $f(s) = \frac{\sqrt{s - 1}}{s - 4}$

80. $f(x) = \frac{\sqrt{x + 6}}{6 + x}$

81. $f(x) = \frac{x - 4}{\sqrt{x}}$

82. $f(x) = \frac{x + 2}{\sqrt{x - 10}}$

En los Ejercicios 83-86, suponga que el dominio de f es el conjunto $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Determine el conjunto de pares ordenados que representa la función f .

83. $f(x) = x^2$

84. $f(x) = (x - 3)^2$

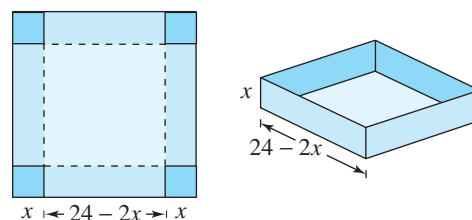
85. $f(x) = |x| + 2$

86. $f(x) = |x + 1|$

87. GEOMETRÍA Escriba el área A de un cuadrado como función de su perímetro P .

88. GEOMETRÍA Escriba el área A de un círculo como función de su circunferencia C .

89. VOLUMEN MÁXIMO Se ha de construir una caja abierta de volumen máximo, a partir de una pieza cuadrada de material de 24 centímetros por lado, cortando cuadrados iguales de las esquinas y volteando hacia arriba los lados (vea figura).



(a) La tabla muestra los volúmenes V (en centímetros cúbicos) de la caja para varias alturas x (en centímetros). Use la tabla para calcular el volumen máximo.

Altura, x	1	2	3	4	5	6
Volumen, V	484	800	972	1024	980	864

(b) Determine los puntos (x, V) de la tabla del inciso (a). ¿La relación definida por los pares ordenados representa a V como función de x ?

(c) Si V es una función de x , escriba la función y determine el dominio.

90. UTILIDAD MÁXIMA El costo por unidad en la producción de un reproductor de archivos MP3 es \$60. El fabricante cobra \$90 por unidad por pedidos de 100 o menos. Para estimular pedidos grandes, el fabricante reduce el cargo en \$0.15 por cada reproductor MP3 que pase de 100 (por ejemplo, habría un cargo de \$87 por reproductor de un pedido de 120).

(a) La tabla muestra las utilidades P (en dólares) para varios números de unidades pedidas, x . Use la tabla para calcular la utilidad máxima.

Unidades, x	110	120	130	140
Utilidad, P	3135	3240	3315	3360

Unidades, x	150	160	170
Utilidad, P	3375	3360	3315

- (b) Grafique los puntos (x, P) de la tabla del inciso (a). ¿La relación definida por los pares ordenados representa a P como función de x ?
- (c) Si P es una función de x , escriba la función y determine su dominio.

- 91. GEOMETRÍA** Un triángulo rectángulo está formado por los ejes x y y y una recta que pasa por el punto $(2, 1)$ (vea la figura). Escriba el área A del triángulo como función de x y determine el dominio de la función.

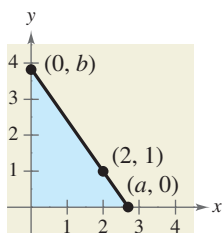


FIGURA PARA 91

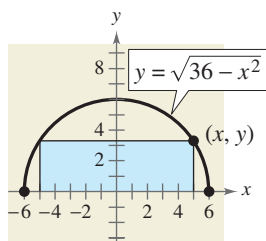


FIGURA PARA 92

- 92. GEOMETRÍA** Un rectángulo está limitado por el eje x y la semicircunferencia $y = \sqrt{36 - x^2}$ (vea la figura). Escriba el área A del rectángulo como función de x y determine gráficamente el dominio de la función.
- 93. TRAYECTORIA DE UNA PELOTA** La altura y (en pies) de una pelota de béisbol lanzada por un niño es

$$y = -\frac{1}{10}x^2 + 3x + 6$$

donde x es la distancia horizontal (en pies) desde donde la pelota es lanzada. ¿La pelota volará sobre la cabeza de otro niño que está a 30 pies de distancia y que trata de atraparla? (Suponga que el niño que está tratando de atrapar la pelota tiene su guante a una altura de 5 pies.)

- 94. MEDICAMENTOS** Los números d (en millones) de recetas surtidas por farmacias independientes en Estados Unidos, de 2000 a 2007 (vea la figura), se pueden calcular con el modelo

$$d(t) = \begin{cases} 10.6t + 699, & 0 \leq t \leq 4 \\ 15.5t + 637, & 5 \leq t \leq 7 \end{cases}$$

donde t representa el año, con $t = 0$ correspondiente a 2000. Use este modelo para hallar el número de recetas surtidas por farmacias independientes en cada año de 2000 a 2007. (Fuente: [National Association of Chain Drug Stores](#))

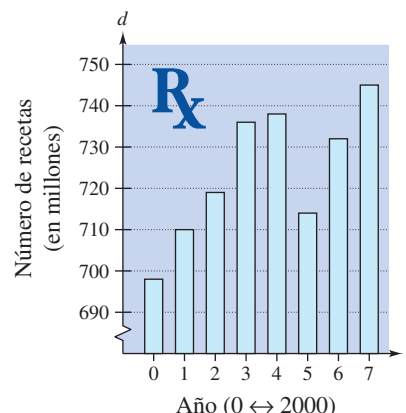
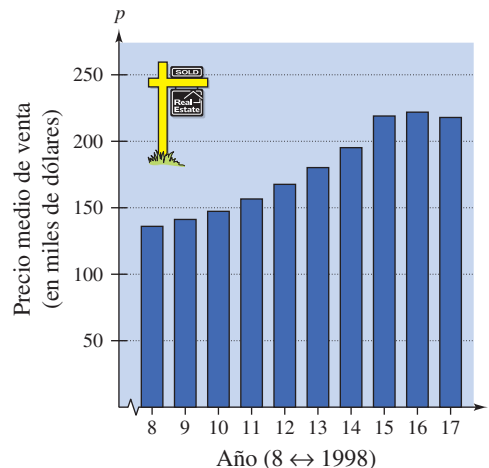


FIGURA PARA 94

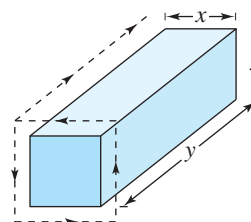
- 95. PRECIO MEDIO DE VENTA** Los precios p medios de venta (en miles de dólares) de una casa unifamiliar existente en Estados Unidos, de 1998 a 2007 (vea la figura), se puede calcular con el modelo

$$p(t) = \begin{cases} 1.011t^2 - 12.38t + 170.5, & 8 \leq t \leq 13 \\ -6.950t^2 + 222.55t - 1557.6, & 14 \leq t \leq 17 \end{cases}$$

donde t representa el año, con $t = 8$ correspondiente a 1998. Use este modelo para hallar el precio medio de venta de una casa unifamiliar existente en cada año, de 1998 a 2007. (Fuente: [National Association of Realtors](#))



- 96. REGLAMENTOS POSTALES** Un paquete rectangular, que ha de ser enviado por el Servicio Postal de Estados Unidos, puede tener una longitud máxima y cincha (perímetro de una sección transversal) de 108 pulgadas (vea la figura).



- (a) Escriba el volumen V del paquete como función de x . ¿Cuál es el dominio de la función?



- (b) Use calculadora de gráficas para graficar su función. Asegúrese de usar un ajuste de ventana apropiado.
- (c) ¿Qué dimensiones darán el máximo volumen del paquete? Explique su respuesta.

97. COSTO, INGRESO Y UTILIDAD Una compañía elabora un producto por el cual el costo variable es de \$12.30 por unidad, y los costos fijos son \$98 000. El producto se vende en \$17.98. Sea x el número de unidades producidas y vendidas.

- (a) El costo total para una empresa es la suma del costo variable y los costos fijos. Escriba el costo total C como función del número de unidades producidas.
- (b) Escriba el ingreso R como función del número de unidades vendidas.
- (c) Escriba la utilidad P como función del número de unidades vendidas. (Nota: $P = R - C$)

98. COSTO PROMEDIO El inventor de un nuevo juego piensa que el costo variable por producir el juego es de \$0.95 por unidad, y los costos fijos son \$6000. El inventor vende cada juego en \$1.69. Sea x el número de juegos vendidos.

- (a) El costo total para una empresa es la suma del costo variable y los costos fijos. Escriba el costo total C como función del número de juegos vendidos.
- (b) Escriba el costo promedio por unidad $\bar{C} = C/x$ como función de x .

99. TRANSPORTACIÓN Para grupos de 80 personas o más, una compañía de autobuses de alquiler determina la tarifa por persona según la fórmula

$$\text{Tarifa} = 8 - 0.05(n - 80), \quad n \geq 80$$

donde la tarifa está dada en dólares y n es el número de personas.

- (a) Escriba el ingreso R para la compañía de transporte como función de n .
- (b) Use la función del inciso (a) para completar la tabla. ¿Qué se puede concluir?

n	90	100	110	120	130	140	150
$R(n)$							

100. FÍSICA La fuerza F (en toneladas) del agua contra la cara de una represa está calculada con la función $F(y) = 149.76\sqrt{10}y^{5/2}$, donde y es la profundidad del agua (en pies).

- (a) Complete la tabla. ¿Qué se puede concluir a partir de ella?

y	5	10	20	30	40
$F(y)$					

- (b) Use la tabla para calcular la profundidad a la que la fuerza contra la represa es de 1 000 000 de toneladas.
- (c) Encuentre algebraicamente la profundidad a la cual la fuerza contra la represa es de 1 000 000 de toneladas.

101. ALTURA DE UN GLOBO Un globo que lleva un transmisor asciende verticalmente desde un punto a 3000 pies de la estación receptora.

- (a) Trace un diagrama que dé una representación visual del problema. Represente con h la altura del globo y con d la distancia entre éste y la estación receptora.
- (b) Escriba la altura del globo como función de d . ¿Cuál es el dominio de la función?

102. REGISTRO ELECTRÓNICO La tabla siguiente muestra los números de devoluciones de impuestos (en millones) hechas a través de registro electrónico de 2000 a 2007. Represente con $f(t)$ el número de devoluciones de impuestos hechas a través de registro electrónico en el año t . (Fuente: Internal Revenue Service)

Año	Número de devoluciones de impuestos hechas a través de registro electrónico
2000	35.4
2001	40.2
2002	46.9
2003	52.9
2004	61.5
2005	68.5
2006	73.3
2007	80.0

- (a) Encuentre $\frac{f(2007) - f(2000)}{2007 - 2000}$ e interprete el resultado en el contexto del problema.
- (b) Haga una gráfica de dispersión de los datos.
- (c) Encuentre algebraicamente un modelo lineal para los datos. Represente con N el número de devoluciones de impuestos hecha a través de registro electrónico, haciendo que $t = 0$ corresponda a 2000.
- (d) Use el modelo hallado en el inciso (c) para completar la tabla.

t	0	1	2	3	4	5	6	7
N								

- (e) Compare sus resultados del inciso (d) con los datos reales.



- (f) Use calculadora de gráficas para hallar un modelo lineal para los datos. Haga que $x = 0$ corresponda a 2000. ¿Cómo se compara el modelo hallado en el inciso (c) con el modelo dado por la calculadora de gráficas?

Ej En los Ejercicios 103-110, encuentre el cociente de diferencias y simplifique su respuesta.

103. $f(x) = x^2 - x + 1$, $\frac{f(2+h) - f(2)}{h}$, $h \neq 0$

104. $f(x) = 5x - x^2$, $\frac{f(5+h) - f(5)}{h}$, $h \neq 0$

105. $f(x) = x^3 + 3x$, $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, $h \neq 0$

106. $f(x) = 4x^2 - 2x$, $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, $h \neq 0$

107. $g(x) = \frac{1}{x^2}$, $\frac{g(x) - g(3)}{x - 3}$, $x \neq 3$

108. $f(t) = \frac{1}{t-2}$, $\frac{f(t) - f(1)}{t-1}$, $t \neq 1$

109. $f(x) = \sqrt{5x}$, $\frac{f(x) - f(5)}{x-5}$, $x \neq 5$

110. $f(x) = x^{2/3} + 1$, $\frac{f(x) - f(8)}{x-8}$, $x \neq 8$

En los Ejercicios 111-114, compare los datos con una de las siguientes funciones

$$f(x) = cx, g(x) = cx^2, h(x) = c\sqrt{|x|} \text{ y } r(x) = \frac{c}{x}$$

y determine el valor de la constante c que hará que la función se ajuste a los datos de la tabla.

111.

x	-4	-1	0	1	4
y	-32	-2	0	-2	-32

112.

x	-4	-1	0	1	4
y	-1	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1

113.

x	-4	-1	0	1	4
y	-8	-32	No definido	32	8

114.

x	-4	-1	0	1	4
y	6	3	0	3	6

EXPLORACIÓN

¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 115-118, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

115. Toda relación es una función.

116. Toda función es una relación.

117. El dominio de la función dada por $f(x) = x^4 - 1$ es $(-\infty, \infty)$, y el intervalo de $f(x)$ es $(0, \infty)$.

118. El conjunto de pares ordenados $\{(-8, -2), (-6, 0), (-4, 0), (-2, 2), (0, 4), (2, -2)\}$ representa una función.

119. **PIÉNSELO** Considere

$$f(x) = \sqrt{x-1} \text{ y } g(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}.$$

¿Por qué son diferentes los dominios de f y g ?

120. **PIÉNSELO** Considere

$$f(x) = \sqrt{x-2} \text{ y } g(x) = \sqrt[3]{x-2}.$$

¿Por qué son diferentes los dominios de f y g ?

121. **PIÉNSELO** Dada $f(x) = x^2$, f es la variable independiente? ¿Por qué sí o por qué no?

122. TOQUE FINAL

- Describa cualesquiera diferencias entre una *relación* y una *función*.
- Verbalmente, explique los significados de *dominio* y *rango*.

En los Ejercicios 123 y 124, determine si los enunciados usan la palabra *función* en formas que sean matemáticamente correctas. Explique su razonamiento.

- (a) El impuesto sobre ventas por un artículo comprado es función del precio de venta.
- (b) Su calificación en el siguiente examen de álgebra es una función del número de horas que estudie por la noche antes del examen.
- (a) La cantidad en la cuenta de ahorros de usted es función de su salario.
- (b) La rapidez a la que una pelota de béisbol cae al suelo es una función de la altura desde la que fue lanzada.

1.5 ANÁLISIS DE GRÁFICAS DE FUNCIONES

Lo que debe aprender

- Usar la prueba de la recta vertical para funciones.
- Encontrar los ceros de funciones.
- Determinar los intervalos en los que las funciones son crecientes o decrecientes y determinar valores relativos máximos y mínimos de funciones.
- Determinar la razón media de cambio de una función.
- Identificar funciones pares e impares.

Por qué debe aprenderlo

Las gráficas de funciones pueden ayudar al estudiante a visualizar relaciones entre variables en la vida real. Por ejemplo, en el Ejercicio 110 de la página 64 se usa la gráfica de una función para representar visualmente la temperatura de una ciudad en un periodo de 24 horas.

Gráfica de una función

En la sección 1.4 estudiamos funciones desde un punto de vista algebraico. En esta sección las estudiaremos desde una perspectiva gráfica.

La **gráfica de una función** f es el conjunto de pares ordenados $(x, f(x))$ tal que x está en el dominio de f . Al estudiar esta sección, recuerde que

x = distancia dirigida desde el eje y

$y = f(x)$ = distancia dirigida desde el eje x

como se ve en la Figura 1.52.

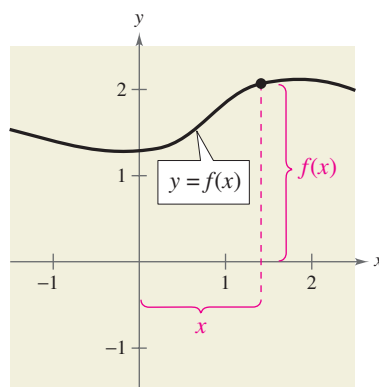


FIGURA 1.52

Ejemplo 1 Hallar el dominio y rango de una función

Use la gráfica de la función f , que se muestra en la Figura 1.53, para hallar (a) el dominio de f , (b) los valores $f(-1)$ y $f(2)$, y (c) el rango de f .

Solución

- El punto cerrado en $(-1, 1)$ indica que $x = -1$ está en el dominio de f , en tanto que el punto abierto en $(5, 2)$ indica que $x = 5$ no está en el dominio. Por tanto, el dominio de f es toda x en el intervalo $[-1, 5)$.
- Como $(-1, 1)$ es un punto en la gráfica de f , se deduce que $f(-1) = 1$. Del mismo modo, como $(2, -3)$ es un punto en la gráfica de f , se deduce que $f(2) = -3$.
- Como la gráfica no se prolonga debajo de $f(2) = -3$ ni arriba de $f(0) = 3$, el rango de f es el intervalo $[-3, 3]$.

PUNTO de repaso ➔ Ahora trate de hacer el Ejercicio 9.

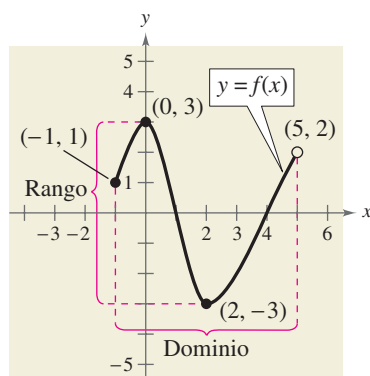


FIGURA 1.53

El uso de puntos (abiertos o cerrados) en los puntos extremos izquierdo y derecho de una gráfica indica que la gráfica no se prolonga más allá de estos puntos. Si no se muestran esos puntos, suponga que la gráfica se prolonga más allá de ellos.

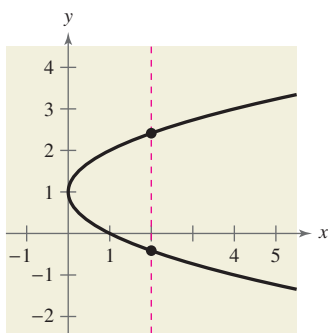
Por la definición de una función, a lo sumo un valor de y corresponde a un valor de x determinado. Esto significa que la gráfica de una función no puede tener dos o más puntos diferentes con la misma coordenada x , y ningunos dos puntos en la gráfica de una función pueden estar verticalmente arriba o abajo uno del otro. Se deduce, por tanto, que una recta vertical puede intersectar la gráfica de una función a lo sumo una vez. Esta observación da una cómoda prueba visual llamada **prueba de la recta vertical** para funciones.

Prueba de la recta vertical para funciones

Un conjunto de puntos en un plano de coordenadas es la gráfica de y como función de x si y sólo si no hay una recta *vertical* que corte la gráfica en más de un punto.

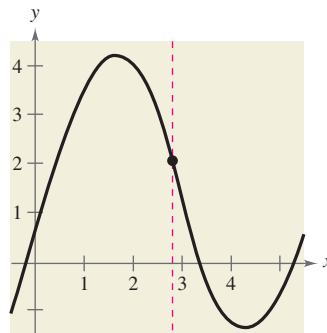
Ejemplo 2 Prueba de la recta vertical para funciones

Use la prueba de la recta vertical para determinar si las gráficas de la Figura 1.54 representan a y como función de x .

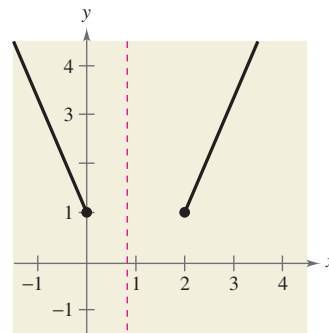


(a)

FIGURA 1.54



(b)



(c)

Solución

- Ésta *no es* una gráfica de y como función de x , porque podemos hallar una recta vertical que interseca dos veces la gráfica. Esto es, para una entrada x particular, hay más de una salida y .
- Ésta *es* una gráfica de y como función de x , porque toda recta vertical la interseca a lo sumo una vez. Esto es, para una entrada x particular, hay a lo sumo una salida y .
- Ésta *es* una gráfica de y como función de x . (Nótese que si una recta vertical no interseca la gráfica, simplemente significa que la función no está definida para ese valor particular de x .) Esto es, para una entrada x particular, hay a lo sumo una salida y .

PUNTO de repaso

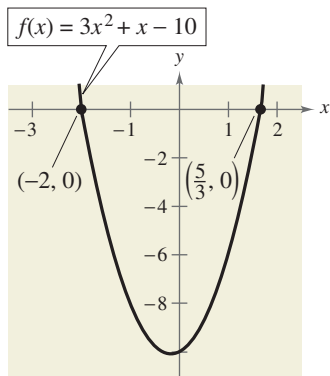
Ahora trate de hacer el Ejercicio 17.

TECNOLOGÍA

Casi todas las calculadoras de gráficas están diseñadas para graficar funciones de x más fácilmente que otros tipos de ecuaciones. Por ejemplo, la gráfica de la Figura 1.54(a) representa la ecuación $x - (y - 1)^2 = 0$. Para usar una calculadora de gráficas para duplicar esta gráfica, primero se debe despejar y de esta ecuación para obtener $y = 1 \pm \sqrt{x}$, y luego graficar las dos ecuaciones $y_1 = 1 + \sqrt{x}$ y $y_2 = 1 - \sqrt{x}$ en la misma pantalla.

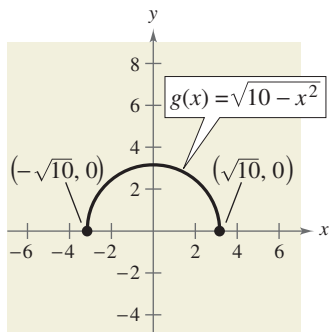
Ayuda de álgebra

Para hacer el Ejemplo 3, es necesario que el estudiante pueda resolver ecuaciones. En el Apéndice A.5 puede repasar las técnicas para ello.



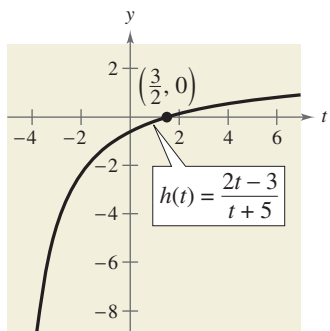
Ceros de f : $x = -2$, $x = \frac{5}{3}$

FIGURA 1.55



Ceros de g : $x = \pm \sqrt{10}$

FIGURA 1.56



Cero de h : $t = \frac{3}{2}$

FIGURA 1.57

Ceros de una función

Si la gráfica de una función de x tiene una intersección con el eje x en $(a, 0)$, entonces a es un **cero** de la función.

Ceros de una función

Los **ceros de una función** f de x son los valores de x para los cuales $f(x) = 0$.

Ejemplo 3 Hallar los ceros de una función

Encuentre los ceros de cada una de las funciones siguientes.

a. $f(x) = 3x^2 + x - 10$ b. $g(x) = \sqrt{10 - x^2}$ c. $h(t) = \frac{2t - 3}{t + 5}$

Solución

Para hallar los ceros de una función, iguale a cero ésta y despeje la variable independiente.

a. $3x^2 + x - 10 = 0$

Igualar $f(x)$ a 0.

$$(3x - 5)(x + 2) = 0$$

Factorizar.

$$3x - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{5}{3}$$

Igualar a cero el primer factor.

$$x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -2$$

Igualar a cero el segundo factor.

Los ceros de f son $x = \frac{5}{3}$ y $x = -2$. En la Figura 1.55, nótese que la gráfica de f tiene $(\frac{5}{3}, 0)$ y $(-2, 0)$ como sus intersecciones con el eje x .

b. $\sqrt{10 - x^2} = 0$

Igualar $g(x)$ a 0.

$$10 - x^2 = 0$$

Elevar al cuadrado ambos lados.

$$10 = x^2$$

Sumar x^2 a ambos lados.

$$\pm \sqrt{10} = x$$

Extraer raíces cuadradas.

Los ceros de g son $x = -\sqrt{10}$ y $x = \sqrt{10}$. En la Figura 1.56, nótese que la gráfica de g tiene $(-\sqrt{10}, 0)$ y $(\sqrt{10}, 0)$ como sus intersecciones con el eje x .

c. $\frac{2t - 3}{t + 5} = 0$

Igualar $h(t)$ a 0.

$$2t - 3 = 0$$

Multiplicar ambos lados por $t + 5$.

$$2t = 3$$

Sumar 3 a ambos lados.

$$t = \frac{3}{2}$$

Dividir ambos lados entre 2.

El cero de h es $t = \frac{3}{2}$. En la Figura 1.57, nótese que la gráfica de h tiene $(\frac{3}{2}, 0)$ como su intersección con el eje t .

PUNTO de repaso ➔ Ahora trate de hacer el Ejercicio 23.

Funciones crecientes y decrecientes

Cuanto más conozcamos de la gráfica de una función, más sabremos de la función misma. Considere la gráfica de la Figura 1.58. Al moverse de *izquierda a derecha*, esta gráfica baja de $x = -2$ a $x = 0$, es constante de $x = 0$ a $x = 2$, y sube de $x = 2$ a $x = 4$.

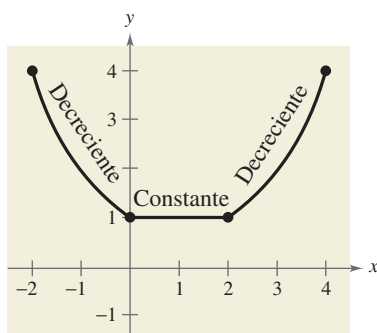


FIGURA 1.58

Funciones crecientes, decrecientes y constantes

Una función f es **creciente** en un intervalo si, para toda x_1 y x_2 del intervalo, $x_1 < x_2$ implica que $f(x_1) < f(x_2)$.

Una función f es **decreciente** en un intervalo si, para toda x_1 y x_2 del intervalo, $x_1 < x_2$ implica que $f(x_1) > f(x_2)$.

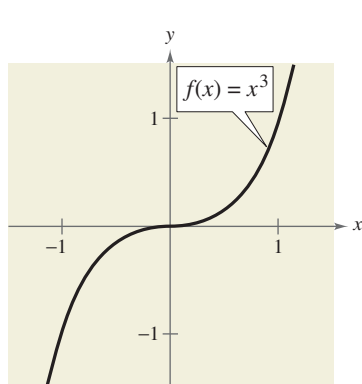
Una función f es **constante** en un intervalo si, para toda x_1 y x_2 del intervalo, $f(x_1) = f(x_2)$.

Ejemplo 4 Funciones crecientes y decrecientes

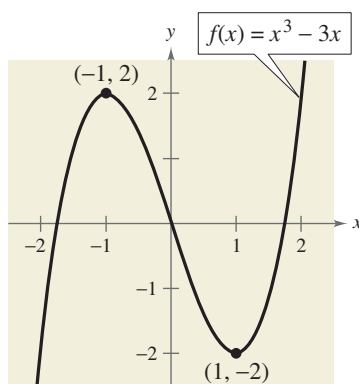
Use las gráficas de la Figura 1.59 para describir el comportamiento creciente o decreciente de cada función.

Solución

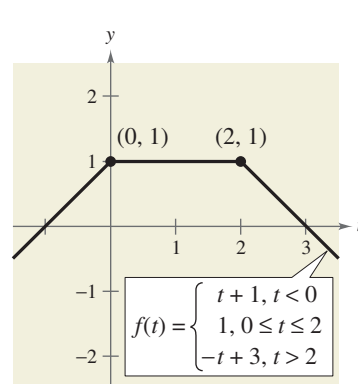
- Esta función es creciente en toda la recta real.
- Esta función es creciente en el intervalo $(-\infty, -1)$, decreciente en el intervalo $(-1, 1)$ y creciente en el intervalo $(1, \infty)$.
- Esta función es creciente en el intervalo $(-\infty, 0)$, constante en el intervalo $(0, 2)$ y decreciente en el intervalo $(2, \infty)$.



(a)



(b)



(c)

FIGURA 1.59

PUNTO de repaso Ahora trate de hacer el Ejercicio 41.

Para ayudar a determinar si una función es creciente, decreciente o constante en un intervalo, se puede evaluar para varios valores de x . No obstante, es necesario usar cálculo para determinar con toda certeza todos los intervalos en los que una función es creciente, decreciente o constante.

Tip de estudio

Un mínimo relativo o un máximo relativo también se conocen como *mínimo local* o *máximo local*.

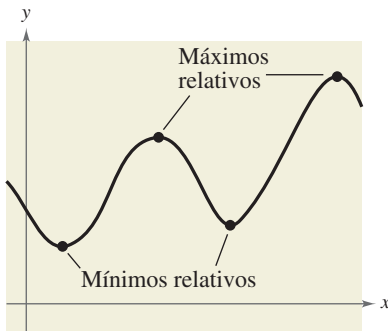


FIGURA 1.60

Los puntos en los que una función cambia su comportamiento creciente, decreciente o constante son útiles para determinar los valores **mínimo relativo** o **máximo relativo** de la función.

Definiciones de mínimo relativo y máximo relativo

El valor de una función $f(a)$ se denomina **mínimo relativo** de f si existe un intervalo (x_1, x_2) que contenga a tal que

$$x_1 < x < x_2 \quad \text{implica} \quad f(a) \leq f(x).$$

El valor de una función $f(a)$ se denomina **máximo relativo** de f si existe un intervalo (x_1, x_2) que contenga a tal que

$$x_1 < x < x_2 \quad \text{implica} \quad f(a) \geq f(x).$$

La Figura 1.60 muestra varios ejemplos de mínimos y máximos relativos. En la Sección 2.1 veremos una técnica para hallar el *punto exacto* en el que una función con polinomios de segundo grado tiene un mínimo o un máximo relativos. Por ahora, entonces, podemos usar calculadora de gráficas para hallar aproximaciones razonables de estos puntos.

Ejemplo 5 Calcular un mínimo relativo

Use calculadora de gráficas para aproximar el mínimo relativo de la función dada por $f(x) = 3x^2 - 4x - 2$.

Solución

La gráfica de f se ilustra en la Figura 1.61. Con las funciones *zoom* y *trace* o la *minimum* de una calculadora de gráficas, es posible calcular que la función tiene un mínimo relativo en el punto

$$(0.67, -3.33). \quad \text{Mínimo relativo}$$

Más adelante, en la Sección 2.1, podremos determinar que el punto exacto en el que se presenta el mínimo relativo es $\left(\frac{2}{3}, -\frac{10}{3}\right)$.

PUNTO de repaso ➔ Ahora trate de hacer el Ejercicio 57.

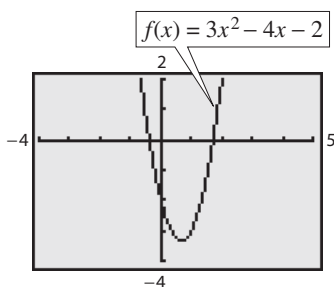


FIGURA 1.61

También se puede usar la función *table* de una calculadora de gráficas para aproximar numéricamente el mínimo relativo de la función en el Ejemplo 5. Usando una tabla que empiece en 0.6 e incremente el valor de x en 0.01, es posible calcular que el mínimo de $f(x) = 3x^2 - 4x - 2$ se presenta en el punto $(0.67, -3.33)$.

TECNOLOGÍA

Si se usa calculadora de gráficas para calcular los valores x y y de un mínimo o un máximo relativos, la función *zoom* a veces produce gráficas que son casi planas. Para superar este problema, manualmente se puede cambiar el ajuste vertical de la pantalla. La gráfica se alargará verticalmente si los valores $Y_{\min}$ y $Y_{\max}$ se acercan más.

Razón de cambio promedio

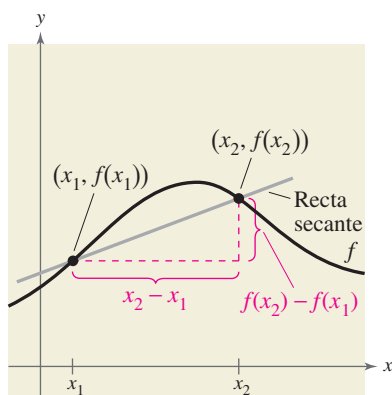


FIGURA 1.62

En la sección 1.3 aprendimos que la pendiente de una recta se puede interpretar como una *razón de cambio*. Para una gráfica no lineal cuya pendiente cambia en cada punto, la **razón de cambio promedio** entre cualesquier dos puntos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$ es la pendiente de la recta que pasa por los dos puntos (vea la Figura 1.62). La recta que pasa por los dos puntos se denomina **recta secante**, y la pendiente de esta recta está denotada como m_{sec} .

$$\begin{aligned} \text{Razón de cambio promedio de } f \text{ de } x_1 \text{ a } x_2 &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{\text{cambio en } y}{\text{cambio en } x} \\ &= m_{sec} \end{aligned}$$

Ejemplo 6 Razón de cambio promedio de una función



Encuentre las razones de cambio promedio de $f(x) = x^3 - 3x$ (a) de $x_1 = -2$ a $x_2 = 0$ y (b) de $x_1 = 0$ a $x_2 = 1$ (vea Figura 1.63).

Solución

a. La razón de cambio promedio de f de $x_1 = -2$ a $x_2 = 0$ es

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(0) - f(-2)}{0 - (-2)} = \frac{0 - (-2)}{2} = 1. \quad \text{La recta secante tiene pendiente positiva.}$$

b. La razón de cambio promedio de f de $x_1 = 0$ a $x_2 = 1$ es

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{-2 - 0}{1} = -2. \quad \text{La recta secante tiene pendiente negativa.}$$

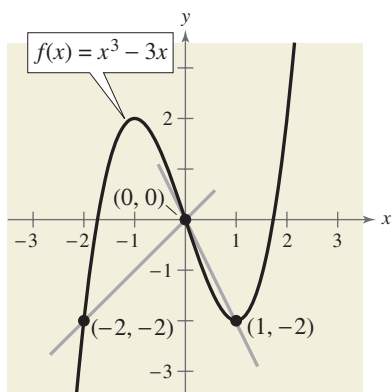


FIGURA 1.63

PUNTO de repaso ➔ Ahora trate de hacer el Ejercicio 75.

Ejemplo 7 Hallar la rapidez media



La distancia s (en pies) a la que un auto en movimiento está de un reflector está dada por la función $s(t) = 20t^{3/2}$, donde t es el tiempo (en segundos). Encuentre la rapidez media del auto (a) de $t_1 = 0$ a $t_2 = 4$ segundos y (b) de $t_1 = 4$ a $t_2 = 9$ segundos.

Solución

a. La rapidez media del auto de $t_1 = 0$ a $t_2 = 4$ segundos es

$$\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{s(4) - s(0)}{4 - (0)} = \frac{160 - 0}{4} = 40 \text{ pies por segundo.}$$

b. La rapidez media del auto de $t_1 = 4$ a $t_2 = 9$ segundos es

$$\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{s(9) - s(4)}{9 - 4} = \frac{540 - 160}{5} = 76 \text{ pies por segundo.}$$

PUNTO de repaso ➔ Ahora trate de hacer el Ejercicio 113.

Funciones pares e impares

En la Sección 1.2 estudiamos diferentes tipos de simetría de una gráfica. En la terminología de funciones, se dice que una función es *par* si su gráfica es simétrica respecto al eje y y es *impar* si su gráfica es simétrica respecto al origen. Las pruebas de simetría de la Sección 1.2 dan las siguientes pruebas para funciones pares e impares.

Pruebas para funciones pares e impares

Una función $y = f(x)$ es **par** si, para cada x en el dominio de f ,

$$f(-x) = f(x).$$

Una función $y = f(x)$ es **impar** si, para cada x en el dominio de f ,

$$f(-x) = -f(x).$$

Ejemplo 8 Funciones pares e impares

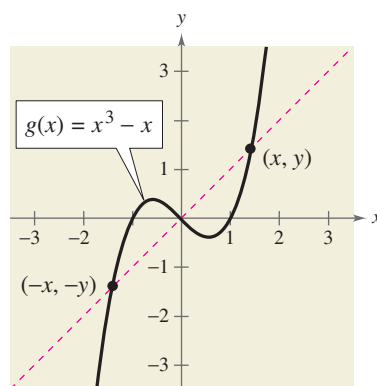
- a. La función $g(x) = x^3 - x$ es impar porque $g(-x) = -g(x)$, como sigue:

$$\begin{aligned} g(-x) &= (-x)^3 - (-x) && \text{Sustituir } -x \text{ por } x. \\ &= -x^3 + x && \text{Simplificar.} \\ &= -(x^3 - x) && \text{Propiedad distributiva} \\ &= -g(x) && \text{Prueba para función impar} \end{aligned}$$

- b. La función $h(x) = x^2 + 1$ es par porque $h(-x) = h(x)$, como sigue:

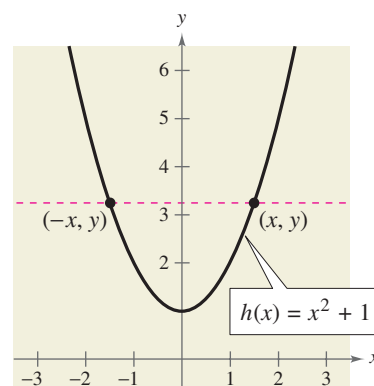
$$\begin{aligned} h(-x) &= (-x)^2 + 1 && \text{Sustituir } -x \text{ por } x. \\ &= x^2 + 1 && \text{Simplificar.} \\ &= h(x) && \text{Prueba para función par} \end{aligned}$$

Las gráficas y simetría de estas dos funciones se muestran en la Figura 1.64.



(a) Simétrica al origen: función impar

FIGURA 1.64



(b) Simétrica al eje y : función par

PUNTO de repaso

➡ Ahora trate de hacer el Ejercicio 83.

1.5 EJERCICIOS

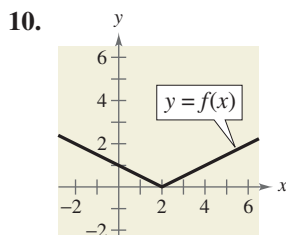
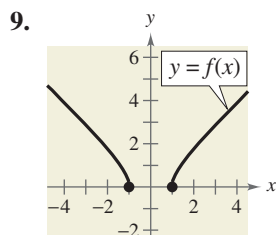
VOCABULARIO: Llene los espacios en blanco.

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

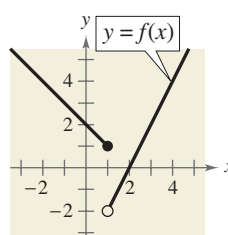
- La gráfica de una función f es el conjunto de _____ $(x, f(x))$ tal que x está en el dominio de f .
- La _____ se usa para determinar si la gráfica de una ecuación es una función de y en términos de x .
- Los _____ de una función f son los valores de x para los cuales $f(x) = 0$.
- Una función f está _____ en un intervalo si, para cualquier x_1 y x_2 en el intervalo, $x_1 < x_2$ implica que $f(x_1) > f(x_2)$.
- El valor de una función $f(a)$ es un _____ relativo de f si existe un intervalo (x_1, x_2) que contenga a a tal que $x_1 < x < x_2$ implica $f(a) \geq f(x)$.
- La _____ entre cualesquier dos puntos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$ es la pendiente de la recta que pasa por los dos puntos, y esta recta se denomina recta _____.
- Una función f es _____ si, por cada x en el dominio de f , $f(-x) = -f(x)$.
- Una función f es _____ si su gráfica es simétrica respecto al eje y .

HABILIDADES Y APLICACIONES

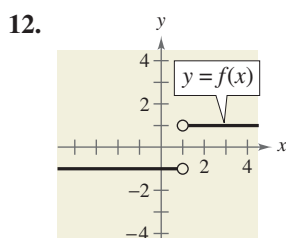
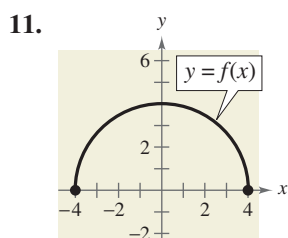
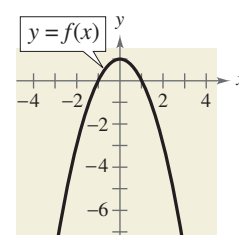
En los Ejercicios 9-12, use la gráfica de la función para hallar el dominio y el rango de f .



15. (a) $f(2)$ (b) $f(1)$
(c) $f(3)$ (d) $f(-1)$

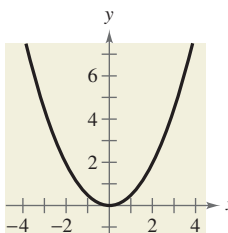


16. (a) $f(-2)$ (b) $f(1)$
(c) $f(0)$ (d) $f(2)$

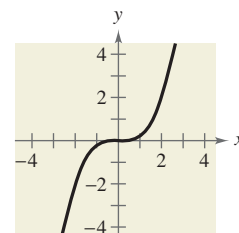


En los Ejercicios 17-22, use la prueba de la recta vertical para determinar si y es una función de x . Para imprimir una copia ampliada de la gráfica, visite el sitio web www.mathgraphs.com.

17. $y = \frac{1}{2}x^2$

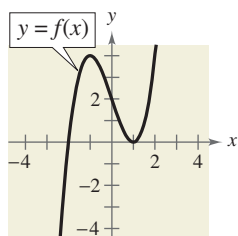
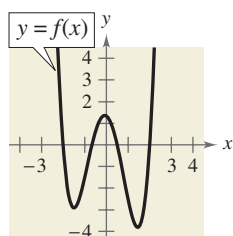


18. $y = \frac{1}{4}x^3$

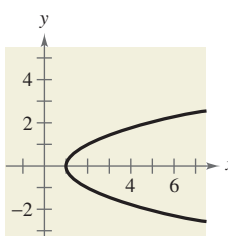


En los Ejercicios 13-16, use la gráfica de la función para hallar el dominio y el rango de f y los valores de función indicados.

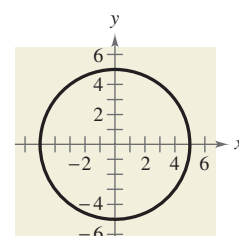
13. (a) $f(-2)$ (b) $f(-1)$ (c) $f(\frac{1}{2})$ (d) $f(1)$
14. (a) $f(-1)$ (b) $f(2)$ (c) $f(0)$ (d) $f(1)$



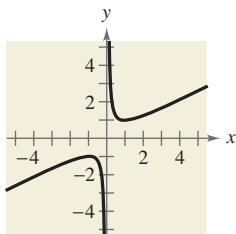
19. $x - y^2 = 1$



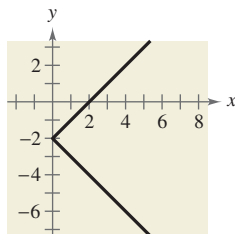
20. $x^2 + y^2 = 25$



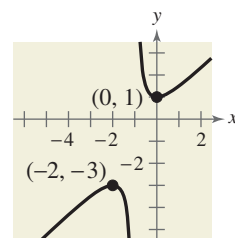
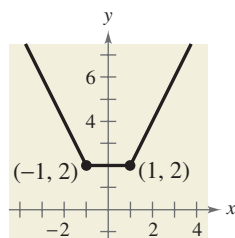
21. $x^2 = 2xy - 1$



22. $x = |y + 2|$



43. $f(x) = |x + 1| + |x - 1|$ 44. $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$



En los Ejercicios 23-32, encuentre algebraicamente los ceros de la función.

23. $f(x) = 2x^2 - 7x - 30$

24. $f(x) = 3x^2 + 22x - 16$

25. $f(x) = \frac{x}{9x^2 - 4}$

26. $f(x) = \frac{x^2 - 9x + 14}{4x}$

27. $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - x$

28. $f(x) = x^3 - 4x^2 - 9x + 36$

29. $f(x) = 4x^3 - 24x^2 - x + 6$

30. $f(x) = 9x^4 - 25x^2$

31. $f(x) = \sqrt{2x} - 1$

32. $f(x) = \sqrt{3x + 2}$



En los Ejercicios 33-38, (a) use calculadora de gráficas para graficar la función y hallar sus ceros y (b) verifique algebraicamente sus resultados del inciso (a).

33. $f(x) = 3 + \frac{5}{x}$

34. $f(x) = x(x - 7)$

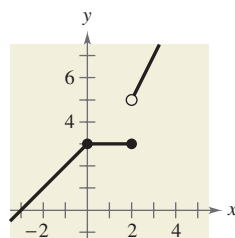
35. $f(x) = \sqrt{2x + 11}$

36. $f(x) = \sqrt{3x - 14} - 8$

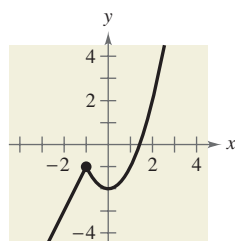
37. $f(x) = \frac{3x - 1}{x - 6}$

38. $f(x) = \frac{2x^2 - 9}{3 - x}$

45. $f(x) = \begin{cases} x + 3, & x \leq 0 \\ 3, & 0 < x \leq 2 \\ 2x + 1, & x > 2 \end{cases}$

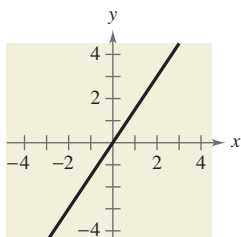


46. $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \leq -1 \\ x^2 - 2, & x > -1 \end{cases}$

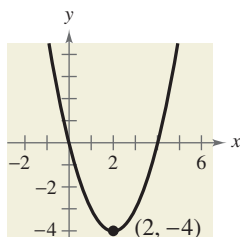


En los Ejercicios 39-46, determine los intervalos en los que la función es creciente, decreciente o constante.

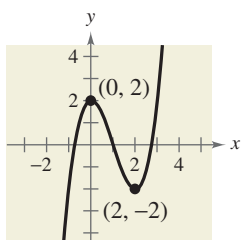
39. $f(x) = \frac{3}{2}x$



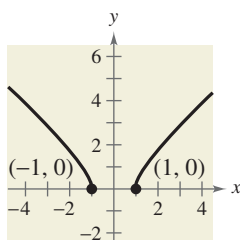
40. $f(x) = x^2 - 4x$



41. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$



42. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$



En los Ejercicios 47-56, (a) use calculadora de gráficas para graficar la función y visualmente determinar los intervalos en los que es creciente, decreciente o constante, y (b) haga una tabla de valores para verificar si la función es creciente, decreciente o constante en los intervalos que haya identificado en el inciso (a).

47. $f(x) = 3$

48. $g(x) = x$

49. $g(s) = \frac{s^2}{4}$

50. $h(x) = x^2 - 4$

51. $f(t) = -t^4$

52. $f(x) = 3x^4 - 6x^2$

53. $f(x) = \sqrt{1 - x}$

54. $f(x) = x\sqrt{x + 3}$

55. $f(x) = x^{3/2}$

56. $f(x) = x^{2/3}$



En los Ejercicios 57-66, use calculadora de gráficas para graficar la función y calcular (a dos lugares decimales) cualesquier valores de mínimo o máximo relativos.

57. $f(x) = (x - 4)(x + 2)$ 58. $f(x) = 3x^2 - 2x - 5$
 59. $f(x) = -x^2 + 3x - 2$ 60. $f(x) = -2x^2 + 9x$
 61. $f(x) = x(x - 2)(x + 3)$
 62. $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 1$
 63. $g(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$
 64. $h(x) = x^3 - 6x^2 + 15$
 65. $h(x) = (x - 1)\sqrt{x}$
 66. $g(x) = x\sqrt{4 - x}$

En los Ejercicios 67-74, grafique la función y determine el intervalo(s) para el que $f(x) \geq 0$.

67. $f(x) = 4 - x$ 68. $f(x) = 4x + 2$
 69. $f(x) = 9 - x^2$ 70. $f(x) = x^2 - 4x$
 71. $f(x) = \sqrt{x - 1}$ 72. $f(x) = \sqrt{x + 2}$
 73. $f(x) = -(1 + |x|)$ 74. $f(x) = \frac{1}{2}(2 + |x|)$

En los Ejercicios 75-82, encuentre la razón de cambio promedio de la función de x_1 a x_2 .

Función	Valores x
75. $f(x) = -2x + 15$	$x_1 = 0, x_2 = 3$
76. $f(x) = 3x + 8$	$x_1 = 0, x_2 = 3$
77. $f(x) = x^2 + 12x - 4$	$x_1 = 1, x_2 = 5$
78. $f(x) = x^2 - 2x + 8$	$x_1 = 1, x_2 = 5$
79. $f(x) = x^3 - 3x^2 - x$	$x_1 = 1, x_2 = 3$
80. $f(x) = -x^3 + 6x^2 + x$	$x_1 = 1, x_2 = 6$
81. $f(x) = -\sqrt{x - 2} + 5$	$x_1 = 3, x_2 = 11$
82. $f(x) = -\sqrt{x + 1} + 3$	$x_1 = 3, x_2 = 8$

En los Ejercicios 83-90, determine si la función es par, impar o ninguna de éstas. A continuación describa la simetría.

83. $f(x) = x^6 - 2x^2 + 3$ 84. $h(x) = x^3 - 5$
 85. $g(x) = x^3 - 5x$ 86. $f(t) = t^2 + 2t - 3$
 87. $h(x) = x\sqrt{x + 5}$ 88. $f(x) = x\sqrt{1 - x^2}$
 89. $f(s) = 4s^{3/2}$ 90. $g(s) = 4s^{2/3}$

En los Ejercicios 91-100, trace una gráfica de la función y determine si es par, impar o ninguna de éstas. Verifique algebraicamente sus respuestas.

91. $f(x) = 5$ 92. $f(x) = -9$
 93. $f(x) = 3x - 2$ 94. $f(x) = 5 - 3x$
 95. $h(x) = x^2 - 4$ 96. $f(x) = -x^2 - 8$

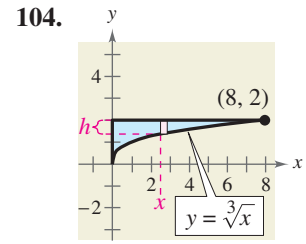
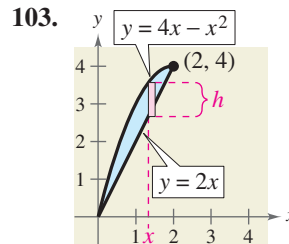
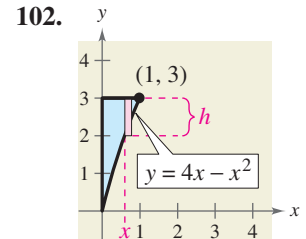
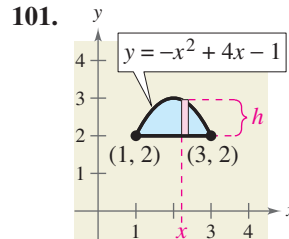
97. $f(x) = \sqrt{1 - x}$

98. $g(t) = \sqrt[3]{t - 1}$

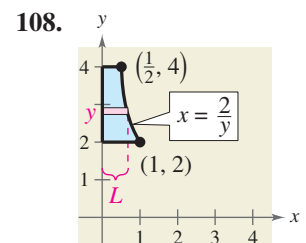
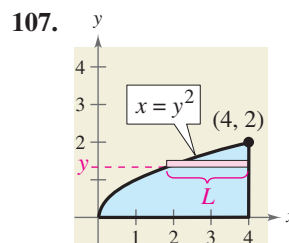
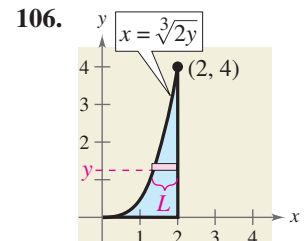
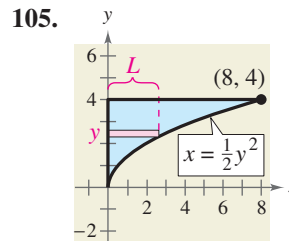
99. $f(x) = |x + 2|$

100. $f(x) = -|x - 5|$

En los Ejercicios 101-104, escriba la altura h del rectángulo como función de x .



En los Ejercicios 105-108, escriba la longitud L del rectángulo como función de y .



109. ELECTRÓNICA El número de lúmenes (rapidez de flujo de luz) L desde una lámpara fluorescente puede ser calculado con el modelo

$$L = -0.294x^2 + 97.744x - 664.875, \quad 20 \leq x \leq 90$$

donde x es la potencia en watts de la lámpara.

- (a) Use calculadora de gráficas para graficar la función.
 (b) Use la gráfica del inciso (a) para calcular la potencia en watts necesaria para obtener 2000 lúmenes.



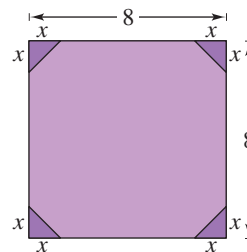
- 110. ANÁLISIS DE DATOS: TEMPERATURA** La tabla siguiente muestra las temperaturas y (en grados Fahrenheit) en cierta ciudad en un periodo de 24 horas. Represente con x la hora del día, donde $x = 0$ corresponde a las 6 A.M.

 Hora, x	Temperatura, y
0	34
2	50
4	60
6	64
8	63
10	59
12	53
14	46
16	40
18	36
20	34
22	37
24	45

Un modelo que representa estos datos está dado por $y = 0.026x^3 - 1.03x^2 + 10.2x + 34$, $0 \leq x \leq 24$.

- Use una calculadora de gráficas para crear una gráfica de dispersión de los datos. A continuación grafique el modelo en la misma pantalla.
 - ¿Qué tan bien se ajusta el modelo a los datos?
 - Use la gráfica para calcular las horas cuando la temperatura era creciente y decreciente.
 - Use la gráfica para calcular las temperaturas máxima y mínima durante este periodo de 24 horas.
 - ¿Podría usarse este modelo para pronosticar las temperaturas en la ciudad durante el siguiente periodo de 24 horas? ¿Por qué sí o por qué no?
- 111. ESCALA DE EJES DE COORDENADAS** Cada una de las funciones descritas a continuación modela los datos especificados para los años 1998 a 2008, con $t = 8$ correspondiente a 1998. Calcule una escala razonable para el eje vertical (por ejemplo, cientos, miles, millones, etc.) de la gráfica y justifique su respuesta. (Hay numerosas respuestas correctas.)
- $f(t)$ representa el salario promedio de profesores universitarios.
 - $f(t)$ representa la población de Estados Unidos.
 - $f(t)$ representa el porcentaje de la fuerza laboral civil que está desempleada.

- 112. GEOMETRÍA** Esquinas de igual tamaño se cortan de un cuadrado con lados de 8 metros de longitud (vea figura).



- Escriba el área A de la figura resultante como función de x . Determine el dominio de la función.
- Use una calculadora de gráficas para graficar la función de área en su dominio. Use la gráfica para hallar el rango de la función.
- Identifique la figura que resultaría si x se escogiera como el valor máximo del dominio de la función. ¿Cuál sería la longitud de cada lado de la figura?

- 113. CANTIDAD DE INSCRIPCIONES** Las cantidades r de inscripciones de niños en preescolar en Estados Unidos, de 1970 a 2005 se puede calcular con el modelo

$$r = -0.021t^2 + 1.44t + 39.3, \quad 0 \leq t \leq 35$$

donde t representa el año, con $t = 0$ correspondiente a 1970. (Fuente: U.S. Census Bureau)

- Use una calculadora de gráficas para graficar el modelo.
- Encuentre la razón media de cambio del modelo de 1970 a 2005. Interprete su respuesta en el contexto del problema.

- 114. VENTA DE TECNOLOGÍA EN VEHÍCULOS** Los ingresos estimados r (en millones de dólares) por venta de tecnología en vehículos en Estados Unidos, de 2003 a 2008, se puede calcular con el modelo

$$r = 157.30t^2 - 397.4t + 6114, \quad 3 \leq t \leq 8$$

donde t representa el año, con $t = 3$ correspondiente a 2003. (Fuente: Consumer Electronics Association)

- Use una calculadora de gráficas para graficar el modelo.
- Encuentre la razón de cambio promedio del modelo de 2003 a 2008. Interprete su respuesta en el contexto del problema.



- FÍSICA** En los ejercicios 115–120, (a) use la ecuación de posición $s = -16t^2 + v_0t + s_0$ para escribir una función que represente la situación, (b) use una calculadora de gráficas para graficar la función, (c) encuentre la razón de cambio promedio de la función de t_1 a t_2 , (d) describa la pendiente de la recta secante que pasa por t_1 y t_2 , (e) encuentre la ecuación de la recta secante que pasa por t_1 y t_2 , y (f) grafique la recta secante en la misma pantalla como su función de posición.

115. Un cuerpo es lanzado hacia arriba desde una altura de 6 pies a una velocidad de 64 pies por segundo.

$$t_1 = 0, t_2 = 3$$

116. Un cuerpo es lanzado hacia arriba desde una altura de 6.5 pies a una velocidad de 72 pies por segundo.

$$t_1 = 0, t_2 = 4$$

117. Un cuerpo es lanzado hacia arriba desde el nivel del suelo a una velocidad de 120 pies por segundo.

$$t_1 = 3, t_2 = 5$$

118. Un cuerpo es lanzado hacia arriba desde el nivel del suelo a una velocidad de 96 pies por segundo.

$$t_1 = 2, t_2 = 5$$

119. Un cuerpo se deja caer desde una altura de 120 pies.

$$t_1 = 0, t_2 = 2$$

120. Un cuerpo se deja caer desde una altura de 80 pies.

$$t_1 = 1, t_2 = 2$$

EXPLORACIÓN

¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 121 y 122, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

121. Una función con una raíz cuadrada no puede tener un dominio que sea el conjunto de los números reales.
122. Es posible que una función impar tenga el intervalo $[0, \infty)$ como su dominio.
123. Si f es una función par, determine si g es par, impar o ninguna de éstas. Explique

- (a) $g(x) = -f(x)$ (b) $g(x) = f(-x)$
 (c) $g(x) = f(x) - 2$ (d) $g(x) = f(x - 2)$

124. **PIÉNSELO** ¿La gráfica del Ejercicio 19 representa a x como función de y ? Explique.

PIÉNSELO En los Ejercicios 125-130, encuentre las coordenadas de un segundo punto en la gráfica de una función f si el punto dado está en la gráfica y la función es (a) par y (b) impar.

125. $(-\frac{3}{2}, 4)$ 126. $(-\frac{5}{3}, -7)$
 127. $(4, 9)$ 128. $(5, -1)$
 129. $(x, -y)$ 130. $(2a, 2c)$



131. **ESCRITURA** Use una calculadora de gráficas para graficar cada función. Escriba un párrafo que describa cualesquiera similitudes y diferencias que observe entre las gráficas.

- (a) $y = x$ (b) $y = x^2$ (c) $y = x^3$
 (d) $y = x^4$ (e) $y = x^5$ (f) $y = x^6$



132. **CONJETURA** Use los resultados del Ejercicio 131 para hacer una conjetura acerca de las gráficas de $y = x^7$ y $y = x^8$. Use una calculadora de gráficas para graficar las funciones y compare los resultados con su conjetura.

133. Use la información del Ejemplo 7 para hallar la rapidez media del auto de $t_1 = 0$ a $t_2 = 9$ segundos. Explique por qué el resultado es menor que el valor obtenido en el inciso (b) del Ejemplo 7.



134. Grafique cada una de las funciones con una calculadora de gráficas. Determine si la función es *par*, *impar* o *ninguna*.

$$f(x) = x^2 - x^4$$

$$g(x) = 2x^3 + 1$$

$$h(x) = x^5 - 2x^3 + x$$

$$j(x) = 2 - x^6 - x^8$$

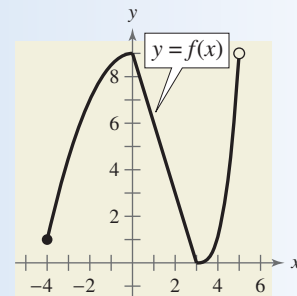
$$k(x) = x^5 - 2x^4 + x - 2$$

$$p(x) = x^9 + 3x^5 - x^3 + x$$

¿Qué observa acerca de las ecuaciones de funciones que son impares? ¿Qué es notorio acerca de las ecuaciones de las funciones que son pares? ¿Puede describir una forma de identificar una función como impar o par al inspeccionar la ecuación? ¿Puede describir una forma de identificar una función que no sea impar ni par al inspeccionar la ecuación?

135. **ESCRITURA** Escriba un breve párrafo que describa tres funciones que representen los comportamientos de cantidades entre 1998 y 2009. Describa una cantidad que disminuyó durante este tiempo, una que aumentó y una que fue constante. Presente gráficamente sus resultados.

136. **TOQUE FINAL** Use la gráfica de la función para contestar (a)-(e).



- (a) Encuentre el dominio y rango de f .
 (b) Encuentre el cero(s) de f .
 (c) Determine los intervalos en los que f es creciente, decreciente o constante.
 (d) Calcule cualesquier valores mínimo o máximo relativos de f .
 (e) ¿ f es par, impar o ninguna de éstas?

1.6 BIBLIOTECA DE FUNCIONES PRINCIPALES (O GENERATRICES)

Lo que debe aprender

- Identificar y graficar funciones lineales y cuadráticas.
- Identificar y graficar funciones cúbicas, de raíz cuadrada y recíprocas.
- Identificar y graficar funciones escalón y otras funciones definidas por tramos.
- Reconocer gráficas de funciones principales (o generatrices).

Por qué debe aprenderlo

Las funciones escalón se pueden usar para modelar situaciones reales. Por ejemplo, en el Ejercicio 69 en la página 72 usaremos una función escalón para modelar el costo de enviar un paquete de Los Ángeles a Miami para entrega al día siguiente.

Funciones lineales y cuadráticas

Uno de los objetivos de este texto es hacer posible que el estudiante reconozca las formas básicas de las gráficas de diferentes tipos de funciones. Por ejemplo, sabemos que la gráfica de la **función lineal** $f(x) = ax + b$ es una recta con pendiente $m = a$ e intersección con el eje y en $(0, b)$. La gráfica de la función lineal tiene las siguientes características.

- El dominio de la función es el conjunto de todos los números reales.
- El rango de la función es el conjunto de todos los números reales.
- La gráfica tiene una intersección con el eje x de $(-b/m, 0)$ y una intersección con el eje y de $(0, b)$.
- La gráfica es creciente si $m > 0$, decreciente si $m < 0$, y constante si $m = 0$.

Ejemplo 1 Escribir una función lineal

Escriba la función lineal f para la que $f(1) = 3$ y $f(4) = 0$.

Solución

Para determinar la ecuación de la recta que pasa por $(x_1, y_1) = (1, 3)$ y $(x_2, y_2) = (4, 0)$, primero hallamos la pendiente de la recta.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 3}{4 - 1} = \frac{-3}{3} = -1$$

A continuación, usamos la forma punto-pendiente de la ecuación de una recta.

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \text{Forma punto-pendiente}$$

$$y - 3 = -1(x - 1) \quad \text{Sustituir por } x_1, y_1 \text{ y } m.$$

$$y = -x + 4 \quad \text{Simplificar.}$$

$$f(x) = -x + 4 \quad \text{Notación de función}$$

La gráfica de esta función se muestra en la Figura 1.65.

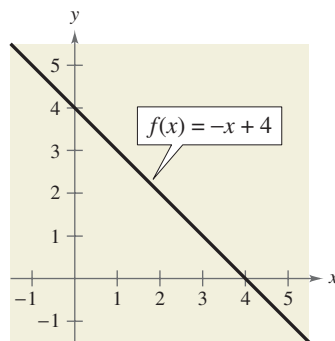


FIGURA 1.65

Hay dos tipos especiales de funciones lineales, la **función constante** y la **función identidad**. Una función constante tiene la forma

$$f(x) = c$$

y tiene el dominio de todos los números reales con rango formado por un solo número real c . La gráfica de una función constante es una recta horizontal, como se ve en la Figura 1.66. La función identidad tiene la forma

$$f(x) = x.$$

Su dominio y rango son el conjunto de todos los números reales. La función identidad tiene una pendiente de $m = 1$ e intersección con el eje y en $(0, 0)$. La gráfica de la función identidad es una recta para la cual cada coordenada x es igual a la correspondiente coordenada y . La gráfica es siempre creciente, como se ve en la Figura 1.67.

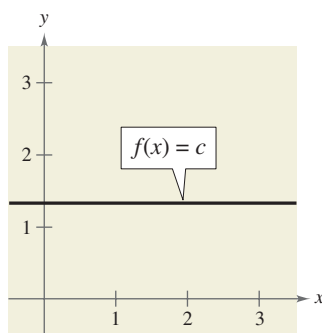


FIGURA 1.66

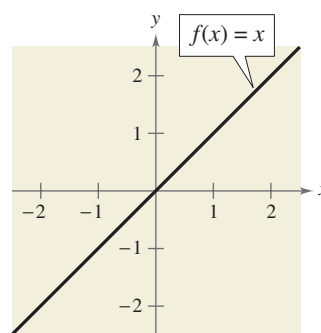


FIGURA 1.67

La gráfica de la **función cuadrada**

$$f(x) = x^2$$

es una curva en forma de U con las siguientes características.

- El dominio de la función es el conjunto de todos los números reales.
- El rango de la función es el conjunto de todos los números reales no negativos.
- La función es par.
- La gráfica tiene una intersección en $(0, 0)$.
- La gráfica es decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$ y creciente en el intervalo $(0, \infty)$.
- La gráfica es simétrica respecto al eje y .
- La gráfica tiene un mínimo relativo en $(0, 0)$.

La gráfica de la función cuadrada se muestra en la Figura 1.68.

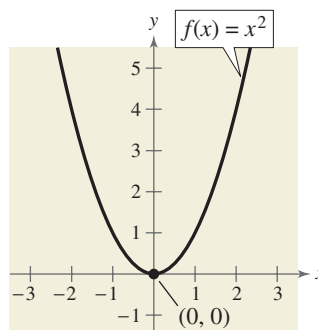


FIGURA 1.68

Funciones cúbicas, de raíz cuadrada y recíprocas

Las características básicas de las gráficas de las **funciones cúbicas, raíz cuadrada y recíprocas** se resumen a continuación.

1. La gráfica de la función *cúbica* $f(x) = x^3$ tiene las siguientes características.

- El dominio de la función es el conjunto de todos los números reales.
- El rango de la función es el conjunto de todos los números reales.
- La función es impar.
- La gráfica tiene una intersección en $(0, 0)$.
- La gráfica es creciente en el intervalo $(-\infty, \infty)$.
- La gráfica es simétrica respecto al origen.

La gráfica de la función cúbica se muestra en la Figura 1.69.

2. La gráfica de la función *raíz cuadrada* $f(x) = \sqrt{x}$ tiene las siguientes características.

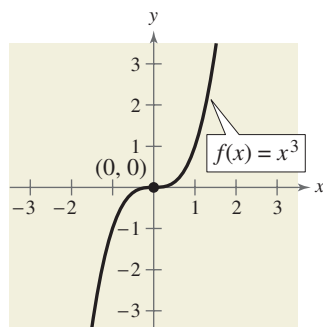
- El dominio de la función es el conjunto de todos los números reales no negativos.
- El rango de la función es el conjunto de todos los números reales no negativos.
- La gráfica tiene una intersección en $(0, 0)$.
- La gráfica es creciente en el intervalo $(0, \infty)$.

La gráfica de la función raíz cuadrada se ilustra en la Figura 1.70.

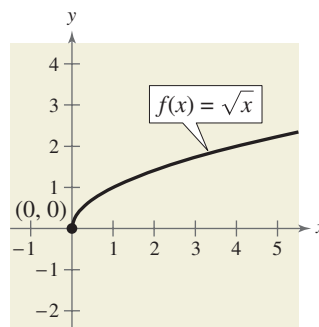
3. La gráfica de la función *recíproca* $f(x) = \frac{1}{x}$ tiene las siguientes características.

- El dominio de la función es $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.
- El rango de la función es $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.
- La función es impar.
- La gráfica no tiene ninguna intersección.
- La gráfica es decreciente en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$.
- La gráfica es simétrica respecto al origen.

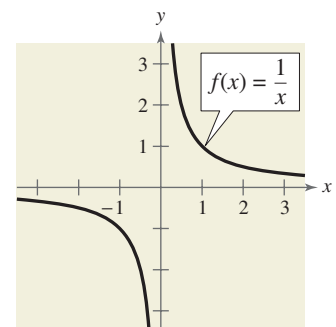
La gráfica de la función recíproca se muestra en la Figura 1.71.



Función cúbica
FIGURA 1.69



Función raíz cuadrada
FIGURA 1.70



Función recíproca
FIGURA 1.71

Funciones escalón y definidas por tramos

Las funciones cuyas gráficas se asemejan a conjuntos de escalones se denominan **funciones escalón**. La más famosa de las funciones de escalón es la **función mayor entero**, que se denota con $\llbracket x \rrbracket$ y se define como

$$f(x) = \llbracket x \rrbracket = \text{el mayor entero menor o igual a } x.$$

Algunos valores de la función mayor entero son como sigue.

$$\llbracket -1 \rrbracket = (\text{mayor entero} \leq -1) = -1$$

$$\llbracket -\frac{1}{2} \rrbracket = (\text{mayor entero} \leq -\frac{1}{2}) = -1$$

$$\llbracket \frac{1}{10} \rrbracket = (\text{mayor entero} \leq \frac{1}{10}) = 0$$

$$\llbracket 1.5 \rrbracket = (\text{mayor entero} \leq 1.5) = 1$$

La gráfica de la función mayor entero

$$f(x) = \llbracket x \rrbracket$$

tiene las siguientes características, como se muestra en la Figura 1.72.

- El dominio de la función es el conjunto de todos los números reales.
- El rango de la función es el conjunto de todos los enteros.
- La gráfica tiene intersección con el eje y en $(0, 0)$ e intersecciones con el eje x en el intervalo $[0, 1)$.
- La gráfica es constante entre cada par de enteros consecutivos.
- La gráfica salta verticalmente una unidad en cada valor entero.

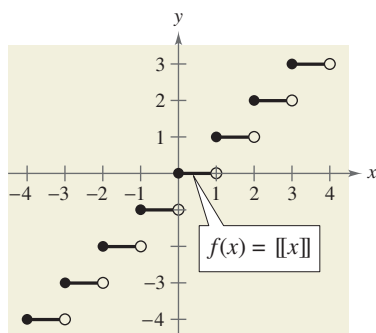


FIGURA 1.72

TECNOLOGÍA

Al graficar una función escalón, usted debe ajustar su calculadora de gráficas en el modo *dot* (puntos).

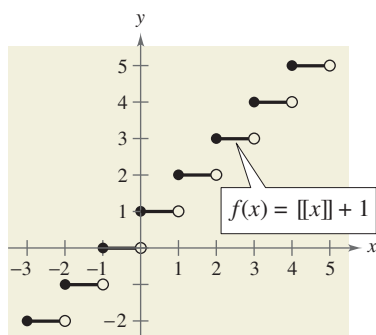


FIGURA 1.73

Ejemplo 2 Evaluar una función escalón

Evalúe la función cuando $x = -1$, 2 , y $\frac{3}{2}$.

$$f(x) = \llbracket x \rrbracket + 1$$

Solución

Para $x = -1$, el mayor entero es ≤ -1 es -1 , por lo que

$$f(-1) = \llbracket -1 \rrbracket + 1 = -1 + 1 = 0.$$

Para $x = 2$, el mayor entero es ≤ 2 es 2 , por lo que

$$f(2) = \llbracket 2 \rrbracket + 1 = 2 + 1 = 3.$$

Para $x = \frac{3}{2}$, el mayor entero es $\leq \frac{3}{2}$ es 1 , por lo que

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \llbracket \frac{3}{2} \rrbracket + 1 = 1 + 1 = 2.$$

Usted puede verificar sus respuestas al examinar la gráfica de $f(x) = \llbracket x \rrbracket + 1$ mostrada en la Figura 1.73.

PUNTO de repaso Ahora trate de hacer el Ejercicio 43.

Recuerde de la Sección 1.4 que una función definida por tramos está definida por dos o más ecuaciones en un dominio especificado. Para graficar una función definida por tramos, grafique cada ecuación por separado en el dominio especificado, como se ilustra en el Ejemplo 3.

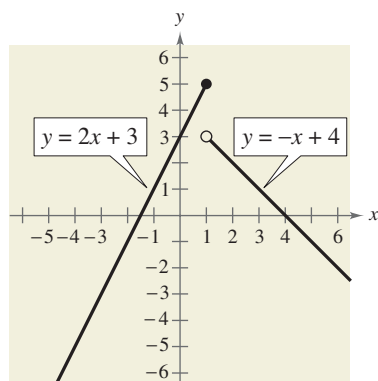


FIGURA 1.74

Ejemplo 3 Graficar una función definida por tramos

Trace la gráfica de

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x \leq 1 \\ -x + 4, & x > 1 \end{cases}$$

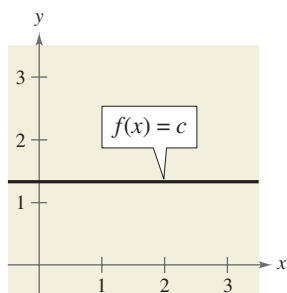
Solución

Esta función definida por tramos está compuesta de dos funciones lineales. En $x = 1$ y a la izquierda de $x = 1$ la gráfica es la recta $y = 2x + 3$, y a la derecha de $x = 1$ la gráfica es la recta $y = -x + 4$, como se ilustra en la Figura 1.74. Nótese que el punto $(1, 5)$ es un punto sólido y el punto $(1, 3)$ es un punto abierto. Esto es porque $f(1) = 2(1) + 3 = 5$.

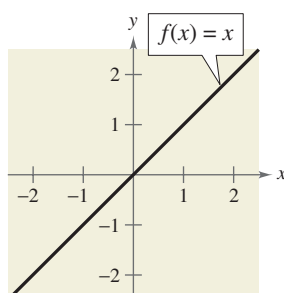
PUNTO de repaso Ahora trate de hacer el Ejercicio 57.

Funciones principales

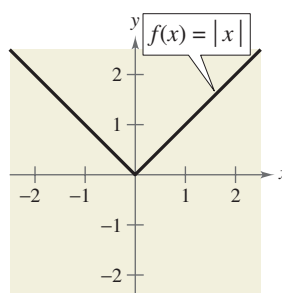
Las ocho gráficas ilustradas en la Figura 1.75 representan las funciones de uso más común en álgebra. La familiaridad del lector con las características básicas de estas sencillas gráficas le ayudarán a analizar las formas de gráficas más complicadas; en particular, las gráficas obtenidas de estas gráficas por las transformaciones rígidas y no rígidas que se estudian en la siguiente sección.



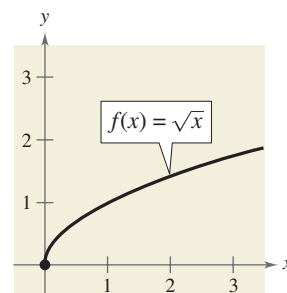
(a) Función constante



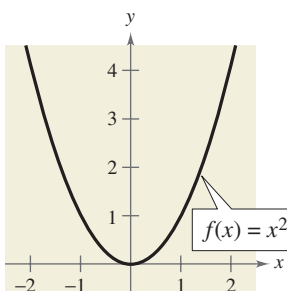
(b) Función identidad



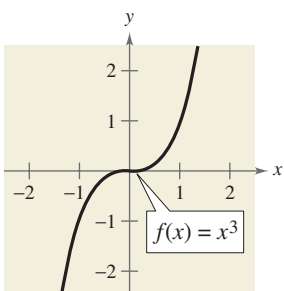
(c) Función valor absoluto



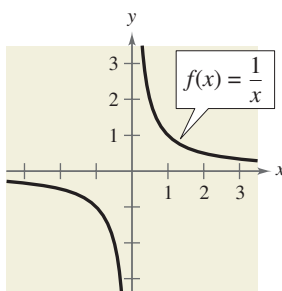
(d) Función raíz cuadrada



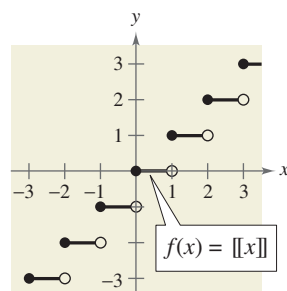
(e) Función cuadrática



(f) Función cúbica



(g) Función recíproca



(h) Función mayor entero

FIGURA 1.75

1.6

EJERCICIOS

VOCABULARIO

En los ejercicios 1-9, relacione cada función con su nombre.

1. $f(x) = \llbracket x \rrbracket$

2. $f(x) = x$

3. $f(x) = 1/x$

4. $f(x) = x^2$

5. $f(x) = \sqrt{x}$

6. $f(x) = c$

7. $f(x) = |x|$

8. $f(x) = x^3$

9. $f(x) = ax + b$

(a) función cuadrática

(b) función raíz cuadrada

(c) función cúbica

(d) función lineal

(e) función constante

(f) función valor absoluto

(g) función mayor entero

(h) función recíproca

(i) función identidad

10. Llene los espacios en blanco. La función constante y la función identidad son dos tipos especiales de funciones _____.

HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 11-18, (a) escriba la función lineal f tal que tenga los valores de la función indicada y (b) trace la gráfica de la función.

11. $f(1) = 4, f(0) = 6$

12. $f(-3) = -8, f(1) = 2$

13. $f(5) = -4, f(-2) = 17$

14. $f(3) = 9, f(-1) = -11$

15. $f(-5) = -1, f(5) = -1$

16. $f(-10) = 12, f(16) = -1$

17. $f(\frac{1}{2}) = -6, f(4) = -3$

18. $f(\frac{2}{3}) = -\frac{15}{2}, f(-4) = -11$

45. $h(x) = \llbracket x + 3 \rrbracket$

(a) $h(-2)$ (b) $h(\frac{1}{2})$ (c) $h(4.2)$ (d) $h(-21.6)$

46. $f(x) = 4\llbracket x \rrbracket + 7$

(a) $f(0)$ (b) $f(-1.5)$ (c) $f(6)$ (d) $f(\frac{5}{3})$

47. $h(x) = \llbracket 3x - 1 \rrbracket$

(a) $h(2.5)$ (b) $h(-3.2)$ (c) $h(\frac{7}{3})$ (d) $h(-\frac{21}{3})$

48. $k(x) = \llbracket \frac{1}{2}x + 6 \rrbracket$

(a) $k(5)$ (b) $k(-6.1)$ (c) $k(0.1)$ (d) $k(15)$

49. $g(x) = 3\llbracket x - 2 \rrbracket + 5$

(a) $g(-2.7)$ (b) $g(-1)$ (c) $g(0.8)$ (d) $g(14.5)$

50. $g(x) = -7\llbracket x + 4 \rrbracket + 6$

(a) $g(\frac{1}{8})$ (b) $g(9)$ (c) $g(-4)$ (d) $g(\frac{3}{2})$

En los Ejercicios 51-56, trace la gráfica de la función.

51. $g(x) = -\llbracket x \rrbracket$

52. $g(x) = 4\llbracket x \rrbracket$

53. $g(x) = \llbracket x \rrbracket - 2$

54. $g(x) = \llbracket x \rrbracket - 1$

55. $g(x) = \llbracket x + 1 \rrbracket$

56. $g(x) = \llbracket x - 3 \rrbracket$

En los Ejercicios 57-64, grafique la función.

57. $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x < 0 \\ 3 - x, & x \geq 0 \end{cases}$

58. $g(x) = \begin{cases} x + 6, & x \leq -4 \\ \frac{1}{2}x - 4, & x > -4 \end{cases}$

59. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{4+x}, & x < 0 \\ \sqrt{4-x}, & x \geq 0 \end{cases}$

60. $f(x) = \begin{cases} 1 - (x-1)^2, & x \leq 2 \\ \sqrt{x-2}, & x > 2 \end{cases}$

61. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 5, & x \leq 1 \\ -x^2 + 4x + 3, & x > 1 \end{cases}$

 En los Ejercicios 19-42, use una calculadora de gráficas para graficar la función. Asegúrese de escoger una pantalla apropiada.

19. $f(x) = 0.8 - x$

20. $f(x) = 2.5x - 4.25$

21. $f(x) = -\frac{1}{6}x - \frac{5}{2}$

22. $f(x) = \frac{5}{6} - \frac{2}{3}x$

23. $g(x) = -2x^2$

24. $h(x) = 1.5 - x^2$

25. $f(x) = 3x^2 - 1.75$

26. $f(x) = 0.5x^2 + 2$

27. $f(x) = x^3 - 1$

28. $f(x) = 8 - x^3$

29. $f(x) = (x-1)^3 + 2$

30. $g(x) = 2(x+3)^3 + 1$

31. $f(x) = 4\sqrt{x}$

32. $f(x) = 4 - 2\sqrt{x}$

33. $g(x) = 2 - \sqrt{x+4}$

34. $h(x) = \sqrt{x+2} + 3$

35. $f(x) = -1/x$

36. $f(x) = 4 + (1/x)$

37. $h(x) = 1/(x+2)$

38. $k(x) = 1/(x-3)$

39. $g(x) = |x| - 5$

40. $h(x) = 3 - |x|$

41. $f(x) = |x+4|$

42. $f(x) = |x-1|$

En los Ejercicios 43-50, evalúe la función para los valores indicados.

43. $f(x) = \llbracket x \rrbracket$

(a) $f(2.1)$ (b) $f(2.9)$ (c) $f(-3.1)$ (d) $f(\frac{7}{2})$

44. $g(x) = 2\llbracket x \rrbracket$

(a) $g(-3)$ (b) $g(0.25)$ (c) $g(9.5)$ (d) $g(\frac{11}{3})$

$$62. h(x) = \begin{cases} 3 - x^2, & x < 0 \\ x^2 + 2, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$63. h(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & x < -2 \\ 3 + x, & -2 \leq x < 0 \\ x^2 + 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$64. k(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \leq -1 \\ 2x^2 - 1, & -1 < x \leq 1 \\ 1 - x^2, & x > 1 \end{cases}$$



En los Ejercicios 65-68, (a) use una calculadora de gráficas para graficar la función, (b) exprese el dominio y rango de la función y (c) describa la forma de la gráfica.

$$65. s(x) = 2\left(\frac{1}{4}x - \left\lfloor \frac{1}{4}x \right\rfloor\right) \quad 66. g(x) = 2\left(\frac{1}{4}x - \left\lfloor \frac{1}{4}x \right\rfloor\right)^2$$

$$67. h(x) = 4\left(\frac{1}{2}x - \left\lfloor \frac{1}{2}x \right\rfloor\right) \quad 68. k(x) = 4\left(\frac{1}{2}x - \left\lfloor \frac{1}{2}x \right\rfloor\right)^2$$

69. CARGO POR ENTREGA El costo de enviar un paquete para entrega al día siguiente, de Los Ángeles a Miami, es \$23.40 para un paquete que pese hasta 1 libra sin que llegue a ésta, y \$3.75 por cada libra adicional o parte de una libra. Un modelo para el costo total C (en dólares) de enviar el paquete es $C = 23.40 + 3.75\lceil x \rceil$, $x > 0$, donde x es el peso en libras.

- Trace una gráfica del modelo.
- Determine el costo de enviar un paquete que pesa 9.25 libras.

70. CARGO POR ENTREGA El costo de enviar un paquete para entrega al día siguiente, de Nueva York a Atlanta, es \$22.65 para un paquete que pese hasta 1 libra sin que llegue a ésta, y \$3.70 por cada libra adicional o parte de una libra.

- Use la función mayor entero para crear un modelo del costo C de entregar el día siguiente un paquete que pesa x libras, $x > 0$.
- Trace la gráfica de la función.

71. SALARIOS A un mecánico se le pagan \$14.00 por hora por tiempo normal y tiempo y medio por hora extra. La función de salario semanal está dada por

$$W(h) = \begin{cases} 14h, & 0 < h \leq 40 \\ 21(h - 40) + 560, & h > 40 \end{cases}$$

donde h es el número de horas trabajadas en una semana.

- Evalúe $W(30)$, $W(40)$, $W(45)$ y $W(50)$.
- La compañía aumentó la semana regular de trabajo a 45 horas. ¿Cuál es la nueva función de salario semanal?

72. TORMENTA DE NIEVE Durante una tormenta de nieve que dura nueve horas, nieva a razón de 1 pulgada por hora durante las primeras 2 horas, a razón de 2 pulgadas por hora durante las siguientes 6 horas, y a razón de 0.5 pulgadas por hora para la hora final. Escriba y grafique una función definida por partes que dé la profundidad de la nieve durante la tormenta. ¿Cuántas pulgadas de nieve se acumularon por la tormenta?

73. INGRESOS La tabla siguiente muestra el ingreso mensual y (en miles de dólares) de una empresa de jardinería, por cada mes del año 2008, con $x = 1$ representando enero.



Mes, x	Ingresos, y
1	5.2
2	5.6
3	6.6
4	8.3
5	11.5
6	15.8
7	12.8
8	10.1
9	8.6
10	6.9
11	4.5
12	2.7

Un modelo matemático que representa estos datos es

$$f(x) = \begin{cases} -1.97x + 26.3 \\ 0.505x^2 - 1.47x + 6.3 \end{cases}$$



- Use una calculadora para graficar el modelo. ¿Cuál es el dominio de cada parte de la función definida por tramos? ¿Cómo puede usted indicarlo? Explique su razonamiento.
- Encuentre $f(5)$ y $f(11)$ e interprete sus resultados en el contexto del problema.
- ¿Cómo se comparan los valores obtenidos del modelo del inciso (a) con los valores de datos reales?

EXPLORACIÓN

¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 74 y 75 determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

- Una función definida por tramos siempre tendrá al menos una intersección con el eje x o al menos una intersección con el eje y .
- Una ecuación lineal siempre tendrá una intersección con el eje x y una intersección con el eje y .

76. TOQUE FINAL Por cada gráfica de f que se muestre en la Figura 1.75, haga lo siguiente.

- Encuentre el dominio y rango de f .
- Encuentre las intersecciones con los ejes x y y de la gráfica de f .
- Determine los intervalos en los cuales f es creciente, decreciente o constante.
- Determine si f es par, impar o ninguna de éstas. A continuación describa la simetría.

1.7 TRANSFORMACIONES DE FUNCIONES

Lo que debe aprender

- Usar desplazamientos verticales y horizontales para trazar gráficas de funciones.
- Usar reflexiones para trazar gráficas de funciones.
- Usar transformaciones no rígidas para trazar gráficas de funciones.

Por qué debe aprenderlo

Las transformaciones de funciones pueden utilizarse para modelar aplicaciones a la vida real. Por ejemplo, el Ejercicio 79 en la página 81 muestra cómo la transformación de una función puede usarse para modelar el número total de millas recorridas por vans, pickups y vehículos utilitarios deportivos en los Estados Unidos.

Desplazamiento de funciones

Numerosas funciones tienen gráficas que son transformaciones simples de las gráficas principales resumidas en la Sección 1.6. Por ejemplo, se puede obtener la gráfica de

$$h(x) = x^2 + 2$$

al desplazar la gráfica de $f(x) = x^2$ dos unidades *hacia arriba*, como se ilustra en la Figura 1.76. En notación de funciones, h y f están relacionadas como sigue.

$$h(x) = x^2 + 2 = f(x) + 2 \quad \text{Desplazamiento dos unidades hacia arriba}$$

Del mismo modo, se puede obtener la gráfica de

$$g(x) = (x - 2)^2$$

al desplazar la gráfica de $f(x) = x^2$ dos unidades *a la derecha*, como se ve en la Figura 1.77. En este caso, las funciones g y f tienen la siguiente relación.

$$g(x) = (x - 2)^2 = f(x - 2) \quad \text{Desplazamiento de dos unidades a la derecha}$$

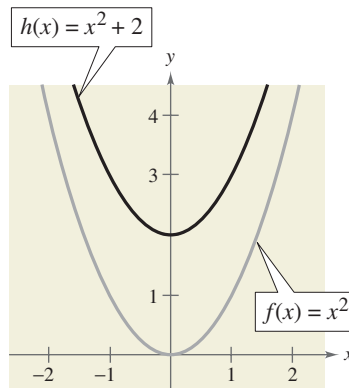


FIGURA 1.76

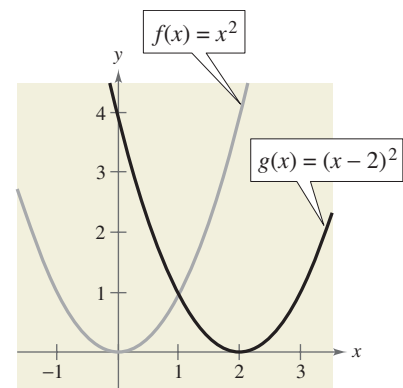


FIGURA 1.77

En la lista que sigue se resume esta exposición sobre los desplazamientos horizontal y vertical.

¡ATENCIÓN

En los numerales 3 y 4, asegúrese de ver que $h(x) = f(x - c)$ corresponde al desplazamiento *a la derecha* y $h(x) = f(x + c)$ corresponde al desplazamiento *a la izquierda* para $c > 0$.

Desplazamientos vertical y horizontal

Sea c un número real positivo. Los **desplazamientos vertical y horizontal** en la gráfica de $y = f(x)$ están representados como sigue.

- | | |
|---|-------------------|
| 1. Desplazamiento vertical c unidades <i>hacia arriba</i> : | $h(x) = f(x) + c$ |
| 2. Desplazamiento vertical c unidades <i>hacia abajo</i> : | $h(x) = f(x) - c$ |
| 3. Desplazamiento horizontal c unidades <i>a la derecha</i> : | $h(x) = f(x - c)$ |
| 4. Desplazamiento horizontal c unidades <i>a la izquierda</i> : | $h(x) = f(x + c)$ |

Algunas gráficas se pueden obtener de combinaciones de desplazamientos verticales y horizontales, como se demuestra en el Ejemplo 1(b). Los desplazamientos verticales y horizontales generan una *familia de funciones*, cada una con la misma forma pero en diferentes lugares del plano.

Ejemplo 1 Desplazamientos en las gráficas de una función

Use la gráfica de $f(x) = x^3$ para trazar la gráfica de cada función.

- a. $g(x) = x^3 - 1$ b. $h(x) = (x + 2)^3 + 1$

Solución

- a. Respecto a la gráfica de $f(x) = x^3$, la gráfica de

$$g(x) = x^3 - 1$$

es un desplazamiento de una unidad hacia abajo, como se ve en la Figura 1.78.

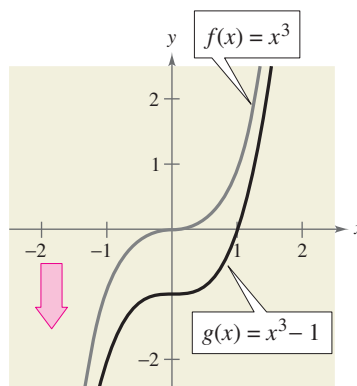


FIGURA 1.78

- b. Respecto a la gráfica de $f(x) = x^3$, la gráfica de

$$h(x) = (x + 2)^3 + 1$$

comprende un desplazamiento de dos unidades a la izquierda y de una unidad hacia arriba, como se ve en la Figura 1.79.

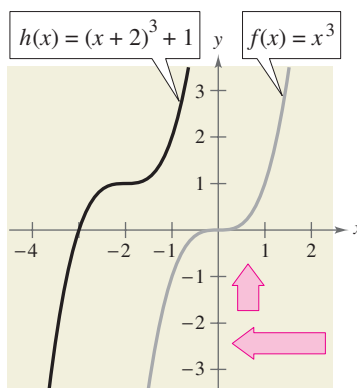


FIGURA 1.79

Tip de estudio

En el ejemplo 1(a), note que $g(x) = f(x) - 1$ y que en el ejemplo 1(b), $h(x) = f(x + 2) + 1$.

PUNTO de repaso → Ahora trate de hacer el Ejercicio 7.

En la Figura 1.79, nótese que se obtiene el mismo resultado si el desplazamiento vertical precede al desplazamiento horizontal, *o bien*, si el desplazamiento horizontal precede al vertical.

Reflexión de gráficas

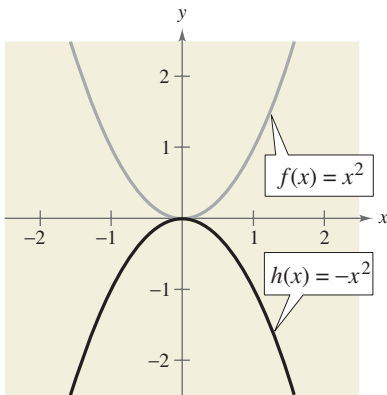


FIGURA 1.80

El segundo tipo común de transformación es una **reflexión**. Por ejemplo, si consideramos que el eje x es un espejo, la gráfica de

$$h(x) = -x^2$$

es la imagen espejo (o reflexión) de la gráfica de

$$f(x) = x^2,$$

como se ve en la Figura 1.80.

Reflexiones en los ejes de coordenadas

Las **reflexiones** en los ejes de coordenadas de la gráfica de $y = f(x)$ están representadas como sigue.

1. La reflexión en el eje x : $h(x) = -f(x)$
2. La reflexión en el eje y : $h(x) = f(-x)$

Ejemplo 2 Hallar ecuaciones a partir de gráficas

La gráfica de la función dada por

$$f(x) = x^4$$

se ilustra en la Figura 1.81. Cada una de las gráficas de la Figura 1.82 es una transformación de la gráfica de f . Encuentre una ecuación para cada una de estas funciones.

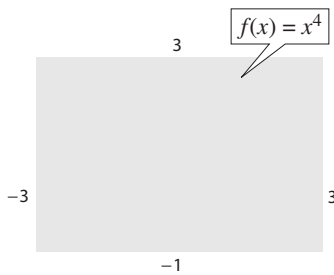
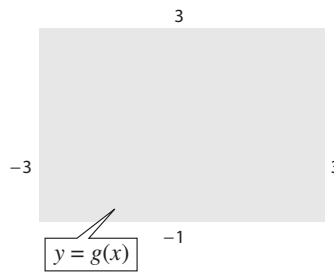
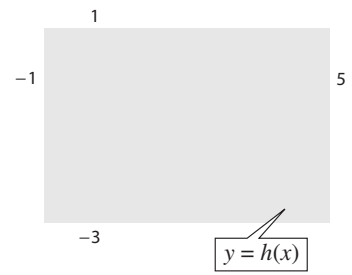


FIGURA 1.81



(a)

FIGURA 1.82



(b)

Solución

- a. La gráfica de g es una reflexión en el eje x seguida por un desplazamiento de la gráfica $f(x) = x^4$ dos unidades hacia arriba. Entonces, la ecuación para g es

$$g(x) = -x^4 + 2.$$

- b. La gráfica de h es un desplazamiento horizontal de tres unidades a la derecha seguido por una reflexión en el eje x de la gráfica de $f(x) = x^4$. Entonces, la ecuación para h es

$$h(x) = -(x - 3)^4.$$

PUNTO de repaso Ahora trate de hacer el Ejercicio 15.

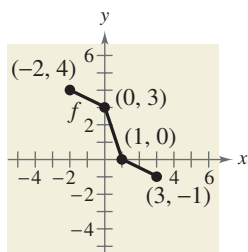


FIGURA PARA 13

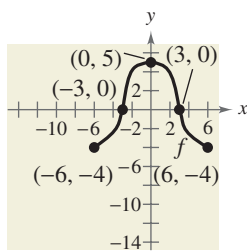
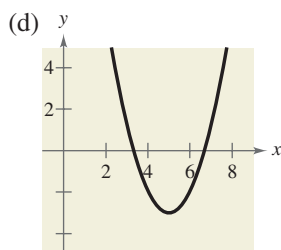
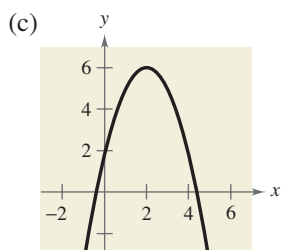
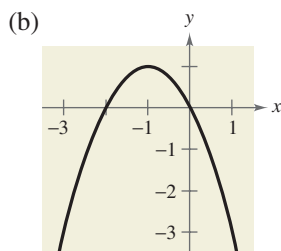
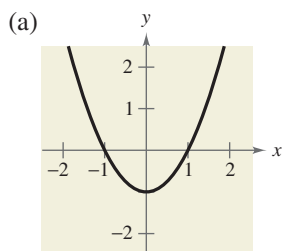
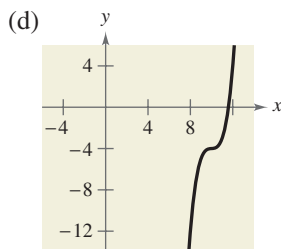
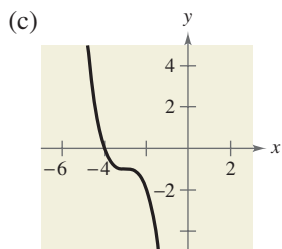
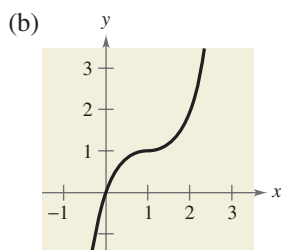
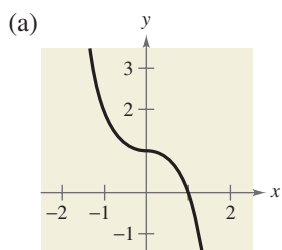


FIGURA PARA 14

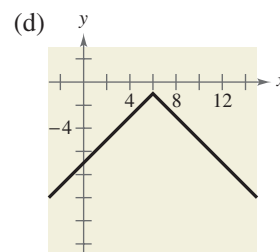
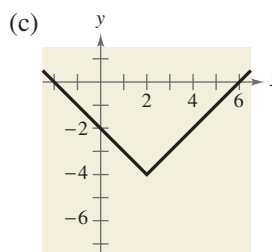
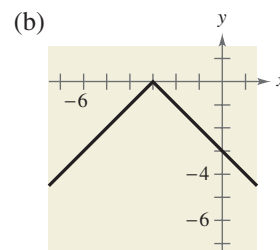
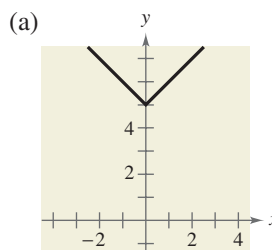
15. Use la gráfica de $f(x) = x^2$ para escribir una ecuación para cada función cuya gráfica se muestra.



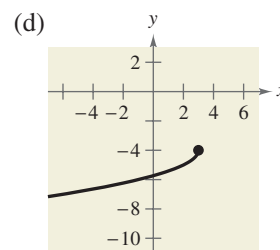
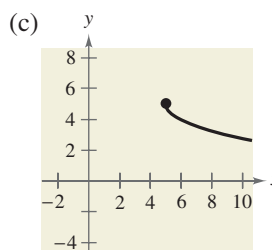
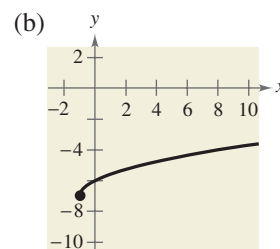
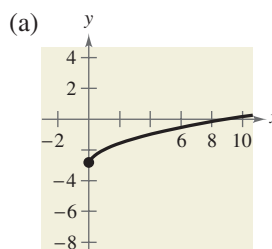
16. Use la gráfica de $f(x) = x^3$ para escribir una ecuación para cada función cuya gráfica se muestra.



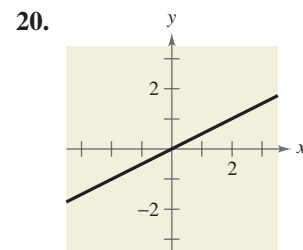
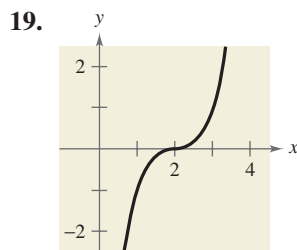
17. Use la gráfica de $f(x) = |x|$ para escribir una ecuación para cada función cuya gráfica se muestra.



18. Use la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ para escribir una ecuación para cada función cuya gráfica se muestra.



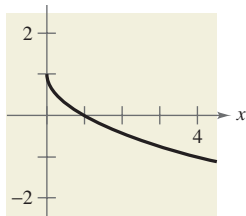
En los Ejercicios 19-24, identifique la función principal y la transformación mostrada en la gráfica. Escriba una ecuación para la función mostrada en la gráfica.



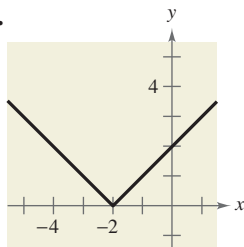
21.

22.

23.



24.



En los Ejercicios 25-54, g está relacionada con una de las funciones principales descritas en la Sección 1.6. (a) Identifique la función principal f . (b) Describa la sucesión de transformaciones de f a g . (c) Trace la gráfica de g . (d) Use notación de funciones para escribir g en términos de f .

25. $g(x) = 12 - x^2$

26. $g(x) = (x - 8)^2$

27. $g(x) = x^3 + 7$

28. $g(x) = -x^3 - 1$

29. $g(x) = \frac{2}{3}x^2 + 4$

30. $g(x) = 2(x - 7)^2$

31. $g(x) = 2 - (x + 5)^2$

32. $g(x) = -(x + 10)^2 + 5$

33. $g(x) = 3 + 2(x - 4)^2$

34. $g(x) = -\frac{1}{4}(x + 2)^2 - 2$

35. $g(x) = \sqrt{3x}$

36. $g(x) = \sqrt{\frac{1}{4}x}$

37. $g(x) = (x - 1)^3 + 2$

38. $g(x) = (x + 3)^3 - 10$

39. $g(x) = 3(x - 2)^3$

40. $g(x) = -\frac{1}{2}(x + 1)^3$

41. $g(x) = -|x| - 2$

42. $g(x) = 6 - |x + 5|$

43. $g(x) = -|x + 4| + 8$

44. $g(x) = |-x + 3| + 9$

45. $g(x) = -2|x - 1| - 4$

46. $g(x) = \frac{1}{2}|x - 2| - 3$

47. $g(x) = 3 - \lfloor x \rfloor$

48. $g(x) = 2\lfloor x + 5 \rfloor$

49. $g(x) = \sqrt{x - 9}$

50. $g(x) = \sqrt{x + 4} + 8$

51. $g(x) = \sqrt{7 - x} - 2$

52. $g(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{x + 3} - 1$

53. $g(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x} - 4$

54. $g(x) = \sqrt{3x} + 1$

En los Ejercicios 55-62, escriba una ecuación para la función descrita por las características dadas.

55. La forma de $f(x) = x^2$, pero desplazada tres unidades a la derecha y siete unidades hacia abajo.

56. La forma de $f(x) = x^2$, pero desplazada dos unidades a la izquierda, nueve unidades hacia arriba y reflejada en el eje x .

57. La forma de $f(x) = x^3$, pero desplazada 13 unidades a la derecha.

58. La forma de $f(x) = x^3$, pero desplazada seis unidades a la izquierda, seis unidades hacia abajo y reflejada en el eje y .

59. La forma de $f(x) = |x|$, pero desplazada 12 unidades hacia arriba y reflejada en el eje x .

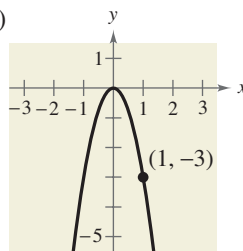
60. La forma de $f(x) = |x|$, pero desplazada cuatro unidades a la izquierda y ocho unidades hacia abajo.

61. La forma de $f(x) = \sqrt{x}$, pero desplazada seis unidades a la izquierda y reflejada en los ejes x y y .

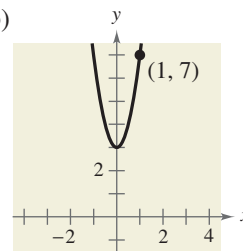
62. La forma de $f(x) = \sqrt{x}$, pero desplazada nueve unidades hacia abajo y reflejada en los ejes x y y .

63. Use la gráfica de $f(x) = x^2$ para escribir una ecuación para cada función cuya gráfica se muestra.

(a)

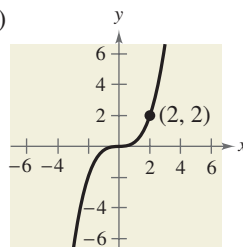


(b)

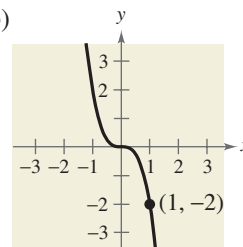


64. Use la gráfica de $f(x) = x^3$ para escribir una ecuación para cada función cuya gráfica se muestra.

(a)

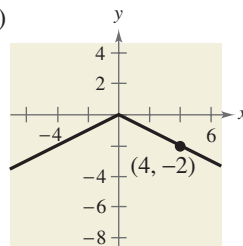


(b)

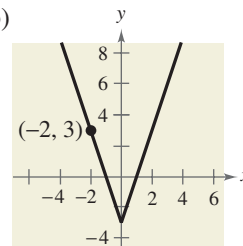


65. Use la gráfica de $f(x) = |x|$ para escribir una ecuación para cada función cuya gráfica se muestra.

(a)

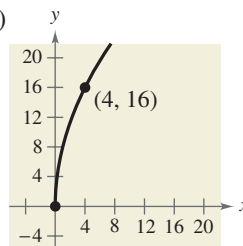


(b)

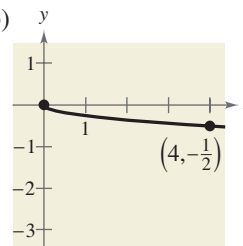


66. Use la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ para escribir una ecuación para cada función cuya gráfica se muestra.

(a)



(b)



Composición de funciones

Otra forma de combinar dos funciones es formar la **composición** de una con la otra. Por ejemplo, si $f(x) = x^2$ y $g(x) = x + 1$, la composición de f con g es

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f(x + 1) \\ &= (x + 1)^2. \end{aligned}$$

La composición se representa con $f \circ g$, lo que se lee “ f compuesta con g .”

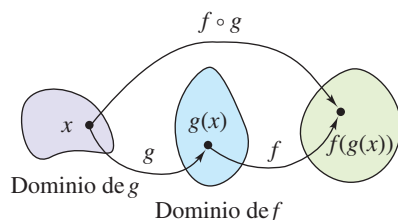


FIGURA 1.90

Definición de la composición de funciones

La **composición** de la función f con la función g es

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

El dominio de $f \circ g$ es el conjunto de toda x en el dominio de g tal que $g(x)$ es en el dominio de f . (Vea Figura 1.90.)

Ejemplo 5 Composición de funciones

Dadas $f(x) = x + 2$ y $g(x) = 4 - x^2$, encuentre lo siguiente.

- a. $(f \circ g)(x)$ b. $(g \circ f)(x)$ c. $(g \circ f)(-2)$

Solución

- a. La composición de f con g es como sigue.

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) && \text{Definición de } f \circ g \\ &= f(4 - x^2) && \text{Definición de } g(x) \\ &= (4 - x^2) + 2 && \text{Definición de } f(x) \\ &= -x^2 + 6 && \text{Simplificar.} \end{aligned}$$

- b. La composición de g con f es como sigue:

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) && \text{Definición de } g \circ f \\ &= g(x + 2) && \text{Definición de } f(x) \\ &= 4 - (x + 2)^2 && \text{Definición de } g(x) \\ &= 4 - (x^2 + 4x + 4) && \text{Expandir.} \\ &= -x^2 - 4x && \text{Simplificar.} \end{aligned}$$

Nótese que, en este caso, $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$.

- c. Usando el resultado del inciso (b) se puede escribir lo siguiente.

$$\begin{aligned} (g \circ f)(-2) &= -(-2)^2 - 4(-2) && \text{Sustituir.} \\ &= -4 + 8 && \text{Simplificar.} \\ &= 4 && \text{Simplificar.} \end{aligned}$$

Tip de estudio

Las siguientes tablas de valores ayudan a ilustrar la composición $(f \circ g)(x)$ dada en el Ejemplo 5

x	0	1	2	3
$g(x)$	4	3	0	-5

$g(x)$	4	3	0	-5
$f(g(x))$	6	5	2	-3

x	0	1	2	3
$f(g(x))$	6	5	2	-3

Nótese que las primeras dos tablas se pueden combinar (o “componer”) para producir los valores dados en la tercera tabla.

PUNTO de repaso Ahora trate de hacer el Ejercicio 37.

Ejemplo 6 Hallar el dominio de una función compuesta

Encuentre el dominio de $(f \circ g)(x)$ para las funciones dadas por

$$f(x) = x^2 - 9 \quad \text{y} \quad g(x) = \sqrt{9 - x^2}.$$

Solución algebraica

La composición de las funciones es como sigue.

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(\sqrt{9 - x^2}) \\ &= (\sqrt{9 - x^2})^2 - 9 \\ &= 9 - x^2 - 9 \\ &= -x^2\end{aligned}$$

De esto, podría parecer que el dominio de la composición es el conjunto de todos los números reales, pero no es así. Como el dominio de f es el conjunto de todos los números reales y el dominio de g es $[-3, 3]$, el dominio de $f \circ g$ es $[-3, 3]$.

PUNTO de repaso

Ahora trate de hacer el Ejercicio 41.

Solución gráfica

Se puede usar calculadora de gráficas para graficar la composición de las funciones $(f \circ g)(x)$ como $y = (\sqrt{9 - x^2})^2 - 9$. Ingrese las funciones como sigue.

$$y_1 = \sqrt{9 - x^2} \quad y_2 = y_1^2 - 9$$

Grafique y_2 , como se ve en la Figura 1.91. Use el comando *trace* para determinar que las coordenadas x de puntos en la gráfica se prolongan de -3 a 3 . Entonces, es posible calcular gráficamente que el dominio de $f \circ g$ es $[-3, 3]$.

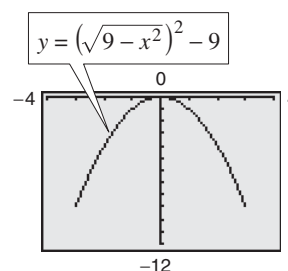


FIGURA 1.91

En los Ejemplos 5 y 6 formamos la composición de dos funciones dadas. En cálculo, también es importante identificar dos funciones que conforman una función compuesta determinada. Por ejemplo, la función h dada por $h(x) = (3x - 5)^3$ es la composición de f con g , donde $f(x) = x^3$ y $g(x) = 3x - 5$. Esto es,

$$h(x) = (3x - 5)^3 = [g(x)]^3 = f(g(x)).$$

Básicamente, para “descomponer” una función compuesta, se busca una función “interior” y una “exterior”. En la función h citada líneas antes, $g(x) = 3x - 5$ es la función interior y $f(x) = x^3$ es la exterior.

Ejemplo 7 Descomposición de una función compuesta

Escriba la función dada por $h(x) = \frac{1}{(x - 2)^2}$ como composición de dos funciones.

Solución

Una forma de escribir h como composición de dos funciones es tomar la función interior como $g(x) = x - 2$ y la función exterior como

$$f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}.$$

A continuación escribimos

$$h(x) = \frac{1}{(x - 2)^2} = (x - 2)^{-2} = f(x - 2) = f(g(x)).$$

PUNTO de repaso

Ahora trate de hacer el Ejercicio 53.

Aplicación

Ejemplo 8 Cantidad de bacterias

El número N de bacterias en un alimento refrigerado está dado por

$$N(T) = 20T^2 - 80T + 500, \quad 2 \leq T \leq 14$$

donde T es la temperatura del alimento en grados Celsius. Cuando el alimento se saca del refrigerador, la temperatura del alimento está dada por

$$T(t) = 4t + 2, \quad 0 \leq t \leq 3$$

donde t es el tiempo en horas. (a) Encuentre la composición $N(T(t))$ e interprete su significado en el contexto. (b) Encuentre el tiempo cuando la cantidad de bacterias llega a 2000.

Solución

$$\begin{aligned} \text{a. } N(T(t)) &= 20(4t + 2)^2 - 80(4t + 2) + 500 \\ &= 20(16t^2 + 16t + 4) - 320t - 160 + 500 \\ &= 320t^2 + 320t + 80 - 320t - 160 + 500 \\ &= 320t^2 + 420 \end{aligned}$$

La función compuesta $N(T(t))$ representa el número de bacterias en el alimento como función del tiempo que el alimento ha estado fuera de refrigeración.

- b. La cantidad de bacterias llegará a 2000 cuando $320t^2 + 420 = 2000$. Resuelva esta ecuación para hallar que la cantidad llegará a 2000 cuando $t \approx 2.2$ horas. Cuando resuelva esta ecuación, observe que el valor negativo es rechazado porque no está en el dominio de la función compuesta.

PUNTO de repaso → Ahora trate de hacer el Ejercicio 73.

DISCUSIÓN EN CLASE

Análisis de combinaciones aritméticas de funciones

- a. Use las gráficas de f y $(f + g)$ de la Figura 1.92 para hacer una tabla que muestre los valores de $g(x)$ cuando $x = 1, 2, 3, 4, 5$ y 6 . Explique su razonamiento.
- b. Use las gráficas de f y $(f - h)$ de la Figura 1.92 para hacer una tabla que muestre los valores de $h(x)$ cuando $x = 1, 2, 3, 4, 5$ y 6 . Explique su razonamiento.

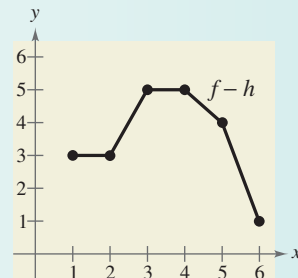
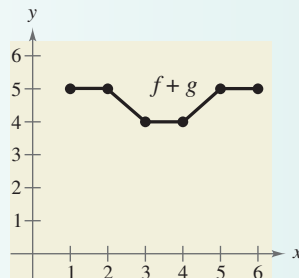
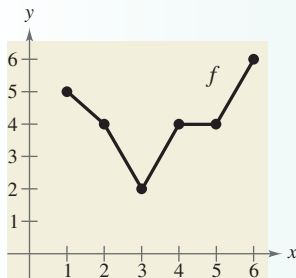


FIGURA 1.92

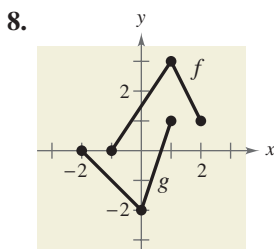
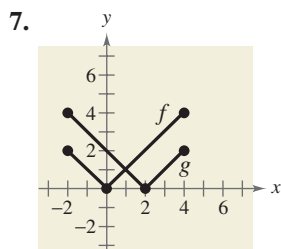
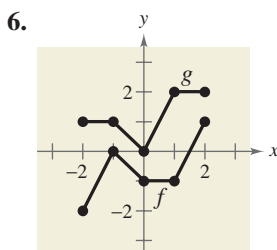
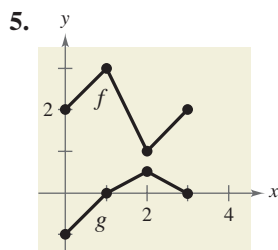
1.8 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.**VOCABULARIO:** Llene los espacios en blanco.

1. Dos funciones f y g pueden ser combinadas por las operaciones aritméticas de _____, _____, _____, y _____ para crear nuevas funciones.
2. La _____ de una función f con g es $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.
3. El dominio de $(f \circ g)$ es toda x en el dominio de g tal que _____ esté en el dominio de f .
4. Para descomponer una función compuesta, busque una función _____ y una función _____.

HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 5-8, use las gráficas de f y g para graficar $h(x) = (f + g)(x)$. Para imprimir una copia ampliada de la gráfica, visite el sitio web www.mathgraphs.com.



En los Ejercicios 9-16, encuentre (a) $(f + g)(x)$, (b) $(f - g)(x)$, (c) $(fg)(x)$ y (d) $(f/g)(x)$. ¿Cuál es el dominio de f/g ?

9. $f(x) = x + 2$, $g(x) = x - 2$
10. $f(x) = 2x - 5$, $g(x) = 2 - x$
11. $f(x) = x^2$, $g(x) = 4x - 5$
12. $f(x) = 3x + 1$, $g(x) = 5x - 4$
13. $f(x) = x^2 + 6$, $g(x) = \sqrt{1 - x}$
14. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$, $g(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$
15. $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{1}{x^2}$
16. $f(x) = \frac{x}{x + 1}$, $g(x) = x^3$

En los Ejercicios 17-28, evalúe la función indicada para $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = x - 4$.

17. $(f + g)(2)$
18. $(f - g)(-1)$

19. $(f - g)(0)$
20. $(f + g)(1)$
21. $(f - g)(3t)$
22. $(f + g)(t - 2)$
23. $(fg)(6)$
24. $(fg)(-6)$
25. $(f/g)(5)$
26. $(f/g)(0)$
27. $(f/g)(-1) - g(3)$
28. $(fg)(5) + f(4)$

En los Ejercicios 29-32, grafique las funciones f , g y $f + g$ en el mismo sistema de ejes coordenados.

29. $f(x) = \frac{1}{2}x$, $g(x) = x - 1$
30. $f(x) = \frac{1}{3}x$, $g(x) = -x + 4$
31. $f(x) = x^2$, $g(x) = -2x$
32. $f(x) = 4 - x^2$, $g(x) = x$



RAZONAMIENTO GRÁFICO En los Ejercicios 33-36, use una calculadora de gráficas para graficar f , g y $f + g$ en la misma pantalla. ¿Cuál función aporta más a la magnitud de la suma cuando $0 \leq x \leq 2$? ¿Cuál función aporta más a la magnitud de la suma cuando $x > 6$?

33. $f(x) = 3x$, $g(x) = -\frac{x^3}{10}$
34. $f(x) = \frac{x}{2}$, $g(x) = \sqrt{x}$
35. $f(x) = 3x + 2$, $g(x) = -\sqrt{x + 5}$
36. $f(x) = x^2 - \frac{1}{2}$, $g(x) = -3x^2 - 1$

En los Ejercicios 37-40, encuentre (a) $f \circ g$, (b) $g \circ f$ y (c) $g \circ g$.

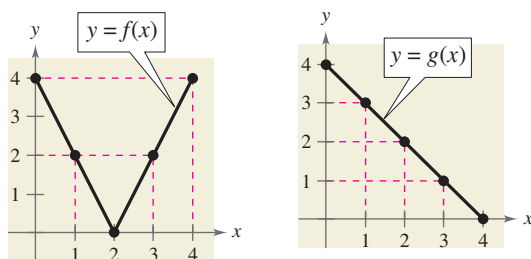
37. $f(x) = x^2$, $g(x) = x - 1$
38. $f(x) = 3x + 5$, $g(x) = 5 - x$
39. $f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$, $g(x) = x^3 + 1$
40. $f(x) = x^3$, $g(x) = \frac{1}{x}$

En los Ejercicios 41-48, encuentre (a) $f \circ g$ y (b) $g \circ f$. Encuentre el dominio de cada función y cada función compuesta.

41. $f(x) = \sqrt{x + 4}$, $g(x) = x^2$
42. $f(x) = \sqrt[3]{x - 5}$, $g(x) = x^3 + 1$

43. $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = \sqrt{x}$
 44. $f(x) = x^{2/3}$, $g(x) = x^6$
 45. $f(x) = |x|$, $g(x) = x + 6$
 46. $f(x) = |x - 4|$, $g(x) = 3 - x$
 47. $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x + 3$
 48. $f(x) = \frac{3}{x^2 - 1}$, $g(x) = x + 1$

En los Ejercicios 49-52, use las gráficas de f y g para evaluar las funciones.



49. (a) $(f + g)(3)$ (b) $(f/g)(2)$
 50. (a) $(f - g)(1)$ (b) $(fg)(4)$
 51. (a) $(f \circ g)(2)$ (b) $(g \circ f)(2)$
 52. (a) $(f \circ g)(1)$ (b) $(g \circ f)(3)$

f En los Ejercicios 53-60, encuentre dos funciones f y g tales que $(f \circ g)(x) = h(x)$. (Hay numerosas respuestas correctas.)

53. $h(x) = (2x + 1)^2$ 54. $h(x) = (1 - x)^3$
 55. $h(x) = \sqrt[3]{x^2 - 4}$ 56. $h(x) = \sqrt{9 - x}$
 57. $h(x) = \frac{1}{x + 2}$ 58. $h(x) = \frac{4}{(5x + 2)^2}$
 59. $h(x) = \frac{-x^2 + 3}{4 - x^2}$ 60. $h(x) = \frac{27x^3 + 6x}{10 - 27x^3}$

61. **DISTANCIA DE FRENADO** El departamento de investigación y desarrollo de un fabricante de automóviles ha determinado que cuando requiere que un conductor se detenga rápidamente para evitar un accidente, la distancia (en pies) que el auto se desplaza durante el tiempo de reacción del conductor está dada por $R(x) = \frac{3}{4}x$, donde x es la velocidad del auto en millas por hora. La distancia (en pies) recorrida cuando el conductor está frenando está dada por $B(x) = \frac{1}{15}x^2$.
- (a) Encuentre la función que represente la distancia total de frenado T .
- (b) Grafique las funciones R , B y T en el mismo conjunto de ejes de coordenadas para $0 \leq x \leq 60$.
- (c) ¿Cuál función aporta más a la magnitud de la suma a magnitudes de velocidad más altas? Explique.

62. **VENTAS** De 2003 a 2008, las ventas R_1 (en miles de dólares) para uno de dos restaurantes propiedad de la misma compañía se pueden modelar con

$$R_1 = 480 - 8t - 0.8t^2, \quad t = 3, 4, 5, 6, 7, 8$$

donde $t = 3$ representa 2003. Durante el mismo periodo de seis años, las ventas R_2 (en miles de dólares) para el segundo restaurante pueden modelarse con

$$R_2 = 254 + 0.78t, \quad t = 3, 4, 5, 6, 7, 8.$$

- (a) Escriba una función R_3 que represente el total de ventas de los dos restaurantes propiedad de la misma compañía.



- (b) Use una calculadora de gráficas para graficar R_1 , R_2 y R_3 en la misma pantalla.

63. **ESTADÍSTICAS VITALES** Sea $b(t)$ el número de nacimientos en Estados Unidos en el año t , y represente con $d(t)$ el número de fallecimientos en Estados Unidos en el año t , donde $t = 0$ corresponde a 2000.

- (a) Si $p(t)$ es la población de Estados Unidos en el año t , encuentre la función $c(t)$ que represente el porcentaje de cambio en la población estadounidense.
- (b) Interprete el valor de $c(5)$.

64. **MASCOTAS** Sea $d(t)$ el número de perros en Estados Unidos en el año t , y sea $c(t)$ el número de gatos en ese país en el año t , donde $t = 0$ corresponde a 2000.

- (a) Encuentre la función $p(t)$ que represente el número total de perros y gatos en Estados Unidos.
- (b) Interprete el valor de $p(5)$.
- (c) Represente con $n(t)$ la población de Estados Unidos en el año t , donde $t = 0$ corresponde a 2000. Encuentre e interprete

$$h(t) = \frac{p(t)}{n(t)}.$$

65. **PERSONAL MILITAR** Los números totales de personal de la Marina N (en miles), y del personal de Infantería de Marina M (en miles) de 2000 a 2007 puede calcularse con los modelos

$$N(t) = 0.192t^3 - 3.88t^2 + 12.9t + 372$$

y

$$M(t) = 0.035t^3 - 0.23t^2 + 1.7t + 172$$

donde t representa el año, con $t = 0$ correspondiente a 2000. (Fuente: Departamento de Defensa)

- (a) Encuentre e interprete $(N + M)(t)$. Evalúe esta función para $t = 0, 6$ y 12 .
- (b) Encuentre e interprete $(N - M)(t)$. Evalúe esta función para $t = 0, 6$ y 12 .

- 66. DEPORTES** El número de personas que juega tenis T (en millones) en Estados Unidos, de 2000 a 2007, pueden calcularse con la función

$$T(t) = 0.0233t^4 - 0.3408t^3 + 1.556t^2 - 1.86t + 22.8$$

y la población P de Estados Unidos (en millones), de 2000 a 2007 puede calcularse con la función $P(t) = 2.78t + 282.5$, donde t corresponde al año, con $t = 0$ correspondiente a 2000. (Fuente: Tennis Industry Association, U.S. Census Bureau)

- (a) Encuentre e interprete $h(t) = \frac{T(t)}{P(t)}$.
(b) Evalúe la función del inciso (a) para $t = 0, 3$ y 6 .

NACIMIENTOS Y FALLECIMIENTOS En los Ejercicios 67 y 68, use la tabla, que muestra el número total de nacimientos B (en miles) y fallecimientos D (en miles) en Estados Unidos, de 1990 a 2006. (Fuente: U.S. Census Bureau.) (Fuente: U.S. Census Bureau)



Año, t	Nacimientos, B	Fallecimientos, D
1990	4158	2148
1991	4111	2170
1992	4065	2176
1993	4000	2269
1994	3953	2279
1995	3900	2312
1996	3891	2315
1997	3881	2314
1998	3942	2337
1999	3959	2391
2000	4059	2403
2001	4026	2416
2002	4022	2443
2003	4090	2448
2004	4112	2398
2005	4138	2448
2006	4266	2426

Los modelos para estos datos son

$$B(t) = -0.197t^3 + 8.96t^2 - 90.0t + 4180$$

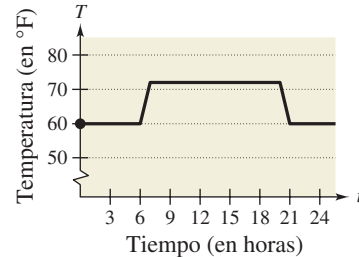
y

$$D(t) = -1.21t^2 + 38.0t + 2137$$

donde t representa el año, con $t = 0$ correspondiente a 1990.

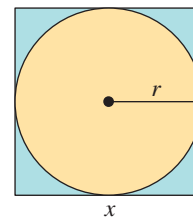
- 67.** Encuentre e interprete $(B - D)(t)$.
68. Evalúe $B(t)$, $D(t)$ y $(B - D)(t)$ para los años 2010 y 2012. ¿Qué representa el valor de cada función?

- 69. RAZONAMIENTO GRÁFICO** Un termostato controlado electrónicamente en una casa está programado para bajar la temperatura en forma automática durante la noche. La temperatura T en la casa (en grados Fahrenheit) está dada en términos de t , el tiempo en horas en un reloj de 24 horas (vea figura).



- (a) Explique por qué T es una función de t .
(b) Calcule $T(4)$ y $T(15)$.
(c) El termostato se reprograma para producir una temperatura H para la cual $H(t) = T(t - 1)$. ¿Cómo es que esto cambia la temperatura?
(d) El termostato se reprograma para producir una temperatura H para la cual $H(t) = T(t) - 1$. ¿Cómo es que esto cambia la temperatura?
(e) Escriba una función definida por partes que represente la gráfica.

- 70. GEOMETRÍA** Un cimientado cuadrado de concreto se prepara como base para un tanque cilíndrico (vea figura).



- (a) Escriba el radio r del tanque como función de la longitud x de los lados del cuadrado.
(b) Escriba el área A de la base circular del tanque como función del radio r .
(c) Encuentre e interprete $(A \circ r)(x)$.

- 71. RIZOS** Una piedra se deja caer en una charca con aguas en calma, haciendo que se produzcan rizos en forma de círculos concéntricos. El radio r (en pies) del rizo exterior es $r(t) = 0.6t$, donde t es el tiempo en segundos después que la piedra cae en el agua. El área A del círculo está dada por la función $A(r) = \pi r^2$. Encuentre e interprete $(A \circ r)(t)$.

- 72. CONTAMINACIÓN** La dispersión de un contaminante es creciente en forma circular en la superficie de un lago. El radio del contaminante se puede modelar con $r(t) = 5.25\sqrt{t}$, donde r es el radio en metros y t es el tiempo en horas desde la contaminación.

- (a) Encuentre una función que dé el área A de la fuga circular en términos del tiempo t desde que empezó la dispersión.
- (b) Encuentre el tamaño del área contaminada después de 36 horas.
- (c) Encuentre cuándo el tamaño del área contaminada es de 6250 metros cuadrados.

73. CANTIDAD DE BACTERIAS El número N de bacterias en un alimento refrigerado está dado por

$$N(T) = 10T^2 - 20T + 600, \quad 1 \leq T \leq 20$$

donde T es la temperatura del alimento en grados Celsius. Cuando el alimento se saca de refrigeración, su temperatura está dada por

$$T(t) = 3t + 2, \quad 0 \leq t \leq 6$$

donde t es el tiempo en horas.

- (a) Encuentre la composición $N(T(t))$ e interprete su significado en el contexto.
- (b) Encuentre la cantidad de bacterias después de 0.5 horas.
- (c) Encuentre el tiempo cuando la cantidad de bacterias llegue a 1500.

74. COSTO El costo semanal C de producir x unidades en un proceso de manufactura está dado por $C(x) = 60x + 750$. El número de unidades x producidas en t horas está dado por $x(t) = 50t$.

- (a) Encuentre e interprete $(C \circ x)(t)$.
- (b) Encuentre el costo de las unidades producidas en 4 horas.
- (c) Encuentre el tiempo que debe transcurrir para que el costo aumente a \$15 000.

75. SALARIO Usted es representante de ventas de una fábrica de ropa; se le paga un salario anual, más un bono de 3% de sus ventas de más de \$500 000. Considere las dos funciones dadas tanto por $f(x) = x - 500\,000$ como por $g(x) = 0.03x$. Si x es mayor a \$500 000, ¿cuál de lo siguiente representa el bono de usted? Explique su razonamiento.

- (a) $f(g(x))$
- (b) $g(f(x))$

76. CONCIENCIA DE CONSUMIDORES El precio sugerido de minorista para un nuevo auto híbrido es p dólares. El distribuidor anuncia una rebaja de fábrica de \$2000 y un descuento de 10%.

- (a) Escriba una función R en términos de p que dé el costo del auto híbrido después de recibir la rebaja de la fábrica.
- (b) Escriba una función S en términos de p que dé el costo del auto híbrido después de recibir el descuento del distribuidor.
- (c) Forme las funciones compuestas $(R \circ S)(p)$ y $(S \circ R)(p)$ e interprete cada una de ellas.
- (d) Encuentre $(R \circ S)(20\,500)$ y $(S \circ R)(20\,500)$. ¿Cuál da el costo más bajo por el auto híbrido? Explique.

EXPLORACIÓN

¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 77 y 78, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

77. Si $f(x) = x + 1$ y $g(x) = 6x$, entonces

$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x).$$

78. Si nos dan dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, se puede calcular $(f \circ g)(x)$ si y sólo si el rango de g es un subconjunto del dominio de f .

En los Ejercicios 79 y 80, tres hermanos son de tres diferentes edades. El mayor tiene el doble de la edad del hermano intermedio, y éste tiene seis años más que la mitad de la edad del más joven.

- 79.** (a) Escriba una función compuesta que dé la edad del hermano mayor en términos del más joven. Explique el modo en que llegó a su respuesta.
- (b) Si el hermano mayor tiene 16 años, encuentre las edades de los otros dos hermanos.
- 80.** (a) Escriba una función compuesta que dé la edad del hermano más joven en términos del mayor. Explique el modo en que llegó a su respuesta.
- (b) Si el hermano más joven tiene dos años de edad, encuentre las edades de los otros dos hermanos.

81. DEMOSTRACIÓN Demuestre que el producto de dos funciones impares es una función par, y que el producto de dos funciones pares es una función par.

82. CONJETURA Use ejemplos para teorizar si el producto de una función impar y una función par es par o impar. A continuación demuestre su hipótesis.

83. DEMOSTRACIÓN

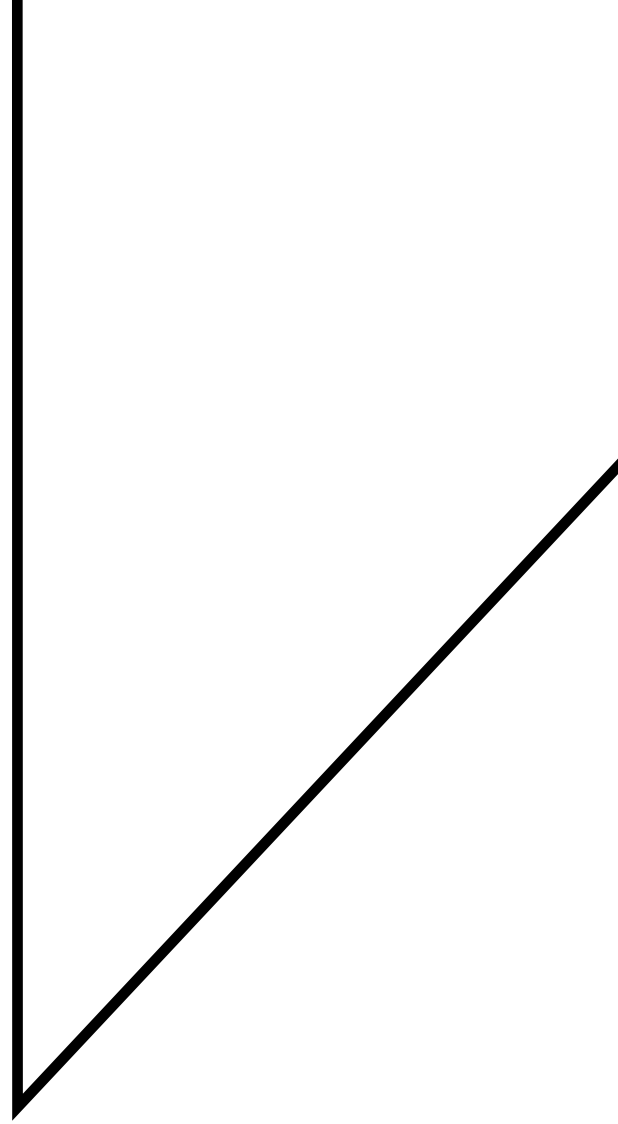
- (a) Dada una función f , demuestre que $g(x)$ es par y $h(x)$ es impar, donde $g(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)]$ y $h(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$.
- (b) Use el resultado del inciso (a) para demostrar que cualquier función se puede escribir como una suma de funciones pares e impares. [Sugerencia: sume las dos ecuaciones del inciso (a).]
- (c) Use el resultado del inciso (b) para escribir cada función como la suma de funciones pares e impares.

$$f(x) = x^2 - 2x + 1, \quad k(x) = \frac{1}{x + 1}$$

84. TOQUE FINAL Considere las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x}$.

- (a) Encuentre f/g y su dominio
- (b) Encuentre $f \circ g$ y $g \circ f$. Encuentre el dominio de cada función compuesta. ¿Son iguales? Explique.

1.9 FUNCIONES



Definición de función inversa

Sean f y g dos funciones tales que

$$f(g(x)) = x \quad \text{para toda } x \text{ en el dominio de } g$$

y

$$g(f(x)) = x \quad \text{para toda } x \text{ en el dominio de } f.$$

En estas condiciones, la función g es la **función inversa** de la función f . La función g está denotada por f^{-1} (léase “ f inversa”). Por tanto,

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad \text{y} \quad f^{-1}(f(x)) = x.$$

El dominio de f debe ser igual al rango de f^{-1} , y el rango de f debe ser igual al dominio de f^{-1} .

No confundir el uso de -1 para denotar la función f^{-1} . En este texto, cuando se escribe f^{-1} *siempre* nos referimos a la función inversa de la función f y *no* al recíproco de $f(x)$.

Si la función g es la función inversa de la función f , también debe ser cierto que la función f es la función inversa de la función g . Por ello, se puede decir que las funciones f y g son funciones inversas una de la otra.

Ejemplo 2 Verificar funciones inversas

¿Cuál de las funciones es la función inversa de $f(x) = \frac{5}{x-2}$?

$$g(x) = \frac{x-2}{5} \quad h(x) = \frac{5}{x} + 2$$

Solución

Al formar la composición de f y g , tenemos

$$f(g(x)) = f\left(\frac{x-2}{5}\right) = \frac{5}{\left(\frac{x-2}{5}\right) - 2} = \frac{25}{x-12} \neq x.$$

Como esta composición no es igual a la función identidad x , se deduce que g *no es* la función inversa de f . Al formar la composición de f con h , tendremos

$$f(h(x)) = f\left(\frac{5}{x} + 2\right) = \frac{5}{\left(\frac{5}{x} + 2\right) - 2} = \frac{5}{\left(\frac{5}{x}\right)} = x.$$

En consecuencia, es evidente que h es la función inversa de f . Se puede confirmar esto si se demuestra que la composición de h con f también es igual a la función identidad, como se ve a continuación.

$$h(f(x)) = h\left(\frac{5}{x-2}\right) = \frac{5}{\left(\frac{5}{x-2}\right)} + 2 = x - 2 + 2 = x$$

PUNTO de repaso

Ahora trate de hacer el Ejercicio 19.

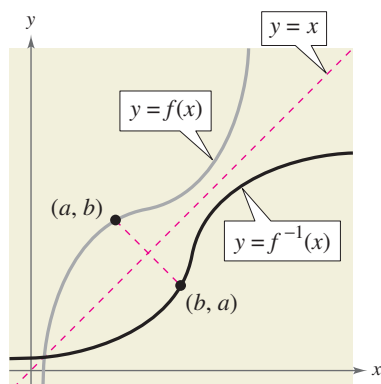


FIGURA 1.94

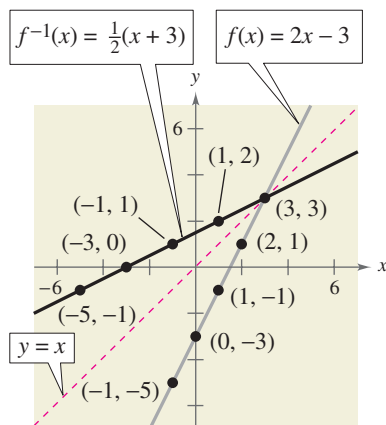


FIGURA 1.95

Gráfica de una función inversa

Las gráficas de una función f y de su función inversa f^{-1} están relacionadas entre sí en la siguiente forma. Si el punto (a, b) está en la gráfica de f , entonces el punto (b, a) debe estar en la gráfica de f^{-1} , y viceversa. Esto significa que la gráfica de f^{-1} es una reflexión de la gráfica de f en la recta $y = x$, como se muestra en la Figura 1.94.

Ejemplo 3 Hallar gráficamente funciones inversas

Trace las gráficas de las funciones inversas $f(x) = 2x - 3$ y $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x + 3)$ en el mismo sistema de coordenadas rectangulares y demuestre que son reflexiones una de la otra en la recta $y = x$.

Solución

Las gráficas de f y f^{-1} se muestran en la Figura 1.95. Es evidente que son reflexiones una de la otra en la recta $y = x$. Se puede verificar esta propiedad de reflexión si se prueban unos cuantos puntos en cada una de las gráficas. Nótese en la siguiente lista que si el punto (a, b) está en la gráfica de f , el punto (b, a) está en la gráfica de f^{-1} .

Gráfica de $f(x) = 2x - 3$	Gráfica de $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x + 3)$
$(-1, -5)$	$(-5, -1)$
$(0, -3)$	$(-3, 0)$
$(1, -1)$	$(-1, 1)$
$(2, 1)$	$(1, 2)$
$(3, 3)$	$(3, 3)$

PUNTO de repaso ➔ Ahora trate de hacer el Ejercicio 25.

Ejemplo 4 Hallar gráficamente funciones inversas

Trace las gráficas de las funciones inversas $f(x) = x^2$ ($x \geq 0$) y $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ en el mismo sistema de coordenadas rectangulares y demuestre que son reflexiones una de la otra en la recta $y = x$.

Solución

Las gráficas de f y f^{-1} se muestran en la Figura 1.96. Es evidente que son reflexiones una de la otra en la recta $y = x$. Se puede verificar esta propiedad de reflexión si se prueban unos cuantos puntos en cada una de las gráficas. Nótese en la siguiente lista que si el punto (a, b) está en la gráfica de f , el punto (b, a) está en la gráfica de f^{-1} .

Gráfica de $f(x) = x^2, x \geq 0$	Gráfica de $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$
$(0, 0)$	$(0, 0)$
$(1, 1)$	$(1, 1)$
$(2, 4)$	$(4, 2)$
$(3, 9)$	$(9, 3)$

Trate de demostrar que $f(f^{-1}(x)) = x$ y $f^{-1}(f(x)) = x$.

PUNTO de repaso ➔ Ahora trate de hacer el Ejercicio 27.

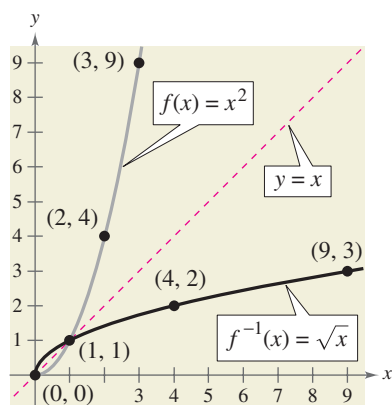


FIGURA 1.96

Funciones biunívocas o uno a uno

La propiedad de reflexión de las gráficas de funciones inversas da una buena prueba *geométrica* para determinar si una función tiene inversa. Esta prueba recibe el nombre de **prueba de la recta horizontal** para funciones inversas

Prueba de la recta horizontal para funciones inversas

Una función f tiene una función inversa si y sólo si ninguna recta *horizontal* interseca la gráfica de f en más de un punto.

Si ninguna recta horizontal interseca la gráfica de f en más de un punto, entonces no hay valor de y relacionado con más de un valor de x . Ésta es la característica esencial de lo que llamamos **funciones biunívocas o uno a uno**.

Funciones biunívocas

Una función f es **biunívoca o uno a uno** si cada valor de la variable dependiente corresponde a exactamente un valor de la variable independiente. Una función f tiene una función inversa si y sólo si f es biunívoca.

Considere la función dada por $f(x) = x^2$. La tabla de la izquierda muestra valores para $f(x) = x^2$. La tabla de valores de la derecha está conformada al intercambiar las columnas de la primera tabla. La tabla de la derecha no representa una función porque la entrada $x = 4$ está relacionada con dos salidas diferentes: $y = -2$ y $y = 2$. Por tanto, $f(x) = x^2$ no es biunívoca y no tiene función inversa

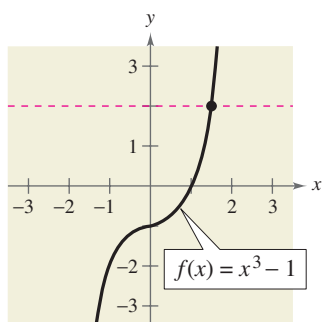


FIGURA 1.97

x	$f(x) = x^2$
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9

x	y
4	-2
1	-1
0	0
1	1
4	2
9	3

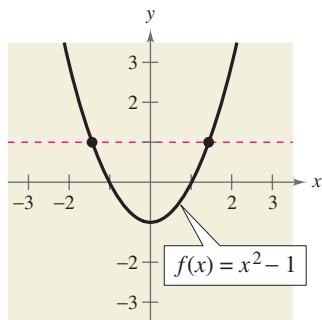


FIGURA 1.98

Ejemplo 5 Aplicar la prueba de la recta horizontal

- La gráfica de la función dada por $f(x) = x^3 - 1$ se ilustra en la Figura 1.97. Como ninguna recta horizontal interseca la gráfica de f en más de un punto, se puede concluir que f es una función biunívoca y *tiene* una función inversa.
- La gráfica de la función dada por $f(x) = x^2 - 1$ se muestra en la Figura 1.98. Como es posible hallar una recta horizontal que corte la gráfica de f en más de un punto, se puede concluir que f *no es* una función biunívoca y *no tiene* una función inversa.

PUNTO de repaso ➔ Ahora trate de hacer el Ejercicio 39.

ATENCIÓN

Observe lo que ocurre al tratar de hallar la función inversa de una función que no es biunívoca.

$$f(x) = x^2 + 1 \quad \text{Función original}$$

$$y = x^2 + 1 \quad \text{Sustituya } f(x) \text{ con } y.$$

$$x = y^2 + 1 \quad \text{Intercambie } x \text{ y } y.$$

$$x - 1 = y^2 \quad \text{Aísle el término en } y.$$

$$y = \pm \sqrt{x - 1} \quad \text{Despeje } y.$$

Se obtienen dos valores de y por cada uno de x .

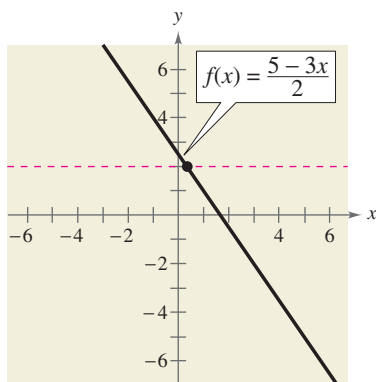


FIGURA 1.99

Hallar algebraicamente funciones inversas

Para funciones sencillas (como la del Ejemplo 1), se pueden hallar funciones inversas por inspección pero, para funciones más complicadas, es mejor usar las siguientes guías. El paso clave de estas guías es el 3, que es intercambiar los papeles de x y y . Este paso corresponde al hecho de que las funciones inversas tienen pares ordenados con las coordenadas invertidas.

Para hallar una función inversa

1. Use la prueba de la recta horizontal para determinar si f tiene una función inversa.
2. En la ecuación para $f(x)$, sustituya $f(x)$ por y .
3. Intercambie los papeles de x y y , y despeje y .
4. Sustituya y con $f^{-1}(x)$ en la nueva ecuación.
5. Verifique que f y f^{-1} son funciones inversas entre sí al demostrar que el dominio de f es igual al rango de f^{-1} , el rango de f es igual al dominio de f^{-1} , y $f(f^{-1}(x)) = x$ y $f^{-1}(f(x)) = x$.

Ejemplo 6 Hallar algebraicamente una función inversa

Encuentre la función inversa de

$$f(x) = \frac{5 - 3x}{2}.$$

Solución

La gráfica de f es una recta, como se ve en la Figura 1.99. Esta gráfica pasa la prueba de la recta horizontal. Por tanto, sabemos que f es biunívoca y tiene una función inversa

$$f(x) = \frac{5 - 3x}{2} \quad \text{Escribir la función original.}$$

$$y = \frac{5 - 3x}{2} \quad \text{Sustituir } f(x) \text{ por } y.$$

$$x = \frac{5 - 3y}{2} \quad \text{Intercambiar } x \text{ y } y.$$

$$2x = 5 - 3y \quad \text{Multiplicar cada lado por 2.}$$

$$3y = 5 - 2x \quad \text{Aíslar el término en } y.$$

$$y = \frac{5 - 2x}{3} \quad \text{Despejar } y.$$

$$f^{-1}(x) = \frac{5 - 2x}{3} \quad \text{Sustituir } y \text{ por } f^{-1}(x).$$

Nótese que tanto f como f^{-1} tienen dominios y rangos formados por todo el conjunto de números reales. Verifique que $f(f^{-1}(x)) = x$ y $f^{-1}(f(x)) = x$.

PUNTO de repaso Ahora trate de hacer el Ejercicio 63.

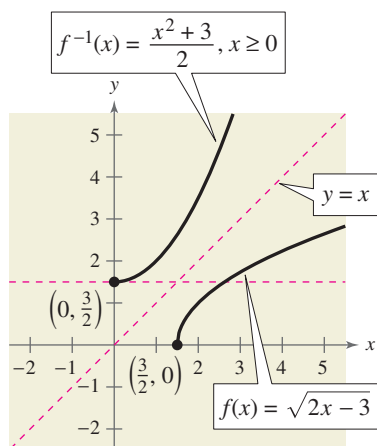


FIGURA 1.100

Ejemplo 7 Hallar una función inversa

Encuentre la función inversa de

$$f(x) = \sqrt{2x - 3}.$$

Solución

La gráfica de f es una curva, como se muestra en la Figura 1.100. Como esta gráfica pasa la prueba de la recta horizontal, sabemos que f es biunívoca y tiene una función inversa.

$$f(x) = \sqrt{2x - 3}$$

Escribir la función original.

$$y = \sqrt{2x - 3}$$

Sustituir $f(x)$ por y .

$$x = \sqrt{2y - 3}$$

Intercambiar x y y .

$$x^2 = 2y - 3$$

Elevar al cuadrado cada lado.

$$2y = x^2 + 3$$

Aíslar el término en y .

$$y = \frac{x^2 + 3}{2}$$

Despejar y .

$$f^{-1}(x) = \frac{x^2 + 3}{2}, \quad x \geq 0$$

Sustituir y por $f^{-1}(x)$.

La gráfica de f^{-1} de la Figura 1.100 es la reflexión de la gráfica de f en la recta $y = x$. Nótese que el rango de f es el intervalo $[0, \infty)$, lo cual implica que el dominio de f^{-1} es el intervalo $[0, \infty)$. Además, el dominio de f es el intervalo $[\frac{3}{2}, \infty)$, lo cual implica que el rango de f^{-1} es el intervalo $[\frac{3}{2}, \infty)$. Verifique que $f(f^{-1}(x)) = x$ y $f^{-1}(f(x)) = x$.

PUNTO de repaso → Ahora trate de hacer el Ejercicio 69.

DISCUSIÓN EN CLASE

La existencia de una función inversa Describa en un breve párrafo por qué las siguientes funciones tienen o no tienen funciones inversas.

- Represente con x el precio al por menor de un artículo (en dólares), y con $f(x)$ represente el impuesto de ventas sobre el artículo. Suponga que el impuesto de ventas es 6% del precio al por menor y que el impuesto de ventas se redondea al centavo más cercano. ¿Esta función tiene una función inversa? (*Sugerencia:* ¿puede deshacer esta función? Por ejemplo, si usted sabe que el impuesto de ventas es \$0.12, ¿puede determinar exactamente cuál es el precio al por menor?)
- Represente con x la temperatura en grados Celsius, y represente con $f(x)$ la temperatura en grados Fahrenheit. ¿Esta función tiene una función inversa? (*Sugerencia:* la fórmula para convertir de grados Celsius a grados Fahrenheit es $F = \frac{9}{5}C + 32$.)

1.9 EJERCICIOS

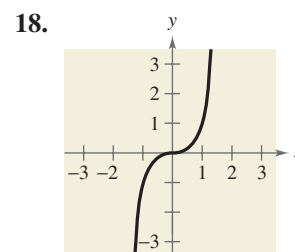
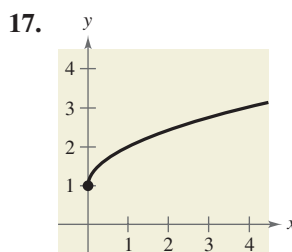
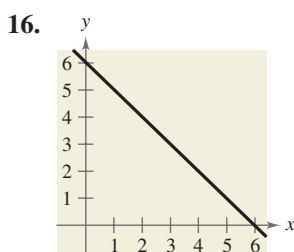
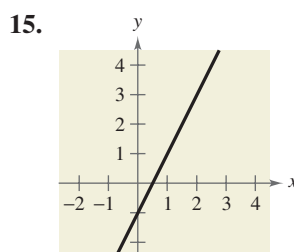
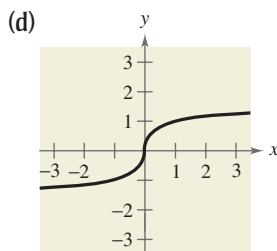
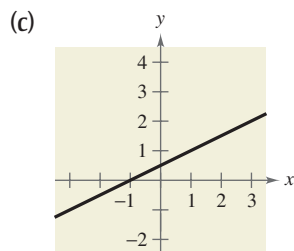
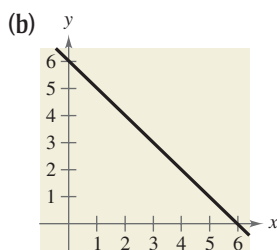
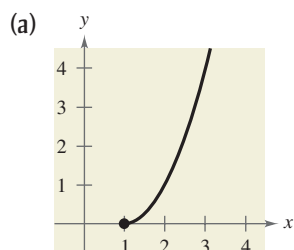
En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.**VOCABULARIO:** Llene los espacios en blanco.

- Si las funciones compuestas $f(g(x))$ y $g(f(x))$ son ambas iguales a x , entonces la función g es la _____ de la función f .
- La función inversa de f está denotada por _____.
- El dominio de f es el _____ de f^{-1} , y el _____ de f^{-1} es el rango de f .
- Las gráficas de f y f^{-1} son reflexiones una de la otra en la recta _____.
- Una función f es _____ si cada valor de la variable dependiente corresponde a exactamente un valor de la variable independiente.
- Una prueba gráfica para la existencia de una función inversa de f se denomina prueba de la recta _____.

HABILIDADES Y APLICACIONESEn los Ejercicios 7-14, encuentre la función inversa de f informalmente. Verifique que $f(f^{-1}(x)) = x$ y $f^{-1}(f(x)) = x$.

- $f(x) = 6x$
- $f(x) = \frac{1}{3}x$
- $f(x) = x + 9$
- $f(x) = x - 4$
- $f(x) = 3x + 1$
- $f(x) = \frac{x-1}{5}$
- $f(x) = \sqrt[3]{x}$
- $f(x) = x^5$

En los Ejercicios 15-18, relacione la gráfica de la función con la gráfica de su función inversa. [Las gráficas de las funciones inversas están marcadas (a), (b), (c) y (d).]

En los Ejercicios 19-22, verifique que f y g son funciones inversas.

- $f(x) = -\frac{7}{2}x - 3$, $g(x) = -\frac{2x+6}{7}$
- $f(x) = \frac{x-9}{4}$, $g(x) = 4x + 9$
- $f(x) = x^3 + 5$, $g(x) = \sqrt[3]{x-5}$
- $f(x) = \frac{x^3}{2}$, $g(x) = \sqrt[3]{2x}$

En los Ejercicios 23-34, demuestre que f y g son funciones inversas (a) algebraicamente y (b) gráficamente.

- $f(x) = 2x$, $g(x) = \frac{x}{2}$
- $f(x) = x - 5$, $g(x) = x + 5$
- $f(x) = 7x + 1$, $g(x) = \frac{x-1}{7}$
- $f(x) = 3 - 4x$, $g(x) = \frac{3-x}{4}$
- $f(x) = \frac{x^3}{8}$, $g(x) = \sqrt[3]{8x}$
- $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = \sqrt{x-4}$, $g(x) = x^2 + 4$, $x \geq 0$
- $f(x) = 1 - x^3$, $g(x) = \sqrt[3]{1-x}$
- $f(x) = 9 - x^2$, $x \geq 0$, $g(x) = \sqrt{9-x}$, $x \leq 9$

$$32. f(x) = \frac{1}{1+x}, \quad x \geq 0, \quad g(x) = \frac{1-x}{x}, \quad 0 < x \leq 1$$

$$33. f(x) = \frac{x-1}{x+5}, \quad g(x) = -\frac{5x+1}{x-1}$$

$$34. f(x) = \frac{x+3}{x-2}, \quad g(x) = \frac{2x+3}{x-1}$$

En los Ejercicios 35 y 36, ¿la función tiene función inversa?

35.

x	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-2	1	2	1	-2	-6

36.

x	-3	-2	-1	0	2	3
$f(x)$	10	6	4	1	-3	-10

En los Ejercicios 37 y 38, use la tabla de valores para $y = f(x)$ para completar una tabla para $y = f^{-1}(x)$.

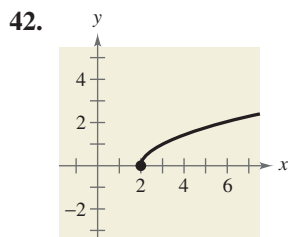
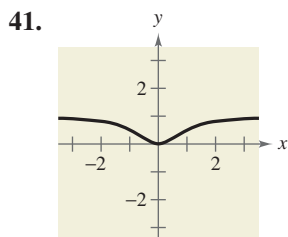
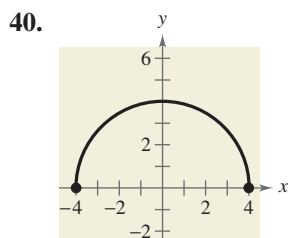
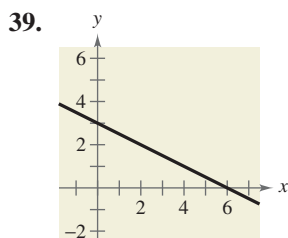
37.

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-2	0	2	4	6	8

38.

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-10	-7	-4	-1	2	5

En los Ejercicios 39-42, ¿la función tiene inversa?



En los Ejercicios 43-48, use una calculadora de gráficas para graficar la función, y use la prueba de la recta horizontal para determinar si la función es biunívoca y, por tanto, tiene una función inversa.

$$43. g(x) = \frac{4-x}{6}$$

$$44. f(x) = 10$$

$$45. h(x) = |x+4| - |x-4|$$

$$46. g(x) = (x+5)^3$$

$$47. f(x) = -2x\sqrt{16-x^2}$$

$$48. f(x) = \frac{1}{8}(x+2)^2 - 1$$

En los Ejercicios 49-62, (a) encuentre la función inversa de f , (b) grafique f y f^{-1} en el mismo conjunto de ejes de coordenadas, (c) describa la relación entre las gráficas de f y f^{-1} , y (d) exprese el dominio y rango de f y f^{-1} .

$$49. f(x) = 2x - 3$$

$$50. f(x) = 3x + 1$$

$$51. f(x) = x^5 - 2$$

$$52. f(x) = x^3 + 1$$

$$53. f(x) = \sqrt{4-x^2}, \quad 0 \leq x \leq 2$$

$$54. f(x) = x^2 - 2, \quad x \leq 0$$

$$55. f(x) = \frac{4}{x}$$

$$56. f(x) = -\frac{2}{x}$$

$$57. f(x) = \frac{x+1}{x-2}$$

$$58. f(x) = \frac{x-3}{x+2}$$

$$59. f(x) = \sqrt[3]{x-1}$$

$$60. f(x) = x^{3/5}$$

$$61. f(x) = \frac{6x+4}{4x+5}$$

$$62. f(x) = \frac{8x-4}{2x+6}$$

En los Ejercicios 63-76, determine si la función tiene inversa. Si la tiene, encuéntrela.

$$63. f(x) = x^4$$

$$64. f(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$65. g(x) = \frac{x}{8}$$

$$66. f(x) = 3x + 5$$

$$67. p(x) = -4$$

$$68. f(x) = \frac{3x+4}{5}$$

$$69. f(x) = (x+3)^2, \quad x \geq -3$$

$$70. q(x) = (x-5)^2$$

$$71. f(x) = \begin{cases} x+3, & x < 0 \\ 6-x, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$72. f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ x^2 - 3x, & x > 0 \end{cases}$$

$$73. h(x) = -\frac{4}{x^2}$$

$$74. f(x) = |x-2|, \quad x \leq 2$$

$$75. f(x) = \sqrt{2x+3}$$

$$76. f(x) = \sqrt{x-2}$$

PIÉNSELO En los Ejercicios 77-86, restrinja el dominio de la función f de modo que la función sea biunívoca y tenga inversa. A continuación halle la función inversa f^{-1} . Exprese los dominios y rangos de f y f^{-1} . Explique sus resultados. (Hay numerosas respuestas correctas.)

77. $f(x) = (x - 2)^2$ 78. $f(x) = 1 - x^4$
 79. $f(x) = |x + 2|$ 80. $f(x) = |x - 5|$
 81. $f(x) = (x + 6)^2$ 82. $f(x) = (x - 4)^2$
 83. $f(x) = -2x^2 + 5$ 84. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1$
 85. $f(x) = |x - 4| + 1$ 86. $f(x) = -|x - 1| - 2$

En los Ejercicios 87-92, use las funciones dadas por $f(x) = \frac{1}{8}x - 3$ y $g(x) = x^3$ para hallar el valor o función indicados.

87. $(f^{-1} \circ g^{-1})(1)$ 88. $(g^{-1} \circ f^{-1})(-3)$
 89. $(f^{-1} \circ f^{-1})(6)$ 90. $(g^{-1} \circ g^{-1})(-4)$
 91. $(f \circ g)^{-1}$ 92. $g^{-1} \circ f^{-1}$

En los Ejercicios 93-96, use las funciones dadas por $f(x) = x + 4$ y $g(x) = 2x - 5$ para hallar la función especificada.

93. $g^{-1} \circ f^{-1}$ 94. $f^{-1} \circ g^{-1}$
 95. $(f \circ g)^{-1}$ 96. $(g \circ f)^{-1}$

97. MEDIDAS DE CALZADO La tabla muestra las medidas de calzado para hombres en Estados Unidos y las correspondientes medidas de calzado europeas. Represente con $y = f(x)$ la función que dé la medida de calzado europea para hombres en términos de x , que es la medida para hombres en Estados Unidos.



Medida de calzado para hombres E.U.A.	Medida de calzado para hombres en Europa
8	41
9	42
10	43
11	45
12	46
13	47

- (a) ¿ f es biunívoca? Explique.
 (b) Encuentre $f(11)$.
 (c) Encuentre $f^{-1}(43)$, si es posible.
 (d) Encuentre $f(f^{-1}(41))$.
 (e) Encuentre $f^{-1}(f(13))$.

98. MEDIDAS DE CALZADO La tabla siguiente muestra las medidas de calzado para damas en Estados Unidos y

las correspondientes medidas de calzado europeas. Represente con $y = g(x)$ la función que dé la medida de calzado europea para mujeres en términos de x , que es la medida para mujeres en Estados Unidos.



Medida de calzado para mujeres en E.U.A.	Medida de calzado europea para mujeres
4	35
5	37
6	38
7	39
8	40
9	42

- (a) ¿ g es biunívoca? Explique.
 (b) Encuentre $g(6)$.
 (c) Encuentre $g^{-1}(42)$.
 (d) Encuentre $g(g^{-1}(39))$.
 (e) Encuentre $g^{-1}(g(5))$.

99. TELEVISORES DE LCD Las ventas S (en millones de dólares) de televisores con pantalla de cristal líquido en Estados Unidos, de 2001 a 2007, se muestran en la tabla siguiente. El tiempo (en años) está dado por t , con $t = 1$ correspondiente a 2001. (Fuente: [Consumer Electronics Association](#))



Año, t	Ventas, $S(t)$
1	62
2	246
3	664
4	1579
5	3258
6	8430
7	14 532

- (a) ¿Existe S^{-1} ?
 (b) Si S^{-1} existe, ¿qué representa en el contexto del problema?
 (c) Si S^{-1} existe, encuentre $S^{-1}(8430)$.
 (d) Si la tabla se extiende a 2009 y si las ventas de televisores de pantalla de cristal líquido para ese año fueron de \$14 532 millones, ¿existiría S^{-1} ? Explique.

100. POBLACIÓN La población proyectada P (en millones de personas) en Estados Unidos para 2015 a 2040 se muestran en la tabla. El tiempo (en años) está

dado por t , con $t = 15$ correspondiente a 2015.
(Fuente: U.S. Census Bureau)



Año, t	Población, $P(t)$
15	325.5
20	341.4
25	357.5
30	373.5
35	389.5
40	405.7

- (a) ¿Existe P^{-1} ?
 (b) Si P^{-1} existe, ¿qué representa en el contexto del problema?
 (c) Si P^{-1} existe, encuentre $P^{-1}(357.5)$.
 (d) Si la tabla se extiende a 2050 y si la población proyectada de Estados Unidos para ese año fuera de 373.5 millones, ¿existiría P^{-1} ? Explique.

101. SALARIO POR HORA El salario de usted es \$10.00 por hora más \$0.75 por cada unidad producida por hora. Por tanto, su sueldo y por hora en términos del número de unidades producidas x es $y = 10 + 0.75x$.

- (a) Encuentre la función inversa. ¿Qué representa cada variable en la función inversa?
 (b) Determine el número de unidades producidas cuando su sueldo por hora es \$24.25.

102. MECÁNICA DIESEL La función dada por

$$y = 0.03x^2 + 245.50, \quad 0 < x < 100$$

calcula la temperatura de escape y en grados Fahrenheit, donde x es el porcentaje de carga para un motor diesel

- (a) Encuentre la función inversa. ¿Qué representa cada variable en la función inversa?
 (b) Use una calculadora de gráficas para graficar la función inversa.



- (c) La temperatura de escape del motor no debe pasar de 500 grados Fahrenheit. ¿Cuál es el intervalo del porcentaje de carga?

EXPLORACIÓN

¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 103 y 104, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

103. Si f es una función par, entonces f^{-1} existe.

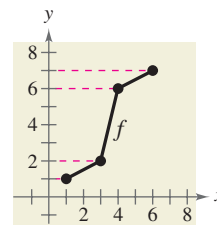
104. Si la función inversa de f existe y la gráfica de f tiene intersección con el eje y , entonces esa intersección de f es una intersección con el eje x de f^{-1} .

105. DEMOSTRACIÓN Demuestre que si f y g son funciones biunívocas, entonces $(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$.

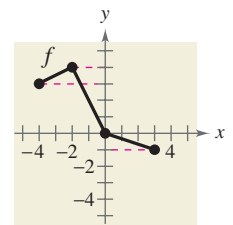
106. DEMOSTRACIÓN Demuestre que si f es función biunívoca impar, entonces f^{-1} es función impar.

En los Ejercicios 107 y 108, use la gráfica de la función f para crear una tabla de valores para los puntos dados. A continuación genere una segunda tabla que se pueda usar para hallar f^{-1} y trace la gráfica de f^{-1} si es posible.

107.



108.



En los Ejercicios 109-112, determine si la situación podría estar representada por una función biunívoca. Si es así, escriba un enunciado que describa la función inversa.

- 109.** El número n de millas que un corredor de maratón ha completado en términos del tiempo t en horas.
110. La población p de Carolina del Sur en términos del año t de 1960 a 2008.
111. La profundidad de la marea d en una playa en términos del tiempo t en un periodo de 24 horas
112. La estatura h en pulgadas de un niño nacido en el año 2000 en términos de su edad n en años.
113. PIÉNSELO La función dada por $f(x) = k(2 - x - x^3)$ tiene una función inversa, y $f^{-1}(3) = -2$. Encuentre k .
114. PIÉNSELO Considere las funciones dadas por $f(x) = x + 2$ y $f^{-1}(x) = x - 2$. Evalúe $f(f^{-1}(x))$ y $f^{-1}(f(x))$ para los valores indicados de x . ¿Qué se puede concluir acerca de las funciones?

x	-10	0	7	45
$f(f^{-1}(x))$				
$f^{-1}(f(x))$				

115. PIÉNSELO Restrinja el dominio de $f(x) = x^2 + 1$ para $x \geq 0$. Use una calculadora de gráficas para graficar la función. ¿La función restringida tiene función inversa? Explique.

116. TOQUE FINAL Describa y corrija el error.

~~Dada $f(x) = \sqrt{x-6}$, entonces $f^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{x-6}}$.~~

1.10 MODELADO Y VARIACIÓN MATEMÁTICOS

Lo que debe aprender

- Usar modelos matemáticos para aproximar conjuntos de puntos de datos.
- Usar el comando *regression* de una calculadora de gráficas para hallar la ecuación de una recta de regresión de mínimos cuadrados.
- Escribir modelos matemáticos para variación directa.
- Escribir modelos matemáticos para variación directa como n potencias.
- Escribir modelos matemáticos para variación inversa.
- Escribir modelos matemáticos para variación conjunta.

Por qué debe aprenderlo

Se pueden usar funciones como modelos para representar una amplia variedad de conjuntos de datos de la vida real. Por ejemplo, en el Ejercicio 83 de la página 112 es posible usar un modelo de variación para modelar las temperaturas del agua de los océanos a diversas profundidades.

Introducción

Ya ha estudiado algunas técnicas para ajustar modelos a datos. Por ejemplo, en la sección 1.3, aprendió a hallar la ecuación de una recta que pasa por dos puntos. En esta sección estudiará otras técnicas para ajustar modelos a datos: *regresión de mínimos cuadrados* y *variación directa e inversa*. Los modelos resultantes son ya sea funciones polinomiales o funciones racionales. (Las funciones racionales se estudiaron en el capítulo 2.)

Ejemplo 1 Un modelo matemático

Las poblaciones y (en millones) de Estados Unidos de 2000 a 2007 se muestran en la tabla siguiente. (Fuente: U.S. Census Bureau)



Año	Población, y
2000	282.4
2001	285.3
2002	288.2
2003	290.9
2004	293.6
2005	296.3
2006	299.2
2007	302.0

Un modelo lineal que calcula los datos es $y = 2.78t + 282.5$ para $0 \leq t \leq 7$, donde t es el año, con $t = 0$ correspondiente a 2000. Determine los datos reales y además el modelo en la misma gráfica. ¿Qué tan cercanamente representa el modelo los datos?

Solución

Los datos reales están situados en la Figura 1.101, junto con la gráfica del modelo lineal. De la gráfica, es evidente que el modelo es un “buen ajuste” para los datos reales. Se puede ver lo bien que el modelo se ajusta si comparamos los valores reales de y con los dados por el modelo. Los valores dados por el modelo están marcados como y^* en la tabla siguiente.

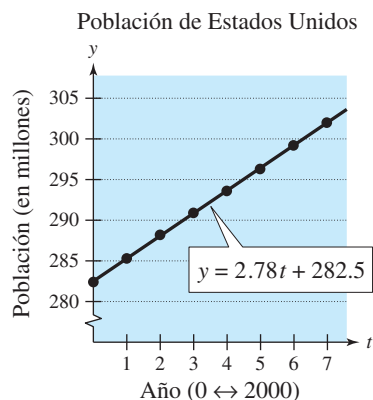


FIGURA 1.101

t	0	1	2	3	4	5	6	7
y	282.4	285.3	288.2	290.9	293.6	296.3	299.2	302.0
y^*	282.5	285.3	288.1	290.8	293.6	296.4	299.2	302.0

PUNTO de repaso → Ahora trate de hacer el Ejercicio 11.

Nótese en el Ejemplo 1 que podrían haberse escogido cualesquiera dos puntos para hallar una recta que se ajuste a los datos. No obstante, el modelo lineal dado se encontró con el uso del comando *regression* de una calculadora de gráficas y es la recta que mejor se ajusta a los datos. Este concepto de una recta de “mejor ajuste” se estudia en la siguiente página.

Regresión de mínimos cuadrados y calculadoras de gráficas

Hasta aquí hemos trabajado con numerosos tipos de modelos matemáticos que calculan datos de la vida real. En algunos casos el modelo se nos dio (como en el Ejemplo 1), mientras que en otros se nos pidió hallarlo usando técnicas algebraicas sencillas o una calculadora de gráficas.

Para hallar un modelo que calcule los datos con más precisión, los estadísticos usan una medida llamada **suma de diferencias cuadradas**, que es la suma de los cuadrados de las diferencias entre valores reales de datos y valores del modelo. El modelo lineal de “mejor ajuste”, llamado **recta de regresión de mínimos cuadrados**, es el de mínima suma de diferencias cuadradas. Recuerde que se puede calcular esta recta visualmente si se determinan los puntos de datos y se traza la recta que parece ajustar mejor, o se pueden ingresar datos en una calculadora o computadora y usar el comando *regression* de esos aparatos. Cuando se usa la función *regression* de una calculadora o programa de computadora, se observa que el programa también puede dar como salida un “valor r ”. Este valor r es el **coeficiente de correlación** de los datos y da una medida de qué tan bien se ajusta el modelo a estos últimos. Cuanto más cercano sea el valor de $|r|$ a 1, mejor es el ajuste.

Ejemplo 2 Hallar una recta de regresión de mínimos cuadrados

Los datos de la tabla muestran la deuda D de mercado de crédito hipotecario pendiente de pago (en billones de dólares) de 2000 a 2007. Construya una gráfica de dispersión que represente los datos y encuentre la recta de regresión de mínimos cuadrados para ellos. (Fuente: Board of Governors of the Federal Reserve System)

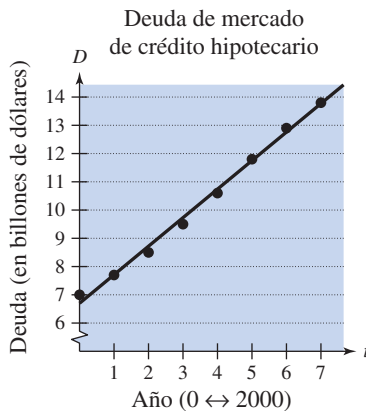


FIGURA 1.102



Año	Deuda, D , de mercado de crédito hipotecario
2000	7.0
2001	7.7
2002	8.5
2003	9.5
2004	10.6
2005	11.8
2006	12.9
2007	13.8



t	D	D^*
0	7.0	6.7
1	7.7	7.7
2	8.5	8.7
3	9.5	9.7
4	10.6	10.7
5	11.8	11.8
6	12.9	12.8
7	13.8	13.8

Solución

Con $t = 0$ represente al año 2000. La gráfica de dispersión para los puntos se ilustra en la Figura 1.102. Usando el comando *regression* de una calculadora de gráficas, es posible determinar que la ecuación de la recta de regresión de mínimos cuadrados es

$$D = 1.01t + 6.7.$$

Para comprobar este modelo, compare los valores D reales con los valores D dados por el modelo, los cuales están marcados como D^* en la tabla de la izquierda. El coeficiente de correlación para este modelo es $r \approx 0.997$, lo cual implica que el modelo es un buen ajuste.

PUNTO de repaso

Ahora trate de hacer el Ejercicio 17.

Variación directa

Hay dos tipos básicos de modelos lineales. El modelo más general tiene una intersección con el eje y que es diferente de cero.

$$y = mx + b, \quad b \neq 0$$

El modelo más sencillo

$$y = kx$$

tiene una intersección con el eje y que es cero. En el modelo más sencillo, se dice que y **varía directamente** con x , o que es **directamente proporcional** a x .

Variación directa

Los siguientes enunciados son equivalentes.

1. y **varía directamente** con x .
2. y es **directamente proporcional** a x .
3. $y = kx$ para alguna constante k diferente de cero.

k es la **constante de variación** o la **constante de proporcionalidad**.

Ejemplo 3 Variación directa

En Pennsylvania, el impuesto estatal sobre la renta es directamente proporcional al *ingreso bruto*. Usted está trabajando en Pennsylvania y su deducción de impuesto estatal sobre la renta es de \$46.05 para un ingreso bruto mensual de \$1500. Encuentre un modelo matemático que dé el impuesto estatal sobre la renta en Pennsylvania en términos de ingreso bruto.

Solución

Modelo verbal:

$$\text{Impuesto estatal de ingreso sobre la renta} = k \cdot \text{Ingreso bruto}$$

Leyendas: Impuesto estatal de ingreso sobre la renta = y (dólares)
 Ingreso bruto = x (dólares)
 Tasa de impuesto sobre la renta = k (porcentaje en forma decimal)

Ecuación: $y = kx$

Para despejar k , sustituya la información dada en la ecuación $y = kx$, y a continuación despeje k .

$$y = kx \quad \text{Escribir el modelo de variación directa.}$$

$$46.05 = k(1500) \quad \text{Sustituir } y = 46.05 \text{ y } x = 1500.$$

$$0.0307 = k \quad \text{Simplificar.}$$

Por tanto, la ecuación (o modelo) para el impuesto estatal sobre la renta en Pennsylvania es

$$y = 0.0307x.$$

En otras palabras, Pennsylvania tiene una tasa de impuesto estatal sobre la renta de 3.07% del ingreso bruto. La gráfica de esta ecuación se ilustra en la Figura 1.103.

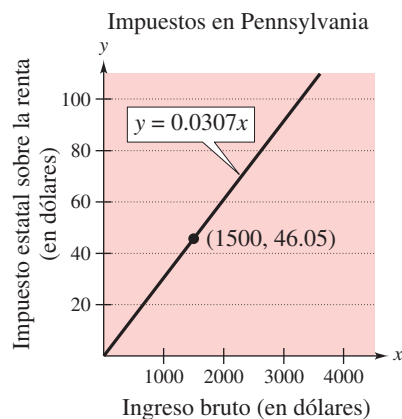


FIGURA 1.103

PUNTO de repaso

Ahora trate de hacer el Ejercicio 43.

Variación directa como n -ésima potencia

Otro tipo de variación directa relaciona una variable con una *potencia* de otra variable. Por ejemplo, en la fórmula para el área de un círculo

$$A = \pi r^2$$

el área A es directamente proporcional al cuadrado del radio r . Nótese que, para esta fórmula, π es la constante de proporcionalidad.

Tip de estudio

Nótese que el modelo de variación directa $y = kx$ es un caso especial de $y = kx^n$ con $n = 1$.

Variación directa como n -ésima potencia

Los siguientes enunciados son equivalentes.

1. y **varía directamente con la n -ésima potencia** de x .
2. y es **directamente proporcional a la n -ésima potencia** de x .
3. $y = kx^n$ para alguna constante k .

Ejemplo 4 Variación directa con n -ésima potencia

La distancia que una pelota se desplaza hacia abajo en un plano inclinado es directamente proporcional al cuadrado del tiempo que se mueva. Durante el primer segundo, la pelota recorre 8 pies. (Vea Figura 1.104.)

- a. Escriba una ecuación que relacione la distancia recorrida con el tiempo.
- b. ¿Qué distancia recorrerá la pelota durante los primeros 3 segundos?

Solución

- a. Sea d la distancia (en pies) que la pelota se desplaza y sea t el tiempo (en segundos); tenemos

$$d = kt^2.$$

A continuación, como $d = 8$ cuando $t = 1$, se puede ver que $k = 8$, como sigue.

$$d = kt^2$$

$$8 = k(1)^2$$

$$8 = k$$

Por tanto, la ecuación que relaciona la distancia con el tiempo es

$$d = 8t^2.$$

- b. Cuando $t = 3$, la distancia recorrida es $d = 8(3)^2 = 8(9) = 72$ pies.

PUNTO de repaso ➔ Ahora trate de hacer el Ejercicio 75.

En los Ejemplos 3 y 4, las variaciones directas son tales que un *aumento* en una variable corresponde a un *aumento* en la otra. Esto también es verdadero en el modelo $d = \frac{1}{5}F$, $F > 0$, donde un aumento en F resulta en un aumento en d . Sin embargo, no debe suponerse que esto siempre ocurre con una variación directa. Por ejemplo, en el modelo $y = -3x$, un aumento en x resulta en una disminución en y , y todavía se dice que y varía directamente con x .

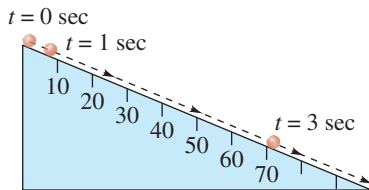


FIGURA 1.104

Variación inversa

Variación inversa

Los siguientes enunciados son equivalentes.

1. y **varía inversamente** con x .
2. y es **inversamente proporcional** a x .
3. $y = \frac{k}{x}$ para alguna constante k .

Si x y y están relacionadas por una ecuación de la forma $y = k/x^n$, entonces y varía directamente con la n -ésima potencia de x (o y es inversamente proporcional a la n -ésima potencia de x).

Algunas aplicaciones de variación implican problemas con variación tanto directa como inversa en el mismo modelo. Se dice que estos tipos de modelos tienen **variación combinada**.

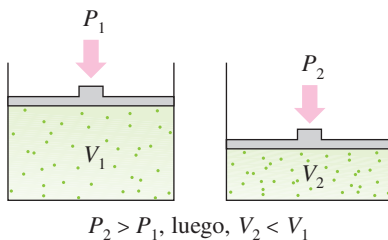


FIGURA 1.105 Si la temperatura se mantiene constante y la presión aumenta, el volumen disminuye.

Ejemplo 5 Variación directa e inversa

Una ley de gases expresa que el volumen de un gas encerrado varía directamente con la temperatura e inversamente con la presión, como se ilustra en la Figura 1.105. La presión de un gas es 0.75 kilogramos por centímetro cuadrado cuando la temperatura es 294 K y el volumen es 8000 centímetros cúbicos. (a) Escriba una ecuación que relacione presión, temperatura y volumen. (b) Encuentre la presión cuando la temperatura sea de 300 K y el volumen sea 7000 centímetros cúbicos.

Solución

- a. Sea V el volumen (en centímetros cúbicos), sea P la presión (en kilogramos por centímetro cuadrado), y sea T la temperatura (en Kelvin). Como V varía directamente con T e inversamente con P , tendremos

$$V = \frac{kT}{P}.$$

Ahora, como $P = 0.75$ cuando $T = 294$ y $V = 8000$, tenemos

$$8000 = \frac{k(294)}{0.75}$$

$$k = \frac{6000}{294} = \frac{1000}{49}.$$

Por tanto, la ecuación que relaciona presión, temperatura y volumen es

$$V = \frac{1000}{49} \left(\frac{T}{P} \right).$$

- b. Cuando $T = 300$ y $V = 7000$, la presión es

$$P = \frac{1000}{49} \left(\frac{300}{7000} \right) = \frac{300}{343} \approx 0.87 \text{ kilogramos por centímetro cuadrado.}$$

PUNTO de repaso ➡ Ahora trate de hacer el Ejercicio 77.

Variación conjunta

En el Ejemplo 5, nótese que cuando se presenta una variación directa y una variación inversa en el mismo enunciado, están acoplados con la conjunción “y.” Para describir dos distintas variaciones *directas* en el mismo enunciado se usa la palabra **conjuntamente**.

Variación conjunta

Los siguientes enunciados son equivalentes.

1. z **varía conjuntamente** con x y y .
2. z es **conjuntamente proporcional** a x y a y .
3. $z = kxy$ para alguna constante k .

Si x , y y z están relacionadas por una ecuación de la forma

$$z = kx^n y^m$$

entonces z varía conjuntamente con la n -ésima potencia de x y la m -ésima potencia de y .

Ejemplo 6 Variación conjunta

El interés *simple* para cierta cuenta de ahorros es conjuntamente proporcional al tiempo y al capital. Después de un trimestre (3 meses), el interés sobre un capital de \$5000 es \$43.75.

- a. Escriba una ecuación que relacione el interés, el capital y el tiempo.
- b. Encuentre el interés después de tres trimestres.

Solución

- a. Sea I = interés (en dólares), P = capital (en dólares) y t = tiempo (en años). Como I es conjuntamente proporcional a P y t , tenemos

$$I = kPt.$$

Para $I = 43.75$, $P = 5000$ y $t = \frac{1}{4}$, tendremos

$$43.75 = k(5000)\left(\frac{1}{4}\right)$$

lo cual implica que $k = 4(43.75)/5000 = 0.035$. Entonces, la ecuación que relacione interés, capital y tiempo es

$$I = 0.035Pt$$

que es la conocida fórmula para el interés simple, donde la constante de proporcionalidad, 0.035, representa una tasa de interés anual de 3.5%.

- b. Cuando $P = \$5000$ y $t = \frac{3}{4}$, el interés es

$$\begin{aligned} I &= (0.035)(5000)\left(\frac{3}{4}\right) \\ &= \$131.25. \end{aligned}$$

1.10 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

VOCABULARIO: Llene los espacios en blanco.

1. Dos técnicas para ajustar modelos a datos se denominan _____ directa y _____ de mínimos cuadrados.
2. Los expertos en estadística usan una medida llamada _____ de _____ para hallar un modelo que calcule un conjunto de datos con más precisión.
3. El modelo lineal con la mínima suma de diferencias cuadradas se denomina recta de _____.
4. Un valor r de un conjunto de datos, también llamado _____, da una medida de lo bien que un modelo se ajusta al conjunto de datos.
5. Los modelos de variación directa se pueden describir como “ y varía directamente con x ”, o “ y es _____ a x ”.
6. En modelos de variación directa de la forma $y = kx$, k se denomina _____ de _____.
7. El modelo de variación directa $y = kx^n$ se puede describir como “ y varía directamente con la n -ésima potencia de x ”, o “ y es _____ a la n -ésima potencia de x ”.
8. El modelo matemático $y = \frac{k}{x}$ es un ejemplo de variación _____.
9. Se dice que los modelos matemáticos que contengan tanto variación directa como inversa tienen variación _____.
10. El modelo de variación conjunta $z = kxy$ se puede describir como “ z varía conjuntamente con x y y ”, o “ z es _____ a x y y ”.

HABILIDADES Y APLICACIONES

- 11. EMPLEO** El número total de personas (en miles) en la fuerza laboral civil en Estados Unidos, de 1992 a 2007, están dados por los siguientes pares ordenados.

(1992, 128 105)	(2000, 142 583)
(1993, 129 200)	(2001, 143 734)
(1994, 131 056)	(2002, 144 863)
(1995, 132 304)	(2003, 146 510)
(1996, 133 943)	(2004, 147 401)
(1997, 136 297)	(2005, 149 320)
(1998, 137 673)	(2006, 151 428)
(1999, 139 368)	(2007, 153 124)

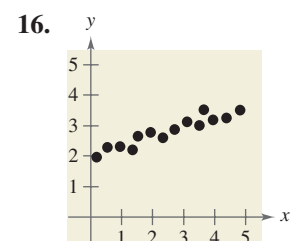
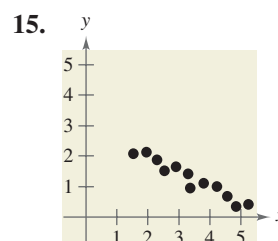
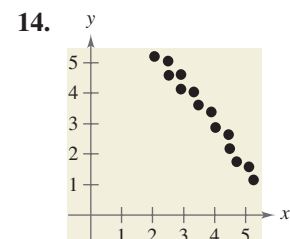
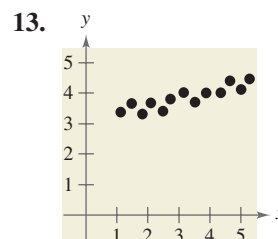
Un modelo lineal para aproximar los datos es $y = 1695.9t + 124\,320$, donde y representa el número de empleados (en miles) y $t = 2$ representa 1992. Localice los datos reales y el modelo en el mismo conjunto de ejes de coordenadas. ¿Qué tan cercanamente representa el modelo a los datos? (Fuente: U.S. Bureau of Labor Statistics)

- 12. DEPORTES** Los tiempos ganadores (en minutos) en la prueba de natación de estilo libre de 400 metros para mujeres, en los Juegos Olímpicos de 1948 a 2008, están dados por los siguientes pares ordenados.

(1948, 5.30)	(1972, 4.32)	(1996, 4.12)
(1952, 5.20)	(1976, 4.16)	(2000, 4.10)
(1956, 4.91)	(1980, 4.15)	(2004, 4.09)
(1960, 4.84)	(1984, 4.12)	(2008, 4.05)
(1964, 4.72)	(1988, 4.06)	
(1968, 4.53)	(1992, 4.12)	

Un modelo lineal para aproximar los datos es $y = -0.020t + 5.00$, donde y representa el tiempo ganador (en minutos) y $t = 0$ representa 1950. Trace los datos reales y el modelo en el mismo conjunto de ejes de coordenadas. ¿Qué tan cercanamente representa el modelo a los datos? ¿Le parece que otro tipo de modelo se ajuste mejor? Explique. (Fuente: International Olympic Committee)

En los Ejercicios 13-16, haga un bosquejo de la recta que usted considere que mejor se aproxima a los datos en la gráfica de dispersión. Para imprimir una copia más grande de la gráfica vaya al sitio web www.mathgraphs.com.



-  **17. DEPORTES** La longitud (en pies) de lanzamientos ganadores de disco para hombres, en los Juegos Olímpicos de 1920 a 2008, se dan a continuación. (Fuente: [International Olympic Committee](#))

1920	146.6	1956	184.9	1984	218.5
1924	151.3	1960	194.2	1988	225.8
1928	155.3	1964	200.1	1992	213.7
1932	162.3	1968	212.5	1996	227.7
1936	165.6	1972	211.3	2000	227.3
1948	173.2	1976	221.5	2004	229.3
1952	180.5	1980	218.7	2008	225.8

- Trace una gráfica de dispersión de los datos. Represente con y la longitud del lanzamiento ganador de disco (en pies) y con $t = 20$ represente 1920.
- Use una regla para trazar la recta de mejor ajuste que pase por los puntos y encuentre una ecuación de la recta.
- Use el comando *regression* de una calculadora de gráficas para hallar la recta de regresión de mínimos cuadrados que se ajuste a los datos.
- Compare el modelo lineal que encontró en el inciso (b) con el modelo lineal dado por la calculadora de gráficas en el inciso (c).
- Use los modelos de los incisos (b) y (c) para calcular el lanzamiento ganador de disco para hombres en el año 2012.

-  **18. VENTAS** El total de ventas (en miles de millones de dólares) para Coca-Cola Enterprises, de 2000 a 2007, se dan a continuación. (Fuente: [Coca-Cola Enterprises, Inc.](#))

2000	14.750	2004	18.185
2001	15.700	2005	18.706
2002	16.899	2006	19.804
2003	17.330	2007	20.936

- Trace una gráfica de dispersión de los datos. Con y represente el ingreso total (en miles de millones de dólares) y con $t = 0$ represente 2000.
- Use una regla para trazar la recta de mejor ajuste que pase por los puntos y encuentre una ecuación de la recta.
- Use el comando *regression* de una calculadora de gráficas para hallar la recta de regresión de mínimos cuadrados que se ajuste a los datos.
- Compare el modelo lineal que encontró en el inciso (b) con el modelo lineal dado por la calculadora de gráficas del inciso (c).
- Use los modelos de los incisos (b) y (c) para calcular las ventas de Coca-Cola Enterprises en 2008.
- Use la biblioteca de su escuela, internet o alguna otra fuente de consulta para analizar la precisión del cálculo del inciso (e).

-  **19. ANÁLISIS DE DATOS: OBRAS TEATRALES EN BROADWAY** La tabla siguiente muestra las ventas brutas anuales de boletos S (en millones de dólares) para obras teatrales de Broadway en la ciudad de Nueva York, de 1995 a 2006. (Fuente: [The League of American Theatres and Producers, Inc.](#))



Año	Ventas, S
1995	406
1996	436
1997	499
1998	558
1999	588
2000	603
2001	666
2002	643
2003	721
2004	771
2005	769
2006	862

- Use una calculadora de gráficas para crear una gráfica de dispersión de los datos. Sea $t = 5$ para 1995.
- Use el comando *regression* de una calculadora de gráficas para hallar la ecuación de la recta de regresión de mínimos cuadrados que se ajuste a los datos.
- Use una calculadora de gráficas para trazar la gráfica de dispersión que creó en el inciso (a) y el modelo que encontró en el inciso (b) en la misma pantalla. ¿Qué tan cercanamente representa el modelo a los datos?
- Use el modelo para calcular las ventas brutas anuales de boletos en 2007 y 2009.
- Interprete el significado de la pendiente del modelo lineal en el contexto del problema.

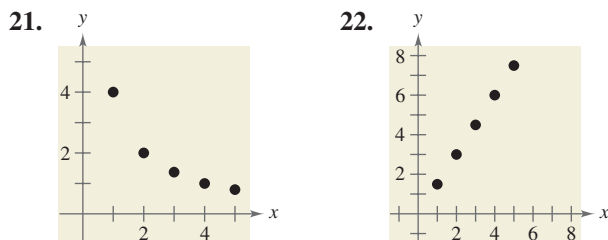
-  **20. ANÁLISIS DE DATOS: TELEVISORES** La tabla siguiente muestra el número N (en millones) de televisores en hogares de Estados Unidos, de 2000 a 2006. (Fuente: [Television Bureau of Advertising, Inc.](#))



Año	Televisores, N
2000	245
2001	248
2002	254
2003	260
2004	268
2005	287
2006	301

- (a) Use el comando *regression* de una calculadora de gráficas para hallar la ecuación de la recta de regresión de mínimos cuadrados que mejor se ajuste a los datos. Con $t = 0$ represente 2000.
- (b) Use la calculadora de gráficas para crear una gráfica de dispersión de los datos. A continuación grafique el modelo que encontró en el inciso (a) y la gráfica de dispersión en la misma pantalla. ¿Qué tan cercanamente representa el modelo a los datos?
- (c) Use el modelo para calcular el número de televisores en familias en Estados Unidos en 2008.
- (d) Use la biblioteca de su escuela, el internet o alguna otra fuente de consulta para analizar la precisión del cálculo del inciso (c).

PIÉNSELO En los Ejercicios 21 y 22, use la gráfica para determinar si y varía directa o inversamente con alguna potencia de x . Explique.



En los Ejercicios 23-26, use el valor dado de k para completar la tabla para el modelo de variación directa

$$y = kx^2.$$

Grafique los puntos en un sistema de coordenadas rectangulares.

x	2	4	6	8	10
$y = kx^2$					

23. $k = 1$ 24. $k = 2$
 25. $k = \frac{1}{2}$ 26. $k = \frac{1}{4}$

En los Ejercicios 27-30, use el valor dado de k para completar la tabla para el modelo de variación inversa

$$y = \frac{k}{x^2}.$$

Grafique los puntos en un sistema de coordenadas rectangulares.

x	2	4	6	8	10
$y = \frac{k}{x^2}$					

27. $k = 2$ 28. $k = 5$
 29. $k = 10$ 30. $k = 20$

En los Ejercicios 31-34, determine si el modelo de variación es de la forma $y = kx$ o $y = k/x$, y encuentre k . A continuación escriba un modelo que relacione y con k .

31.

x	5	10	15	20	25
y	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$

32.

x	5	10	15	20	25
y	2	4	6	8	10

33.

x	5	10	15	20	25
y	-3.5	-7	-10.5	-14	-17.5

34.

x	5	10	15	20	25
y	24	12	8	6	$\frac{24}{5}$

VARIACIÓN DIRECTA En los Ejercicios 35-38, suponga que y es directamente proporcional a x . Use el valor de x y el valor de y dados para hallar un modelo lineal que relacione y y x .

35. $x = 5, y = 12$ 36. $x = 2, y = 14$
 37. $x = 10, y = 2050$ 38. $x = 6, y = 580$

39. INTERÉS SIMPLE El interés simple sobre una inversión es directamente proporcional al monto de la inversión. Al invertir \$3250 en cierta emisión de bonos, una persona obtuvo un pago de interés de \$113.75 después de 1 año. Encuentre un modelo matemático que dé el interés I para esta emisión de bonos después de 1 año, en términos del monto invertido P .

40. INTERÉS SIMPLE El interés simple sobre una inversión es directamente proporcional a la cantidad de la inversión. Al invertir \$6500 en un bono municipal, una persona obtuvo un pago de interés de \$211.25 después de 1 año. Encuentre un modelo matemático que dé el interés I para este bono municipal después de 1 año en términos del monto invertido P .

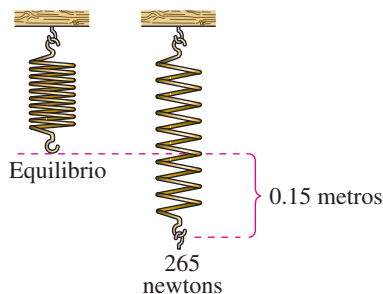
41. MEDICIÓN En una regla graduada con escalas en pulgadas y centímetros, una persona observa que 13 pulgadas es aproximadamente la misma longitud que 33 centímetros. Use esta información para hallar un modelo matemático que relacione centímetros y con pulgadas x . A continuación use el modelo para hallar los centímetros que hay en 10 pulgadas y 20 pulgadas.

42. MEDICIÓN Al comprar gasolina, usted observa que 14 galones es aproximadamente la misma cantidad que 53 litros. Use esta información para hallar un modelo lineal que relacione litros y con galones x . A continuación use el modelo para hallar los litros que hay en 5 galones y 25 galones.

- 43. IMPUESTOS** Las contribuciones (o impuesto sobre bienes raíces) están basadas en el valor estimado de una propiedad. Una casa que tiene un valor estimado de \$150 000 tiene un impuesto de \$5520. Encuentre un modelo matemático que dé la cantidad de impuesto sobre bienes raíces y en términos del valor estimado x de la propiedad. Use el modelo para hallar el impuesto sobre una casa que tiene un valor estimado de \$225 000.
- 44. IMPUESTOS** El impuesto estatal sobre ventas está basado en precios de venta al por menor. Un artículo que se vende en \$189.99 tiene un impuesto sobre ventas de \$11.40. Encuentre un modelo matemático que dé la cantidad de impuesto de ventas y en términos del precio al por menor x . Use el modelo para hallar el impuesto sobre ventas en una compra de \$639.99.

LEY DE HOOKE En los Ejercicios 45-48, use la ley de Hooke para resortes, la cual expresa que la distancia que un resorte se estira (o comprime) varía directamente con la fuerza aplicada sobre él.

- 45.** Una fuerza de 265 newtons estira un resorte 0.15 metros (vea figura).



- (a) ¿Qué distancia se estira un resorte al aplicarle una fuerza de 90 newtons?
- (b) ¿Qué fuerza se requiere para estirarlo 0.1 metros?
- 46.** Una fuerza de 220 newtons estira 0.12 metros un resorte. ¿Qué fuerza se requiere para estirarlo 0.16 metros?
- 47.** La espira de resorte de un juguete soporta el peso de un niño. El resorte es comprimido una distancia de 1.9 pulgadas por el peso de un niño de 25 libras. El juguete no funcionará en forma apropiada si su resorte se comprime más de 3 pulgadas. ¿Cuál es el peso del niño más pesado al que debe permitirse usar el juguete?
- 48.** Una puerta superior de garage tiene dos resortes, uno en cada lado de la puerta (vea figura). Se requiere una fuerza de 15 libras para estirar cada resorte 1 pie. Por efecto de un sistema de poleas, los resortes se estiran sólo la mitad de la distancia que recorre la puerta. La puerta se mueve un total de 8 pies, y los resortes están en su longitud natural cuando se abre la puerta. Encuentre la fuerza combinada de levantamiento aplicada a la puerta por los resortes cuando la puerta se cierre.

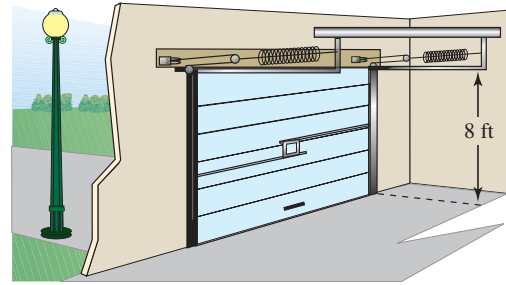


FIGURA PARA 48

En los Ejercicios 49-58, encuentre un modelo matemático para el enunciado verbal.

- 49.** A varía directamente con el cuadrado de r .
- 50.** V varía directamente con el cubo de e .
- 51.** y varía inversamente con el cuadrado de x .
- 52.** h varía inversamente con la raíz cuadrada de s .
- 53.** F varía directamente con g e inversamente con r^2 .
- 54.** z es conjuntamente proporcional al cuadrado de x y al cubo de y .
- 55. LEY DE BOYLE:** Para una temperatura constante, la presión P de un gas es inversamente proporcional al volumen V del gas.
- 56. LEY DE NEWTON DEL ENFRIAMIENTO:** La variación R de la temperatura de un cuerpo es proporcional a la diferencia entre la temperatura T del cuerpo y la temperatura T_e del medio ambiente en el que se encuentre el cuerpo.
- 57. LEY DE NEWTON DE LA GRAVITACIÓN UNIVERSAL:** La atracción gravitacional F entre dos cuerpos de masas m_1 y m_2 es proporcional al producto de las masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia r que los separa.
- 58. CRECIMIENTO LOGÍSTICO:** La variación de crecimiento R de una población es conjuntamente proporcional al tamaño S de la población y a la diferencia entre S y el tamaño máximo L de población que el ambiente puede sostener.

En los Ejercicios 59-66, escriba una oración usando la terminología de variación de esta sección para describir la fórmula.

- 59. Área de un triángulo:** $A = \frac{1}{2}bh$
- 60. Área de un rectángulo:** $A = lw$
- 61. Área de un triángulo equivalente:** $A = (\sqrt{3}s^2)/4$
- 62. Área superficial de una esfera:** $S = 4\pi r^2$
- 63. Volumen de una esfera:** $V = \frac{4}{3}\pi r^3$
- 64. Volumen de un cilindro circular recto:** $V = \pi r^2 h$
- 65. Rapidez media:** $r = d/t$
- 66. Vibraciones libres:** $\omega = \sqrt{(kg)/W}$

En los Ejercicios 67-74, encuentre un modelo matemático que represente el enunciado. (En cada caso, determine la constante de proporcionalidad.)

67. A varía directamente con r^2 . ($A = 9\pi$ cuando $r = 3$.)
68. y varía inversamente con x . ($y = 3$ cuando $x = 25$.)
69. y es inversamente proporcional a x . ($y = 7$ cuando $x = 4$.)
70. z varía conjuntamente con x y y . ($z = 64$ cuando $x = 4$ y $y = 8$.)
71. F es conjuntamente proporcional a r y a la tercera potencia de s . ($F = 4158$ cuando $r = 11$ y $s = 3$.)
72. P varía directamente con x e inversamente con el cuadrado de y . ($P = \frac{28}{3}$ cuando $x = 42$ y $y = 9$.)
73. z varía directamente con el cuadrado de x e inversamente con y . ($z = 6$ cuando $x = 6$ y $y = 4$.)
74. v varía conjuntamente con p y q e inversamente con el cuadrado de s . ($v = 1.5$ cuando $p = 4.1$, $q = 6.3$ y $s = 1.2$.)

ECOLOGÍA En los Ejercicios 75 y 76, use el hecho de que el diámetro de la partícula más grande que puede ser movida por una corriente varía más o menos directamente con el cuadrado de la velocidad de la corriente.

75. Una corriente con velocidad de $\frac{1}{4}$ de milla por hora puede mover partículas gruesas de arena de unos 0.02 pulgadas de diámetro. Calcule la velocidad requerida para llevar partículas de 0.12 pulgadas de diámetro.
76. Una corriente de velocidad v puede mover partículas de diámetro d o menores. ¿En qué factor aumenta d cuando se duplica la velocidad?

RESISTENCIA En los Ejercicios 77 y 78, use el hecho de que la resistencia de un alambre, portador de una corriente eléctrica, es directamente proporcional a su longitud e inversamente proporcional a su área de sección transversal.

77. Si el alambre de cobre #28 (que tiene un diámetro de 0.0126 de pulgada) tiene una resistencia de 66.17 ohms por mil pies, ¿qué longitud de alambre de cobre #28 producirá una resistencia de 33.5 ohms?
78. Una sección de alambre de cobre de 14 pies produce una resistencia de 0.05 ohms. Use la constante de proporcionalidad del Ejercicio 77 para hallar el diámetro del alambre.
79. **TRABAJO** El trabajo W (en joules) realizado al levantar un cuerpo varía conjuntamente con la masa m (en kilogramos) del cuerpo y la altura h (en metros) que el cuerpo es levantado. El trabajo realizado cuando un cuerpo de 120 kg es levantado 1.8 m es 2116.8 joules. ¿Cuánto trabajo se realiza al levantar 1.5 m un cuerpo de 100 kg?

80. MÚSICA La frecuencia de vibración de una cuerda de piano varía directamente con la raíz cuadrada de la tensión de la cuerda e inversamente con la longitud de ésta. La cuerda del la medio tiene una frecuencia de 440 vibraciones por segundo. Halle la frecuencia de una cuerda 1.25 veces más tensa y 1.2 veces más larga.

81. FLUJO LÍQUIDO La velocidad v de un fluido que se mueve en un conducto es inversamente proporcional al área de sección transversal del conducto. (Suponga que el volumen del flujo por unidad de tiempo se mantiene constante.) Determine el cambio en la velocidad de flujo de agua de una manguera cuando una persona pone un dedo en uno de sus extremos para disminuir su área de sección transversal en 25%.

82. CARGA EN UNA VIGA La máxima carga que puede ser soportada con seguridad por una viga horizontal varía conjuntamente con el ancho de la viga y el cuadrado de su profundidad, e inversamente con la longitud de la viga. Determine los cambios en la máxima carga segura bajo las siguientes condiciones.

- (a) El ancho y longitud de la viga se duplican.
- (b) El ancho y profundidad de la viga se duplican.
- (c) Las tres dimensiones se duplican.
- (d) La profundidad de la viga se reduce a la mitad.

83. ANÁLISIS DE DATOS: TEMPERATURAS DEL OCÉANO

Un oceanógrafo toma lecturas de temperaturas C del agua (en grados Celsius) a varias profundidades d (en metros). Los datos recolectados se muestran en la tabla.



Profundidad, d	Temperatura, C
1000	4.2°
2000	1.9°
3000	1.4°
4000	1.2°
5000	0.9°

- (a) Trace una gráfica de dispersión de los datos.
- (b) ¿Le parece que los datos pueden ser modelados por el modelo de variación inversa $C = k/d$? Si es así, encuentre k para cada par de coordenadas.
- (c) Determine el valor medio de k del inciso (b) para hallar el modelo de variación inversa $C = k/d$.
-  (d) Use una calculadora de gráficas para trazar los puntos de datos y el modelo inverso del inciso (c).
- (e) Use el modelo para calcular la profundidad a la que la temperatura del agua sea de 3° C.

- 84. ANÁLISIS DE DATOS: EXPERIMENTO FÍSICO** Un experimento en un laboratorio de física requiere que un estudiante mida las longitudes comprimidas y (en centímetros) de un resorte, cuando se aplican varias fuerzas de F libras. Los datos se muestran en la tabla.



Fuerza, F	Longitud, y
0	0
2	1.15
4	2.3
6	3.45
8	4.6
10	5.75
12	6.9

- (a) Trace una gráfica de dispersión de los datos.
 (b) ¿Le parece que los datos pueden ser modelados por la ley de Hooke? Si es así, calcule k . (Vea Ejercicios 45–48.)
 (c) Use el modelo del inciso (b) para calcular la fuerza necesaria para comprimir 9 centímetros el resorte.

- 85. ANÁLISIS DE DATOS: INTENSIDAD DE LUZ** Un medidor de luz está colocado a x centímetros de una fuente de luz, y se mide la intensidad y de la luz (en microwatts por centímetro cuadrado). Los resultados se muestran como pares ordenados (x, y) .

(30, 0.1881)	(34, 0.1543)	(38, 0.1172)
(42, 0.0998)	(46, 0.0775)	(50, 0.0645)

Un modelo para los datos es $y = 262.76/x^{2.12}$.

-  (a) Use una calculadora de gráficas para graficar los puntos de datos y el modelo en la misma pantalla.
 (b) Use el modelo para calcular la intensidad luminosa a 25 centímetros de la fuente de luz.

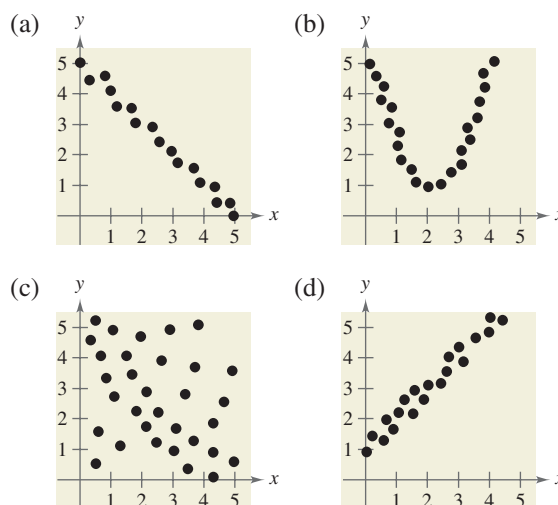
- 86. ILUMINACIÓN** La iluminación desde una fuente de luz varía inversamente con el cuadrado de la distancia desde la fuente de luz. Cuando la distancia desde una fuente de luz se duplica, ¿cómo cambia la iluminación? Discuta este modelo en términos de los datos dados en el Ejercicio 85. Dé una posible explicación de la diferencia.

EXPLORACIÓN

¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 87 y 88, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

- 87.** En la ecuación para hallar la energía cinética, $E = \frac{1}{2}mv^2$, la cantidad de energía cinética E es directamente proporcional a la masa m de un objeto y el cuadrado de su velocidad v .
88. Si el coeficiente de correlación de una recta de regresión de mínimos cuadrados se aproxima a -1 , la recta de regresión no puede usarse para describir los datos.

- 89.** Analice cómo pueden ser calculados, por un modelo lineal, los datos mostrados en cada gráfica de dispersión.



- 90. ESCRITURA** Un modelo lineal para el pronóstico de ganar premios en una carrera está basado en datos de tres años. Escriba un párrafo que analice la potencial precisión o imprecisión de ese modelo.

- 91. ESCRITURA** Suponga que la constante de proporcionalidad es positiva y y varía directamente con x . Cuando aumenta una de las variables, ¿cómo cambiará la otra? Explique su razonamiento.

- 92. ESCRITURA** Suponga que la constante de proporcionalidad es positiva y que y varía inversamente con x . Cuando aumenta una de las variables, ¿cómo cambiará la otra? Explique su razonamiento.

93. ESCRITURA

- (a) Dado que y varía inversamente con el cuadrado de x y x se duplica, ¿cómo cambiará y ? Explique.
 (b) Dado que y varía directamente con el cuadrado de x y x se duplica, ¿cómo cambiará y ? Explique.

- 94. TOQUE FINAL** Los precios de tres tamaños de pizza en un restaurante son como sigue.

9 pulgadas: \$8.78, 12 pulgadas: \$11.78, 15 pulgadas: \$14.18

Es de esperarse que el precio de cierto tamaño de pizza fuera directamente proporcional a su área superficial. ¿Es ese el caso de este restaurante de pizzas? Si no lo es, ¿qué tamaño de pizza es la mejor compra?

PROYECTO: FRAUDE Y ROBO DE IDENTIDAD Para trabajar una aplicación extendida, analizando los números de víctimas de quejas por fraude y robo de identidad en Estados Unidos en 2007, visite el sitio web del texto en academic.cengage.com. (Fuente: U.S. Census Bureau)

1 RESUMEN DEL CAPÍTULO

¿Qué aprendió?

Explicación/Ejemplos

Ejercicios de repaso

Sección 1.1	Localizar puntos en el plano cartesiano (p. 2).	Para un par ordenado (x, y) , la coordenada x es la distancia dirigida desde el eje y al punto, y la coordenada y es la distancia dirigida del eje x al punto.	1–4
	Usar la fórmula de la distancia (p. 4) y la fórmula del punto medio (p. 5).	Fórmula de la distancia: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ Fórmula del punto medio: Punto medio $= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$	5–8
	Usar el plano de coordenadas para modelar y resolver problemas reales (p. 6).	El plano de coordenadas se puede usar para hallar la longitud de un pase de fútbol. (Vea Ejemplo 6.)	9–12
Sección 1.2	Trazar gráficas de ecuaciones (p. 13), hallar intersecciones con los ejes x y y de gráficas (p. 16) y usar simetría para trazar gráficas de ecuaciones (p. 17).	Para graficar una ecuación, haga una tabla de valores, localice los puntos y luego únalos con una curva lisa o recta. Para hallar intersecciones con el eje x , iguale y a cero y despeje x . Para hallar intersecciones con el eje y , iguale x a cero y despeje y . Las gráficas pueden tener simetría respecto a uno de los ejes de coordenadas o respecto al origen.	13–34
	Encontrar ecuaciones de gráficas de circunferencias y trazarlas (p. 19).	El punto (x, y) está en la circunferencia de radio r y centro (h, k) si y sólo si $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$.	35–42
	Usar gráficas de ecuaciones al resolver problemas de la vida real (p. 20).	La gráfica de una ecuación se puede usar para calcular el peso recomendado de un hombre. (Vea Ejemplo 9.)	43, 44
Sección 1.3	Usar la pendiente para graficar ecuaciones lineales con dos variables (p. 24).	La gráfica de la ecuación $y = mx + b$ es una recta cuya pendiente es m y cuya intersección con el eje y es $(0, b)$.	45–48
	Encontrar la pendiente de una recta dados dos puntos en ésta (p. 26).	La pendiente m de la recta no vertical que pasa por (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es $m = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$, donde $x_1 \neq x_2$.	49–52
	Escribir ecuaciones lineales con dos variables (p. 28).	La ecuación de la recta con pendiente m que pasa por el punto (x_1, y_1) es $y - y_1 = m(x - x_1)$.	53–60
	Usar la pendiente para identificar rectas paralelas y perpendiculares (p. 29).	Rectas paralelas: las pendientes son iguales. Rectas perpendiculares: las pendientes son recíprocas negativas entre sí.	61, 62
	Usar pendiente y ecuaciones lineales con dos variables para modelar y resolver problemas de la vida real (p. 30).	Una ecuación lineal con dos variables se puede usar para describir el valor en libros del equipo de ejercicio en un año determinado. (Vea Ejemplo 7.)	63, 64
Sección 1.4	Determinar si las relaciones entre dos variables son funciones (p. 39).	Una función f de un conjunto A (dominio) a un conjunto B (rango) es una relación que asigna a cada elemento x del conjunto A exactamente un elemento y del conjunto B .	65–68
	Usar notación de función, evaluar funciones y hallar dominios (p. 41).	Ecuación: $f(x) = 5 - x^2$ $f(2)$: $f(2) = 5 - 2^2 = 1$ Dominio de $f(x) = 5 - x^2$: Todos los números reales	69–74
	Usar funciones para modelar y resolver problemas de la vida real (p. 45).	Una función se puede usar para modelar el número de vehículos de combustible alternativo en Estados Unidos. (Vea Ejemplo 10.)	75, 76
	Evaluar cocientes de diferencias (p. 46).	Cociente de diferencias: $[f(x + h) - f(x)]/h, h \neq 0$	77, 78
Sección 1.5	Usar la prueba de la recta vertical para funciones (p. 55).	Una gráfica representa una función si y sólo si ninguna recta vertical la interseca en más de un punto.	79–82
	Hallar los ceros de funciones (p. 56).	Ceros de $f(x)$: valores de x para los cuales $f(x) = 0$	83–86

¿Qué aprendió?

Explicación/Ejemplos

Ejercicios de repaso

Sección 1.5	Determinar intervalos en los que las funciones son crecientes o decrecientes (p. 57), hallar valores relativos mínimo y máximo (p. 58) y hallar el promedio de variación de una función (p. 59).	Para determinar si una función es creciente, decreciente o constante en un intervalo, hay que evaluar la función para varios valores de x . Los puntos en los que cambia el comportamiento de una función pueden ayudar a determinar el mínimo o el máximo relativos. El promedio de variación entre cualesquier dos puntos es la pendiente de la recta (recta secante) que pasa por los dos puntos.	87–96
	Identificar funciones pares e impares (p. 60).	Par: Para cada x en el dominio de f , $f(-x) = f(x)$. Impar: Para cada x en el dominio de f , $f(-x) = -f(x)$.	97–100
Sección 1.6	Identificar y graficar diferentes tipos de funciones (p. 66) y reconocer gráficas de funciones principales (p. 70).	Lineal: $f(x) = ax + b$; cuadrática: $f(x) = x^2$; cúbica: $f(x) = x^3$; raíz cuadrada: $f(x) = \sqrt{x}$; recíproca: $f(x) = 1/x$ Ocho de las funciones que más se usan en álgebra se ven en la Figura 1.75.	101–114
Sección 1.7	Usar desplazamientos verticales y horizontales (p. 73), reflexiones (p. 75) y transformaciones no rígidas (p. 77) para trazar gráficas de funciones.	Desplazamientos verticales: $h(x) = f(x) + c$ o $h(x) = f(x) - c$ Desplazamientos horizontales: $h(x) = f(x - c)$ o $h(x) = f(x + c)$ Reflexión en el eje x: $h(x) = -f(x)$ Reflexión en el eje y: $h(x) = f(-x)$ Transformaciones no rígidas: $h(x) = cf(x)$ or $h(x) = f(cx)$	115–128
Sección 1.8	Sumar, restar, multiplicar y dividir funciones (p. 83) y hallar las composiciones de funciones (p. 85).	$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ $(fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$ $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$, $g(x) \neq 0$ Composición de funciones: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$	129–134
	Usar combinaciones y composiciones de funciones para modelar y resolver problemas de la vida real (p. 87).	Una función compuesta se puede usar para representar el número de bacterias en alimentos como función del tiempo que el alimento ha estado en refrigeración. (Vea Ejemplo 8.)	135, 136
Sección 1.9	Hallar funciones inversas informalmente y verificar que dos funciones son inversas una de otra (p. 92).	Sean f y g dos funciones tales que $f(g(x)) = x$ para toda x en el dominio de g y $g(f(x)) = x$ para toda x en el dominio de f . Bajo estas condiciones, la función g es la inversa de la función f .	137, 138
	Usar gráficas de funciones para determinar si las funciones tienen inversas (p. 94).	Si el punto (a, b) está en la gráfica de f , entonces el punto (b, a) debe estar en la gráfica de f^{-1} , y viceversa. En pocas palabras, f^{-1} es una reflexión de f en la recta $y = x$.	139, 140
	Usar la prueba de la recta horizontal para determinar si las funciones son biunívocas (p. 95).	Prueba de la recta horizontal para funciones inversas Una función f tiene una función inversa si y sólo si ninguna recta horizontal interseca a f en más de un punto.	141–144
	Hallar funciones inversas algebraicamente (p. 96).	Para hallar funciones inversas, sustituya $f(x)$ por y , intercambie los papeles de x y y y despeje y . Sustituya y por $f^{-1}(x)$.	145–150
Sección 1.10	Usar modelos matemáticos para calcular conjuntos de puntos de datos (p. 102) y usar el comando <i>regression</i> de una calculadora de gráficas para hallar la ecuación de una recta de regresión de mínimos cuadrados (p. 103).	Para ver lo bien que un modelo se ajusta a un conjunto de datos, compare los valores reales y los del modelo de y . La suma de diferencias cuadradas es la suma de los cuadrados de las diferencias entre los valores reales de datos y los del modelo. La recta de regresión de mínimos cuadrados es el modelo lineal con la suma mínima de diferencias cuadradas.	151, 152
	Escribir modelos matemáticos para variación directa, variación directa como n -ésima potencia, variación inversa y variación conjunta (pp. 104–107).	Variación directa: $y = kx$ para alguna constante k diferente de cero Variación directa como n-ésima potencia: $y = kx^n$ para alguna constante k Variación inversa: $y = k/x$ para alguna constante k Variación conjunta: $z = kxy$ para alguna constante k	153–158

1 EJERCICIOS DE REPASO

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

1.1 En los Ejercicios 1 y 2, localice los puntos en el plano cartesiano.

1. $(5, 5), (-2, 0), (-3, 6), (-1, -7)$
2. $(0, 6), (8, 1), (4, -2), (-3, -3)$

En los Ejercicios 3 y 4, determine el cuadrante(s) en el que (x, y) está ubicada de modo que se satisfaga la condición(es).

3. $x > 0$ y $y = -2$
4. $xy = 4$

En los Ejercicios 5-8, (a) localice los puntos, (b) encuentre la distancia entre ellos, y (c) encuentre el punto medio del segmento de recta que los enlaza.

5. $(-3, 8), (1, 5)$
6. $(-2, 6), (4, -3)$
7. $(5.6, 0), (0, 8.2)$
8. $(1.8, 7.4), (-0.6, -14.5)$

En los Ejercicios 9 y 10, el polígono está desplazado a una nueva posición en el plano. Encuentre las coordenadas de los vértices del polígono en su nueva posición.

9. Coordenadas originales de los vértices:

$(4, 8), (6, 8), (4, 3), (6, 3)$

Desplazamiento: ocho unidades hacia abajo, cuatro unidades a la izquierda

10. Coordenadas originales de los vértices:

$(0, 1), (3, 3), (0, 5), (-3, 3)$

Desplazamiento: tres unidades hacia arriba, dos unidades a la izquierda

11. **VENTAS** Starbucks tuvo ventas anuales de \$2170 millones de dólares en 2000 y \$10 380 millones de dólares en 2008. Use la fórmula del punto medio para calcular las ventas en 2004. (Fuente: Starbucks Corp.)

12. **METEOROLOGÍA** La temperatura aparente es una medida de incomodidad relativa para una persona debido al calor o a elevada humedad. La tabla siguiente muestra las temperaturas reales x (en grados Fahrenheit) contra las temperaturas aparentes y (en grados Fahrenheit) para una humedad relativa de 75%.

x	70	75	80	85	90	95	100
y	70	77	85	95	109	130	150

- Trace una gráfica de dispersión de los datos mostrados en la tabla.
- Encuentre el cambio en la temperatura aparente cuando la temperatura real cambia de 70°F a 100°F .

1.2 En los Ejercicios 13-16, complete una tabla de valores. Use los puntos de solución para trazar la gráfica de la ecuación.

13. $y = 3x - 5$
14. $y = -\frac{1}{2}x + 2$
15. $y = x^2 - 3x$
16. $y = 2x^2 - x - 9$

En los Ejercicios 17-22, trace la gráfica *manualmente*.

17. $y - 2x - 3 = 0$
18. $3x + 2y + 6 = 0$
19. $y = \sqrt{5 - x}$
20. $y = \sqrt{x + 2}$
21. $y + 2x^2 = 0$
22. $y = x^2 - 4x$

En los Ejercicios 23-26, encuentre las intersecciones con los ejes x y y de la gráfica de la ecuación.

23. $y = 2x + 7$
24. $y = |x + 1| - 3$
25. $y = (x - 3)^2 - 4$
26. $y = x\sqrt{4 - x^2}$

En los Ejercicios 27-34, identifique cualesquiera intersecciones con los ejes y pruebe si hay simetría. A continuación trace la gráfica de la ecuación.

27. $y = -4x + 1$
28. $y = 5x - 6$
29. $y = 5 - x^2$
30. $y = x^2 - 10$
31. $y = x^3 + 3$
32. $y = -6 - x^3$
33. $y = \sqrt{x + 5}$
34. $y = |x| + 9$

En los Ejercicios 35-40, encuentre el centro y radio de la circunferencia y trace su gráfica.

35. $x^2 + y^2 = 9$
36. $x^2 + y^2 = 4$
37. $(x + 2)^2 + y^2 = 16$
38. $x^2 + (y - 8)^2 = 81$
39. $(x - \frac{1}{2})^2 + (y + 1)^2 = 36$
40. $(x + 4)^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = 100$

41. Encuentre la forma estándar de la ecuación de la circunferencia para la cual los puntos extremos de un diámetro son $(0, 0)$ y $(4, -6)$.

42. Encuentre la forma estándar de la ecuación de la circunferencia para la cual los puntos extremos de un diámetro son $(-2, -3)$ y $(4, -10)$.

43. **NÚMERO DE TIENDAS** El número N de tiendas Walgreen para los años 2000 al 2008 se pueden calcular con el modelo

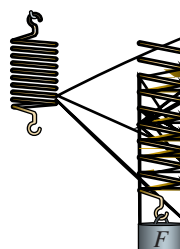
$$N = 439.9t + 2987, \quad 0 \leq t \leq 8$$

donde t representa el año, con $t = 0$ correspondiente a 2000. (Fuente: Walgreen Co.)

- Trace la gráfica del modelo.
- Use la gráfica para calcular el año en el que el número de tiendas era de 6500.

44. **FÍSICA** La fuerza F (en libras) necesaria para estirar un resorte x pulgadas desde su longitud natural (vea figura) es

$$F = \frac{5}{4}x, \quad 0 \leq x \leq 20.$$



- (a) Use el modelo para completar la tabla.

x	0	4	8	12	16	20
Fuerza, F						

- (b) Trace una gráfica del modelo.
 (c) Use la gráfica para calcular la fuerza necesaria para estirar el resorte 10 pulgadas.

En los Ejercicios 45-48, encuentre la pendiente e intersección con el eje y (si es posible) de la ecuación de la recta. Trace la recta.

45. 46.
 47. 48.

En los Ejercicios 49-52, localice los puntos y encuentre la pendiente de la recta que pasa por el par indicado.

49. 50.
 51. 52.

En los Ejercicios 53-56, encuentre la forma pendiente-intersección de la ecuación de la recta que pasa por el punto dado y tiene la pendiente indicada. Trace la recta.

Punto

Pendiente

53.
 54.
 55.
 56. no está definida.

En los Ejercicios 57-60, encuentre la forma pendiente-intersección de la ecuación de la recta que pase por los puntos.

57. 58.
 59. 60.

En los Ejercicios 61 y 62, escriba las formas pendiente-intersección de las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto dado (a) paralelo a la recta dada y (b) perpendicular a la recta dada.

Punto

Recta

61.

62.

RAZÓN DE CAMBIO En los Ejercicios 63 y 64 se da el valor en dólares de un producto en 2010 y la tasa a la que se espera que el valor del producto cambie durante los siguientes 5 años. Use esta información para escribir la ecuación lineal que dé el valor en dólares V del producto en términos del año.

76. PROBLEMA DE MEZCLAS De un recipiente de 50 litros lleno con un ácido al 40% de concentración, se sacan x litros y se sustituyen con un ácido al 100% de concentración.

- Escriba la cantidad de ácido de la mezcla final como función de x .
- Determine el dominio y rango de la función.
- Determine x si la mezcla final es 50% ácida.

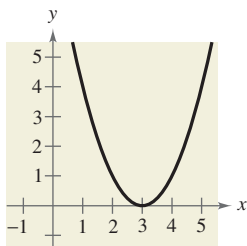
En los Ejercicios 77 y 78, encuentre los cocientes de diferencias y simplifique su respuesta.

77. $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$, $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, $h \neq 0$

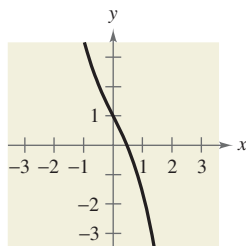
78. $f(x) = x^3 - 5x^2 + x$, $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, $h \neq 0$

1.5 En los Ejercicios 79-82, use la prueba de la recta vertical para determinar si y es función de x . Para imprimir una copia ampliada de la gráfica, visite el sitio web www.mathgraphs.com.

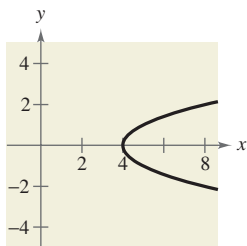
79. $y = (x - 3)^2$



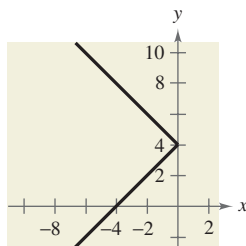
80. $y = -\frac{3}{5}x^3 - 2x + 1$



81. $x - 4 = y^2$



82. $x = -|4 - y|$



En los Ejercicios 83-86, encuentre algebraicamente los ceros de la función.

83. $f(x) = 3x^2 - 16x + 21$

84. $f(x) = 5x^2 + 4x - 1$

85. $f(x) = \frac{8x + 3}{11 - x}$

86. $f(x) = x^3 - x^2 - 25x + 25$

En los Ejercicios 87 y 88, use una calculadora de gráficas para graficar la función y visualmente determine los intervalos en los que ésta es creciente, decreciente o constante.

87. $f(x) = |x| + |x + 1|$ 88. $f(x) = (x^2 - 4)^2$

En los Ejercicios 89-92, use una calculadora de gráficas para graficar la función y calcular cualesquier valores mínimo o máximo relativos.

89. $f(x) = -x^2 + 2x + 1$

90. $f(x) = x^4 - 4x^2 - 2$

91. $f(x) = x^3 - 6x^4$

92. $f(x) = x^3 - 4x^2 - 1$

En los Ejercicios 93-96, encuentre la razón de cambio promedio de la función de x_1 a x_2 .

Función	Valores de x
93. $f(x) = -x^2 + 8x - 4$	$x_1 = 0, x_2 = 4$
94. $f(x) = x^3 + 12x - 2$	$x_1 = 0, x_2 = 4$
95. $f(x) = 2 - \sqrt{x + 1}$	$x_1 = 3, x_2 = 7$
96. $f(x) = 1 - \sqrt{x + 3}$	$x_1 = 1, x_2 = 6$

En los Ejercicios 97-100, determine si la función es par, impar o ninguna de éstas.

97. $f(x) = x^5 + 4x - 7$

98. $f(x) = x^4 - 20x^2$

99. $f(x) = 2x\sqrt{x^2 + 3}$

100. $f(x) = \sqrt[5]{6x^2}$

1.6 En los Ejercicios 101 y 102, escriba la función lineal f tal que tenga los valores indicados. A continuación trace la gráfica de la función.

101. $f(2) = -6, f(-1) = 3$

102. $f(0) = -5, f(4) = -8$

En los Ejercicios 103-112, grafique la función.

103. $f(x) = 3 - x^2$

104. $h(x) = x^3 - 2$

105. $f(x) = -\sqrt{x}$

106. $f(x) = \sqrt{x + 1}$

107. $g(x) = \frac{3}{x}$

108. $g(x) = \frac{1}{x + 5}$

109. $f(x) = \lfloor x \rfloor + 2$

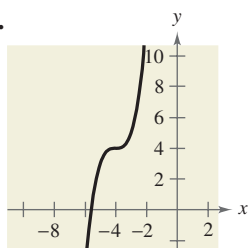
110. $g(x) = \lfloor x + 4 \rfloor$

111. $f(x) = \begin{cases} 5x - 3, & x \geq -1 \\ -4x + 5, & x < -1 \end{cases}$

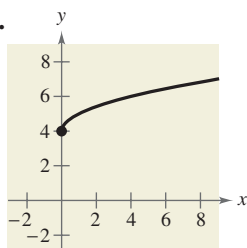
112. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & x < -2 \\ 5, & -2 \leq x \leq 0 \\ 8x - 5, & x > 0 \end{cases}$

En los Ejercicios 113 y 114, la figura muestra la gráfica de una función principal transformada. Identifique la función principal.

113.



114.



1.7 En los Ejercicios 115-128, h está relacionada con una de las funciones principales descritas en este capítulo. (a) Identifique la función principal f . (b) Describa la sucesión de transformaciones de f a h . (c) Trace la gráfica de h . (d) Use la notación de funciones para escribir h en términos de f .

115. $h(x) = x^2 - 9$

116. $h(x) = (x - 2)^3 + 2$

117. $h(x) = -\sqrt{x} + 4$

118. $h(x) = |x + 3| - 5$

119. $h(x) = -(x + 2)^2 + 3$

120. $h(x) = \frac{1}{2}(x - 1)^2 - 2$

121. $h(x) = -\lfloor x \rfloor + 6$

122. $h(x) = -\sqrt{x + 1} + 9$

123. $h(x) = -|-x + 4| + 6$

124. $h(x) = -(x + 1)^2 - 3$

125. $h(x) = 5\lfloor x - 9 \rfloor$

126. $h(x) = -\frac{1}{3}x^3$

127. $h(x) = -2\sqrt{x - 4}$

128. $h(x) = \frac{1}{2}|x| - 1$

1.8 En los Ejercicios 129 y 130, encuentre (a) $(f + g)(x)$, (b) $(f - g)(x)$, (c) $(fg)(x)$, y (d) $(f/g)(x)$. ¿Cuál es el dominio de f/g ?

129. $f(x) = x^2 + 3$, $g(x) = 2x - 1$

130. $f(x) = x^2 - 4$, $g(x) = \sqrt{3 - x}$

En los Ejercicios 131 y 132, encuentre (a) $f \circ g$ y (b) $g \circ f$. Encuentre el dominio de cada función y cada función compuesta.

131. $f(x) = \frac{1}{3}x - 3$, $g(x) = 3x + 1$

132. $f(x) = x^3 - 4$, $g(x) = \sqrt[3]{x + 7}$

f En los Ejercicios 133 y 134, encuentre dos funciones f y g tales que $(f \circ g)(x) = h(x)$. (Hay numerosas respuestas correctas.)

133. $h(x) = (1 - 2x)^3$

134. $h(x) = \sqrt[3]{x + 2}$

135. GASTOS DE TELÉFONO El promedio de gastos anuales (en dólares) por servicios de telefonía residencial $r(t)$ y celular $c(t)$ de 2001 a 2006 se puede calcular con las funciones $r(t) = 27.5t + 705$ y $c(t) = 151.3t + 151$, donde t representa el año, con $t = 1$ correspondiente a 2001. (Fuente: Bureau of Labor Statistics)

(a) Encuentre e interprete $(r + c)(t)$.

(b) Use una calculadora de gráficas para graficar $r(t)$, $c(t)$, y $(r + c)(t)$ en la misma pantalla.



(c) Encuentre $(r + c)(13)$. Use la gráfica del inciso (b) para verificar su resultado.

136. CANTIDAD DE BACTERIAS El número N de bacterias en un alimento refrigerado está dado por

$$N(T) = 25T^2 - 50T + 300, \quad 2 \leq T \leq 20$$

donde T es la temperatura del alimento en grados Celsius. Cuando el alimento se retira de refrigeración, su temperatura está dada por

$$T(t) = 2t + 1, \quad 0 \leq t \leq 9$$

donde t es el tiempo en horas. (a) Encuentre la composición $N(T(t))$ e interprete su significado en el contexto y (b) encuentre el tiempo cuando la cantidad de bacterias llegue a 750.

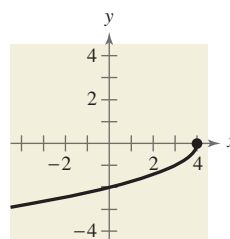
1.9 En los Ejercicios 137 y 138, encuentre la función inversa de f informalmente. Verifique que $f(f^{-1}(x)) = x$ y $f^{-1}(f(x)) = x$.

137. $f(x) = 3x + 8$

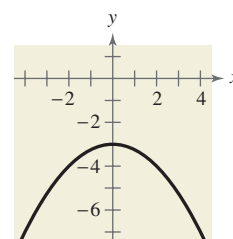
138. $f(x) = \frac{x - 4}{5}$

En los Ejercicios 139 y 140, determine si la función tiene una función inversa.

139.



140.



En los Ejercicios 141-144, use una calculadora de gráficas para graficar la función y use la prueba de la recta horizontal para determinar si ésta es biunívoca y por tanto tiene una función inversa.

141. $f(x) = 4 - \frac{1}{3}x$

142. $f(x) = (x - 1)^2$

143. $h(t) = \frac{2}{t - 3}$

144. $g(x) = \sqrt{x + 6}$

En los Ejercicios 145-148, (a) encuentre la función inversa de f , (b) grafique f y f^{-1} en el mismo conjunto de ejes de coordenadas, (c) describa la relación entre las gráficas de f y f^{-1} , y (d) exprese los dominios y rangos de f y f^{-1} .

145. $f(x) = \frac{1}{2}x - 3$

146. $f(x) = 5x - 7$

147. $f(x) = \sqrt{x + 1}$

148. $f(x) = x^3 + 2$

En los Ejercicios 149 y 150, restrinja el dominio de la función f a un intervalo en el que la función sea creciente y determine f^{-1} en ese intervalo.

149. $f(x) = 2(x - 4)^2$

150. $f(x) = |x - 2|$

1.10

151. DISCOS COMPACTOS Los valores V (en miles de millones de dólares) de embarques de discos compactos en Estados Unidos, de 2000 a 2007, se muestran en la tabla siguiente. Un modelo lineal que calcula estos datos es

$$V = -0.742t + 13.62$$

donde t representa el año, con $t = 0$ correspondiente a 2000. (Fuente: Recording Industry Association of America)



Año	Valor, V
2000	13.21
2001	12.91
2002	12.04
2003	11.23
2004	11.45
2005	10.52
2006	9.37
2007	7.45

- Grafique los datos reales y el modelo en el mismo conjunto de ejes de coordenadas.
- ¿Qué tan cercanamente el modelo representa los datos?



152. ANÁLISIS DE DATOS: USO DE TV La tabla siguiente muestra el número proyectado de horas H de uso de la televisión en Estados Unidos, de 2003 a 2011. (Fuente: Communications Industry Forecast and Report)



Año	Horas, H
2003	1615
2004	1620
2005	1659
2006	1673
2007	1686
2008	1704
2009	1714
2010	1728
2011	1742

- Use una calculadora de gráficas para crear una gráfica de dispersión de los datos. Con t represente el año, con $t = 3$ correspondiente a 2003.
- Use el comando *regression* de la calculadora de gráficas para hallar la ecuación de la recta de regresión de mínimos cuadrados que se ajuste a los datos. A continuación, grafique el modelo y la gráfica de dispersión que encontró en el inciso (a) en la misma pantalla. ¿Qué tan cercanamente el modelo representa a los datos?
- Use el modelo para calcular el número proyectado de horas de uso de televisión en 2020.

- Interprete el significado de la pendiente del modelo lineal en el contexto del problema.

153. MEDICIÓN Usted observa un señalamiento que indica que faltan 2.5 millas o 4 kilómetros para llegar al siguiente restaurante de una cadena nacional de comida rápida. Use esta información para hallar un modelo matemático que relacione millas y kilómetros. A continuación use el modelo para hallar el número de kilómetros que hay en 2 y 10 millas.

154. ENERGÍA La potencia P producida por una turbina de viento es proporcional al cubo de la rapidez del viento S . Una rapidez del viento de 27 millas por hora produce una potencia de 750 kilowatts. Encuentre la salida para una rapidez de viento de 40 millas por hora.

155. FUERZA DE FRICCIÓN La fuerza de fricción F entre las llantas y el pavimento, necesaria para mantener un auto en una sección curva de una carretera, es directamente proporcional al cuadrado de la rapidez s del auto. Si la rapidez del auto se duplica, ¿en qué factor cambiará la fuerza?

156. DEMANDA Una compañía ha encontrado que la demanda diaria x de sus cajas de chocolates es inversamente proporcional al precio p . Cuando el precio es \$5, la demanda es 800 cajas. Calcule la demanda cuando el precio se aumente a \$6.

157. TIEMPO DE VIAJE El tiempo de viaje entre dos ciudades es inversamente proporcional a la velocidad media o promedio. Un tren corre entre las ciudades en 3 horas a un promedio de velocidad de 65 millas por hora. ¿Cuánto tardará en moverse entre las ciudades a una velocidad media promedio de 80 millas por hora?

158. COSTO El costo de construir una caja de madera con base cuadrada varía conjuntamente con la altura de la caja y el cuadrado del ancho de ésta. Una caja de 16 pulgadas de alto y 6 pulgadas de ancho cuesta \$28.80. ¿Cuánto costaría una caja de 14 pulgadas de alto y 8 pulgadas de ancho?

EXPLORACIÓN

¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 159 y 160, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

159. Respecto a la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$, la función dada por $h(x) = -\sqrt{x+9} - 13$ se desplaza 9 unidades a la izquierda y 13 hacia abajo, y luego se refleja en el eje x .

160. Si f y g son dos funciones inversas, entonces el dominio de g es igual al rango de f .

161. ESCRITURA Explique la diferencia entre la prueba de la recta vertical y la prueba de la recta horizontal.

162. ESCRITURA Explique cómo decir si una relación entre dos variables es una función.

1 EXAMEN DEL CAPÍTULO

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

Tome este examen como si lo hiciera en clase. Cuando termine, verifique su trabajo contra las respuestas dadas al final del libro.

1. Grafique los puntos $(-2, 5)$ y $(6, 0)$. Encuentre las coordenadas del punto medio del segmento de recta que enlaza los puntos y la distancia entre los puntos.
2. Una lata cilíndrica tiene un volumen de 600 centímetros cúbicos y un radio de 4 centímetros. Encuentre la altura de la lata.

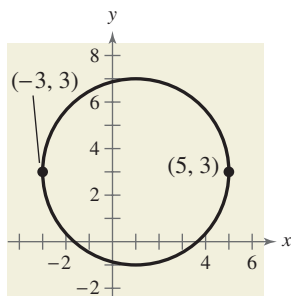


FIGURA PARA 6

En los Ejercicios 3-5, use intersecciones con los ejes y simetría para trazar la gráfica de la ecuación.

3. $y = 3 - 5x$ 4. $y = 4 - |x|$ 5. $y = x^2 - 1$

6. Escriba en forma estándar la ecuación de la circunferencia mostrada a la izquierda.

En los Ejercicios 7 y 8, encuentre la forma pendiente-intersección de la ecuación de la recta que pasa por los puntos.

7. $(2, -3), (-4, 9)$ 8. $(3, 0.8), (7, -6)$

9. Encuentre las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto $(0, 4)$ y son (a) paralelas y (b) perpendiculares a la recta $5x + 2y = 3$.

10. Evalúe $f(x) = \frac{\sqrt{x+9}}{x^2-81}$ en cada valor: (a) $f(7)$ (b) $f(-5)$ (c) $f(x-9)$.

11. Encuentre el dominio de $f(x) = 10 - \sqrt{3-x}$.

En los Ejercicios 12-14, (a) encuentre los ceros de la función, (b) use una calculadora de gráficas para graficar la función, (c) calcule los intervalos en los que la función es creciente, decreciente o constante y (d) determine si la función es par, impar o ninguna de éstas.

12. $f(x) = 2x^6 + 5x^4 - x^2$ 13. $f(x) = 4x\sqrt{3-x}$ 14. $f(x) = |x+5|$

15. Trace la gráfica de $f(x) = \begin{cases} 3x+7, & x \leq -3 \\ 4x^2-1, & x > -3 \end{cases}$.

En los Ejercicios 16-18, identifique la función principal en la transformación. A continuación, trace una gráfica de la función.

16. $h(x) = -\llbracket x \rrbracket$ 17. $h(x) = -\sqrt{x+5} + 8$ 18. $h(x) = -2(x-5)^3 + 3$

En los Ejercicios 19 y 20, encuentre (a) $(f+g)(x)$, (b) $(f-g)(x)$, (c) $(fg)(x)$, (d) $(f/g)(x)$, (e) $(f \circ g)(x)$ y (f) $(g \circ f)(x)$.

19. $f(x) = 3x^2 - 7$, $g(x) = -x^2 - 4x + 5$ 20. $f(x) = 1/x$, $g(x) = 2\sqrt{x}$

En los Ejercicios 21-23, determine si la función tiene inversa y, si es así, encuéntrala.

21. $f(x) = x^3 + 8$ 22. $f(x) = |x^2 - 3| + 6$ 23. $f(x) = 3x\sqrt{x}$

En los Ejercicios 24-26, encuentre un modelo matemático que represente el enunciado. (En cada caso, determine la constante de proporcionalidad.)

24. v varía directamente con la raíz cuadrada de s . ($v = 24$ cuando $s = 16$.)
25. A varía conjuntamente con x y y . ($A = 500$ cuando $x = 15$ y $y = 8$.)
26. b varía inversamente con a . ($b = 32$ cuando $a = 1.5$.)

DEMOSTRACIONES EN MATEMÁTICAS

Para usted, ¿qué significa la palabra *demonstración*? En matemáticas, la palabra *demonstración* se usa para indicar simplemente un argumento válido. Cuando alguien demuestra una proposición o un teorema, debe usar en un orden lógico datos, definiciones y propiedades aceptadas. Con este fin, también se pueden usar teoremas previamente demostrados. Por ejemplo, la fórmula de la distancia se usa en la comprobación de la fórmula del punto medio que sigue. Hay varios métodos de demostración, que veremos en siguientes capítulos.

La fórmula del punto medio (p. 5)

El punto medio del segmento de recta que enlaza los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) está dado por la fórmula del punto medio.

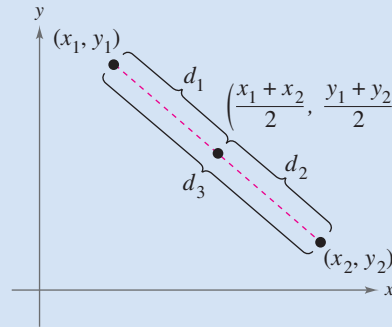
$$\text{Punto medio} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right).$$

El plano cartesiano

El plano cartesiano recibe ese nombre en honor al matemático francés René Descartes (1596-1650). Cuando Descartes se encontraba en cama, observó que una mosca volaba por las tejas cuadradas del techo. Descubrió que la posición de la mosca podría describirse según la teja en la que se posara. Esto llevó al desarrollo del plano cartesiano. Descartes pensó que un plano de coordenadas podría usarse para facilitar la descripción de las posiciones de objetos.

Demostración

Usando la figura, se debe demostrar que $d_1 = d_2$ y $d_1 + d_2 = d_3$.



Por la fórmula de la distancia, se obtiene

$$\begin{aligned} d_1 &= \sqrt{\left(\frac{x_1 + x_2}{2} - x_1\right)^2 + \left(\frac{y_1 + y_2}{2} - y_1\right)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_2 &= \sqrt{\left(x_2 - \frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 + \left(y_2 - \frac{y_1 + y_2}{2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \end{aligned}$$

$$d_3 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Por tanto, se deduce que $d_1 = d_2$ y $d_1 + d_2 = d_3$.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Este conjunto de ejercicios, difíciles y que invitan a meditar, amplía y explora más a fondo los conceptos aprendidos en este capítulo.

- Como vendedor, usted recibe un salario mensual de \$2000, más una comisión de 7% sobre ventas. Le ofrecen un nuevo trabajo con \$2300 por mes más una comisión de 5% sobre ventas.

- Escriba una ecuación lineal para su actual sueldo mensual W_1 en términos de sus ventas mensuales S .
- Escriba una ecuación lineal para el sueldo mensual W_2 de su nueva oferta de trabajo en términos de las ventas mensuales S .



- Use una calculadora de gráficas para graficar ambas ecuaciones en la misma pantalla. Encuentre el punto de intersección. ¿Qué significa?
 - Usted piensa que puede vender \$20 000 al mes. ¿Debe cambiar de trabajo? Explique.
- Para los números 2 a 9 de un teclado de teléfono (vea figura), genere dos relaciones: una que relacione números con letras y la otra que relacione letras con números. ¿Ambas relaciones son funciones? Explique.



- ¿Qué se puede decir acerca de la suma y diferencia de cada uno de lo siguiente?
 - Dos funciones pares.
 - Dos funciones impares.
 - Una función impar y una función par.

- Las dos funciones dadas por

$$f(x) = x \quad y \quad g(x) = -x$$

son sus propias funciones inversas. Grafique cada una de las funciones y explique por qué esto es verdadero. Grafique otras funciones lineales que sean sus propias funciones inversas. Encuentre una fórmula general para una familia de funciones lineales que sean sus propias funciones inversas.

- Demuestre que una función de la siguiente forma es par.

$$y = a_{2n}x^{2n} + a_{2n-2}x^{2n-2} + \dots + a_2x^2 + a_0$$

- Un profesional de golf en miniatura está tratando de hacer un tiro en uno en el "green" en miniatura que se muestra. Un plano de coordenadas se coloca sobre el green de golf. La pelota está en el punto $(2.5, 2)$ y el hoyo está en el punto $(9.5, 2)$. El jugador desea dar un tiro para que la pelota toque la pared lateral del green en el punto (x, y) . Encuentre las coordenadas del punto (x, y) . A continuación, escriba una ecuación para hallar la trayectoria de la pelota.

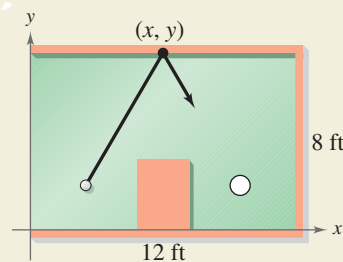


FIGURA PARA 6

- A las 2:00 P.M. del 11 de abril de 1912, el *Titanic* zarpó de Cobh, Irlanda, en su viaje a la ciudad de Nueva York. A las 11:40 P.M. del 14 de abril, el *Titanic* chocó con un témpano de hielo y se hundió, habiendo cubierto sólo 2100 millas del viaje de aproximadamente 3400 millas.

- ¿Cuál fue la duración total del viaje en horas?
- ¿Cuál fue la velocidad media promedio en millas por hora?
- Escriba una función que relacione la distancia del *Titanic* desde la ciudad de Nueva York y el número de horas del viaje. Encuentre el dominio y rango de la función.

- Grafique la función del inciso (c).

- Considere la función dada por $f(x) = -x^2 + 4x - 3$. Encuentre la razón de cambio promedio de la función de x_1 a x_2 .

- $x_1 = 1, x_2 = 2$
- $x_1 = 1, x_2 = 1.5$
- $x_1 = 1, x_2 = 1.25$
- $x_1 = 1, x_2 = 1.125$
- $x_1 = 1, x_2 = 1.0625$

- ¿Le parece que la razón de cambio promedio se está aproximando a un valor? Si es así, ¿qué valor?

- Encuentre las ecuaciones de las rectas secantes que pasan por los puntos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$ para los incisos (a)–(e).

- Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1, f(1))$ usando su respuesta al inciso (f) como la pendiente de la recta.

- Considere las funciones dadas por $f(x) = 4x$ y $g(x) = x + 6$.

- Encuentre $(f \circ g)(x)$.
- Encuentre $(f \circ g)^{-1}(x)$.
- Encuentre $f^{-1}(x)$ y $g^{-1}(x)$.

- Encuentre $(g^{-1} \circ f^{-1})(x)$ y compare el resultado con el del inciso (b).

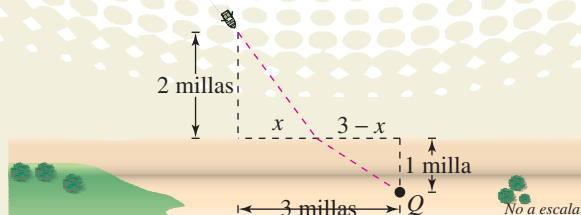
- Repita los incisos del (a) al (d) para $f(x) = x^3 + 1$ y $g(x) = 2x$.

- Escriba dos funciones biunívocas f y g , y repita los incisos del (a) al (d) para estas funciones.

- Haga una conjetura acerca de $(f \circ g)^{-1}(x)$ y $(g^{-1} \circ f^{-1})(x)$.



10. Usted se encuentra en un bote a 2 millas del punto más cercano en la costa. Está viajando a un punto Q , a 3 millas por la costa y 1 milla tierra adentro (vea figura). Puede remar a 2 millas por hora y puede caminar a 4 millas por hora.



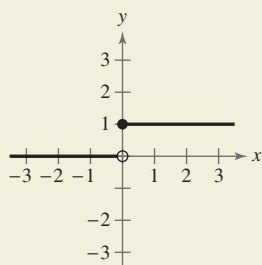
- Escriba el tiempo total T del viaje como función de x .
- Determine el dominio de la función.
- Use una calculadora de gráficas para graficar la función. Asegúrese de escoger una pantalla apropiada.
- Use las funciones *zoom* y *trace* para hallar el valor de x que reduzca T al mínimo.
- Escriba un breve párrafo que interprete estos valores.

11. La **función de Heaviside** $H(x)$ se usa ampliamente en aplicaciones de ingeniería. (Vea figura.) Para imprimir una copia ampliada de la gráfica, visite el sitio web www.mathgraphs.com.

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Trace manualmente la gráfica de cada una de las funciones.

- $H(x) - 2$
- $H(x - 2)$
- $-H(x)$
- $H(-x)$
- $\frac{1}{2}H(x)$
- $-H(x - 2) + 2$



12. Sea $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

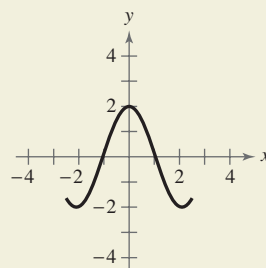
- ¿Cuáles son el dominio y rango de f ?
- Encuentre $f(f(x))$. ¿Cuál es el dominio de esta función?
- Encuentre $f(f(f(x)))$. ¿La gráfica es una recta? ¿Por qué sí o por qué no?

13. Demuestre que se cumple la propiedad asociativa para composiciones de funciones, es decir,

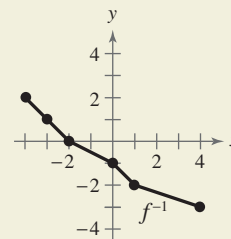
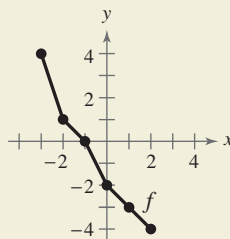
$$(f \circ (g \circ h))(x) = ((f \circ g) \circ h)(x).$$

14. Considere la gráfica de la función f que se muestra en la figura y úsela para trazar la gráfica de cada función. Para imprimir una copia ampliada de la gráfica, visite el sitio web www.mathgraphs.com.

- $f(x + 1)$
- $f(x) + 1$
- $2f(x)$
- $f(-x)$
- $-f(x)$
- $|f(x)|$
- $f(|x|)$



15. Use las gráficas de f y f^{-1} para completar cada una de las tablas de valores de función.



x	-4	-2	0	4
$(f(f^{-1}(x)))$				

x	-3	-2	0	1
$(f + f^{-1})(x)$				

x	-3	-2	0	1
$(f \cdot f^{-1})(x)$				

x	-4	-3	0	4
$ f^{-1}(x) $				

Funciones polinomiales y racionales

2

- 2.1 Funciones y modelos cuadráticos
- 2.2 Funciones polinomiales de grado superior
- 2.3 Polinomios y división sintética
- 2.4 Números complejos
- 2.5 Ceros de funciones polinomiales
- 2.6 Funciones racionales
- 2.7 Desigualdades no lineales

En matemáticas

Las funciones definidas por expresiones con polinomios reciben el nombre de funciones polinomiales, y las funciones definidas por expresiones racionales se llaman funciones racionales.

En la vida real

Las funciones polinomiales y las racionales se usan con frecuencia para modelar fenómenos de la vida real. Por ejemplo, con una función polinomial se puede modelar el consumo de cigarrillos per cápita en Estados Unidos. Se puede usar el modelo para determinar si las advertencias contra los cigarrillos afectó el consumo. (Vea Ejercicio 85, página 134.)

Michael Newman/PhotoEdit



EN CARRERAS

Hay numerosas carreras que usan funciones polinomiales y racionales. A continuación se mencionan algunas.

- Arquitecto
Ejercicio 82, página 134
- Silvicultor
Ejercicio 103, página 148
- Químico
Ejemplo 80, página 192
- Ingeniero en seguridad
Ejercicio 78, página 203

2.1 FUNCIONES Y MODELOS CUADRÁTICOS

Lo que debe aprender

- Analizar gráficas de funciones cuadráticas.
- Escribir funciones cuadráticas en forma estándar y usar los resultados para trazar gráficas de funciones.
- Hallar los valores mínimo y máximo de funciones cuadráticas en aplicaciones de la vida real.

Por qué debe aprenderlo

Se pueden usar funciones cuadráticas para modelar datos para analizar el comportamiento de los consumidores. Por ejemplo, en el Ejercicio 79 de la página 134 usaremos una función cuadrática para modelar el ingreso ganado por manufacturar juegos de video portátiles.



© John Henley/Corbis

Gráfica de una función cuadrática

En esta sección y en la siguiente estudiaremos las gráficas de funciones polinomiales. En la Sección 1.6 se explicaron las siguientes funciones básicas.

$$\begin{aligned} f(x) &= ax + b && \text{Función lineal} \\ f(x) &= c && \text{Función constante} \\ f(x) &= x^2 && \text{Función cuadrática} \end{aligned}$$

Estas funciones son ejemplos de **funciones polinomiales**.

Definición de funciones polinomiales

Sea n un entero no negativo y sean $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$ números reales con $a_n \neq 0$. La función dada por

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

se denomina **función polinomial de x con grado n** .

Las funciones polinomiales se clasifican por grado. Por ejemplo, una función constante $f(x) = c$, con $c \neq 0$, tiene grado 0, y una función lineal $f(x) = ax + b$, con $a \neq 0$, tiene grado 1. En esta sección estudiaremos funciones polinomiales de segundo grado, las cuales se denominan **funciones cuadráticas**.

Por ejemplo, cada una de las funciones siguientes es una función cuadrática.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 6x + 2 \\ g(x) &= 2(x + 1)^2 - 3 \\ h(x) &= 9 + \frac{1}{4}x^2 \\ k(x) &= -3x^2 + 4 \\ m(x) &= (x - 2)(x + 1) \end{aligned}$$

Observe que la función cuadrática es una simple función que tiene grado 2.

Definición de función cuadrática

Sean a, b y c números reales, con $a \neq 0$. La función dada por

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{Función cuadrática}$$

se denomina **función cuadrática**.

La gráfica de una función cuadrática es un tipo especial de curva en forma de U llamada **parábola**. Las parábolas se presentan en numerosas aplicaciones de la vida real, en especial las que comprenden propiedades reflexivas de discos satelitales y reflectores de linternas. Estudiaremos estas propiedades en la Sección 10.2.

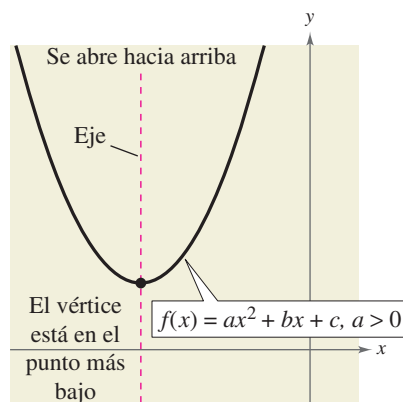
Todas las parábolas son simétricas respecto a una recta llamada **eje de simetría**, o simplemente **eje** de la parábola. El punto donde el eje interseca la parábola es el **vértice** de ésta, como se muestra en la Figura 2.1. Si el coeficiente principal es positivo, la gráfica de

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

es una parábola que se abre hacia arriba. Si el coeficiente principal es negativo, la gráfica de

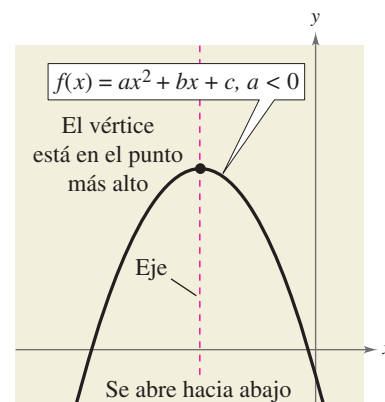
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

es una parábola que se abre hacia abajo.



El coeficiente principal es positivo.

FIGURA 2.1

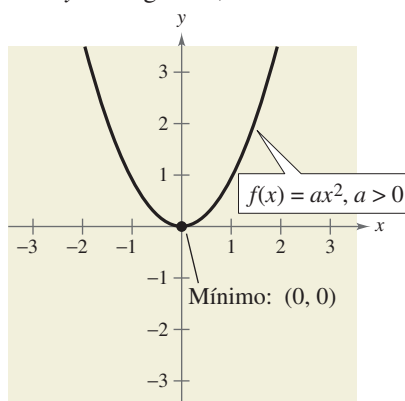


El coeficiente principal es negativo.

El tipo más sencillo de función cuadrática es

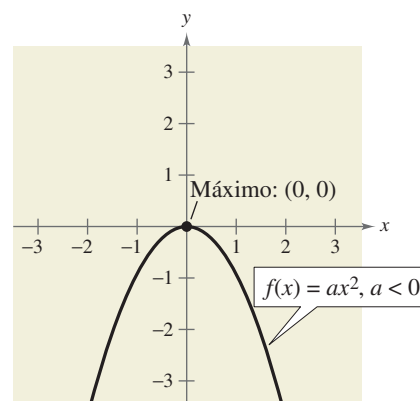
$$f(x) = ax^2.$$

Su gráfica es una parábola cuyo vértice está en $(0, 0)$. Si $a > 0$, el vértice es el punto con el valor *mínimo* de y en la gráfica, y si $a < 0$ el vértice es el punto con el valor *máximo* de y en la gráfica, como se ve en la Figura 2.2.



El coeficiente principal es positivo.

FIGURA 2.2



El coeficiente principal es negativo.

Cuando se trace la gráfica de $f(x) = ax^2$, es útil usar la gráfica de $y = x^2$ como referencia, como se explica en la Sección 1.7.

Ejemplo 1 Trazar gráficas de funciones cuadráticas

- a. Compare las gráficas de $y = x^2$ y $f(x) = \frac{1}{3}x^2$.
 b. Compare las gráficas de $y = x^2$ y $g(x) = 2x^2$.

Solución

- a. En comparación con $y = x^2$, cada salida de $f(x) = \frac{1}{3}x^2$ “se contrae” en un factor de $\frac{1}{3}$, creando la parábola más ancha que se ve en la Figura 2.3.
 b. En comparación con $y = x^2$, cada salida de $g(x) = 2x^2$ “se estira” en un factor de 2, creando la parábola más angosta que se ve en la Figura 2.4.

Ayuda de álgebra

En la Sección 1.7 puede repasar las técnicas para desplazar, reflejar y estirar gráficas.

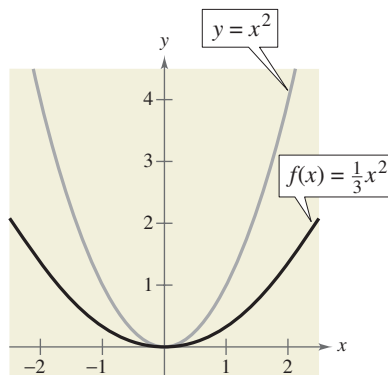


FIGURA 2.3

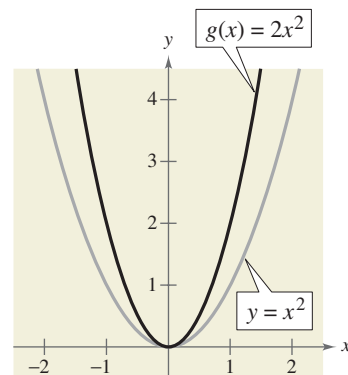
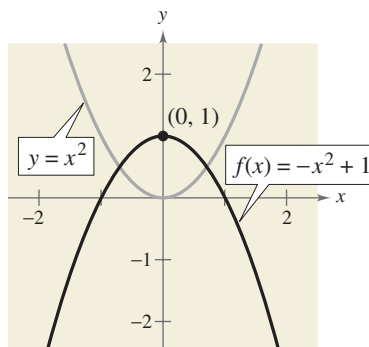


FIGURA 2.4

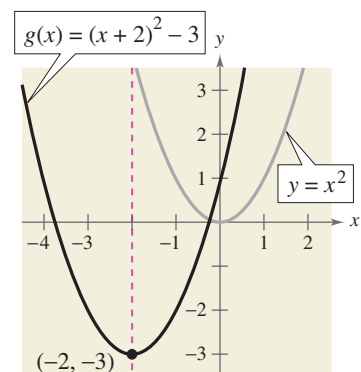
PUNTO de repaso Ahora trate de hacer el Ejercicio 13.

En el Ejemplo 1, observe que el coeficiente a determina cuánto se abre la parábola dada por $f(x) = ax^2$. Si $|a|$ es pequeño, la parábola se abre más ancha que si $|a|$ es grande.

Recuerde de la Sección 1.7 que las gráficas de $y = f(x \pm c)$, $y = f(x) \pm c$, $y = f(-x)$ y $y = -f(x)$ son transformaciones rígidas de la gráfica de $y = f(x)$. Por ejemplo, en la Figura 2.5, observe la forma en que la gráfica de $y = x^2$ se puede transformar para producir las gráficas de $f(x) = -x^2 + 1$ y $g(x) = (x + 2)^2 - 3$.



Reflexión en el eje x seguida por un desplazamiento de una unidad hacia arriba
 FIGURA 2.5



Desplazamiento de dos unidades a la izquierda seguida por un desplazamiento de tres unidades hacia abajo

Hallar valores mínimo y máximo

Muchas aplicaciones suponen hallar el valor máximo o mínimo de una función cuadrática. Al completar el cuadrado de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ se puede reescribir la función en forma normal (vea Ejercicio 95).

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right) \quad \text{Forma estándar}$$

Por tanto, el vértice de la gráfica de f es $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$, lo cual implica lo siguiente.

Valores mínimo y máximo de funciones cuadráticas

Considere la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ con vértice $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$.

1. Si $a > 0$, f tiene un *mínimo* en $x = -\frac{b}{2a}$. El valor mínimo es $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.
2. Si $a < 0$, f tiene un *máximo* en $x = -\frac{b}{2a}$. El valor máximo es $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.

Ejemplo 5 Altura máxima de una pelota de béisbol

Una pelota de béisbol es golpeada en un punto a 3 pies arriba del suelo con una rapidez de 100 pies por segundo y con un ángulo de 45° respecto al suelo. La trayectoria de la pelota está dada por la función $f(x) = -0.0032x^2 + x + 3$, donde $f(x)$ es la altura de la pelota (en pies) y x es la distancia horizontal desde el plato del *home* (en pies). ¿Cuál es la máxima altura alcanzada por la pelota?

Solución algebraica

Para esta función cuadrática tenemos

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= -0.0032x^2 + x + 3 \end{aligned}$$

lo cual implica que $a = -0.0032$ y $b = 1$. Como $a < 0$, la función tiene un máximo cuando $x = -b/(2a)$. Por tanto, podemos concluir que la pelota alcanza su máxima altura cuando está a x pies del *home*, donde x es

$$\begin{aligned} x &= -\frac{b}{2a} \\ &= -\frac{1}{2(-0.0032)} \\ &= 156.25 \text{ pies.} \end{aligned}$$

A esta distancia, la altura máxima es

$$\begin{aligned} f(156.25) &= -0.0032(156.25)^2 + 156.25 + 3 \\ &= 81.125 \text{ pies.} \end{aligned}$$

PUNTO de repaso ➔ Ahora trate de hacer el Ejercicio 75.

Solución gráfica

Use una calculadora de gráficas para trazar

$$y = -0.0032x^2 + x + 3$$

de modo que se puedan ver las características importantes de la parábola. Use el comando *maximum* (vea Figura 2.9) o los comandos *zoom* y *trace* (vea Figura 2.10) de la calculadora para ver que la altura máxima en la gráfica es $y \approx 81.125$ pies a $x \approx 156.25$.

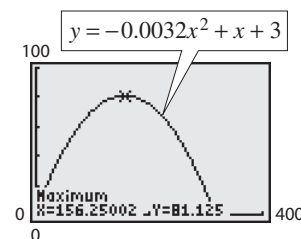


FIGURA 2.9

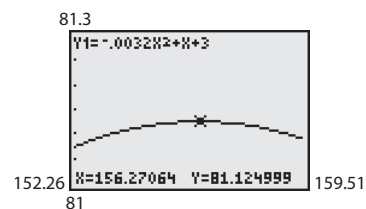


FIGURA 2.10

2.1 EJERCICIOS

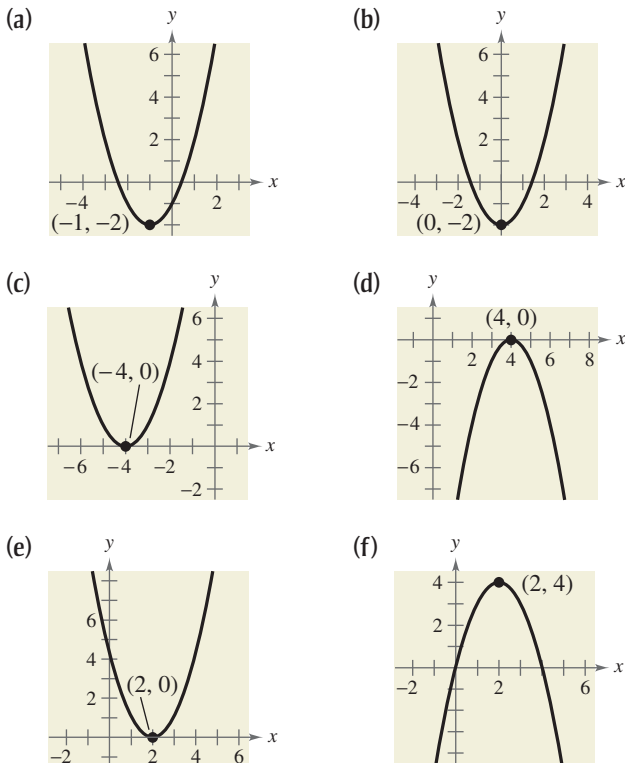
En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

VOCABULARIO: Llene los espacios en blanco.

- Las funciones lineal, constante y cuadrática son ejemplos de funciones _____.
- Una función polinomial de grado n y coeficiente principal a_n es una función de la forma $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ ($a_n \neq 0$), donde n es un _____ y $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ son números _____.
- Una función _____ es una función polinomial de segundo grado, y su gráfica se llama _____.
- La gráfica de una función cuadrática es simétrica alrededor de su _____.
- Si la gráfica de una función cuadrática abre hacia arriba, entonces su coeficiente principal es _____ y el vértice de la gráfica es _____.
- Si la gráfica de una función cuadrática abre hacia abajo, entonces su coeficiente principal es _____ y el vértice de la gráfica es un _____.

HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 7-12, relacione la función cuadrática con su gráfica. [Las gráficas están marcadas (a), (b), (c), (d), (e) y (f).]



- | | |
|----------------------------|----------------------------|
| 7. $f(x) = (x - 2)^2$ | 8. $f(x) = (x + 4)^2$ |
| 9. $f(x) = x^2 - 2$ | 10. $f(x) = (x + 1)^2 - 2$ |
| 11. $f(x) = 4 - (x - 2)^2$ | 12. $f(x) = -(x - 4)^2$ |

En los Ejercicios 13-16, grafique cada función. Compare la gráfica de cada función con la de $y = x^2$.

- | | |
|---------------------------------|------------------------------|
| 13. (a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ | (b) $g(x) = -\frac{1}{8}x^2$ |
| (c) $h(x) = \frac{3}{2}x^2$ | (d) $k(x) = -3x^2$ |

- | | |
|--|-------------------------|
| 14. (a) $f(x) = x^2 + 1$ | (b) $g(x) = x^2 - 1$ |
| (c) $h(x) = x^2 + 3$ | (d) $k(x) = x^2 - 3$ |
| 15. (a) $f(x) = (x - 1)^2$ | (b) $g(x) = (3x)^2 + 1$ |
| (c) $h(x) = (\frac{1}{3}x)^2 - 3$ | (d) $k(x) = (x + 3)^2$ |
| 16. (a) $f(x) = -\frac{1}{2}(x - 2)^2 + 1$ | |
| (b) $g(x) = [\frac{1}{2}(x - 1)]^2 - 3$ | |
| (c) $h(x) = -\frac{1}{2}(x + 2)^2 - 1$ | |
| (d) $k(x) = [2(x + 1)]^2 + 4$ | |

En los Ejercicios 17-34, trace la gráfica de la función cuadrática sin usar una calculadora de gráficas. Identifique el vértice, el eje de simetría y la(s) intersección(es) con el eje x .

- | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|
| 17. $f(x) = 1 - x^2$ | 18. $g(x) = x^2 - 8$ |
| 19. $f(x) = x^2 + 7$ | 20. $h(x) = 12 - x^2$ |
| 21. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4$ | 22. $f(x) = 16 - \frac{1}{4}x^2$ |
| 23. $f(x) = (x + 4)^2 - 3$ | 24. $f(x) = (x - 6)^2 + 8$ |
| 25. $h(x) = x^2 - 8x + 16$ | 26. $g(x) = x^2 + 2x + 1$ |
| 27. $f(x) = x^2 - x + \frac{5}{4}$ | 28. $f(x) = x^2 + 3x + \frac{1}{4}$ |
| 29. $f(x) = -x^2 + 2x + 5$ | 30. $f(x) = -x^2 - 4x + 1$ |
| 31. $h(x) = 4x^2 - 4x + 21$ | 32. $f(x) = 2x^2 - x + 1$ |
| 33. $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x - 12$ | 34. $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 3x - 6$ |

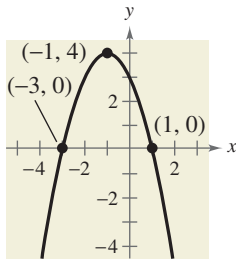


En los Ejercicios 35-42, use una calculadora de gráficas para graficar la función cuadrática. Identifique el vértice, el eje de simetría y las intersecciones con el eje x . A continuación compruebe sus resultados algebraicamente escribiendo la función cuadrática en forma estándar.

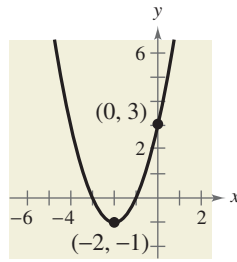
- | | |
|--|--|
| 35. $f(x) = -(x^2 + 2x - 3)$ | 36. $f(x) = -(x^2 + x - 30)$ |
| 37. $g(x) = x^2 + 8x + 11$ | 38. $f(x) = x^2 + 10x + 14$ |
| 39. $f(x) = 2x^2 - 16x + 31$ | |
| 40. $f(x) = -4x^2 + 24x - 41$ | |
| 41. $g(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 4x - 2)$ | 42. $f(x) = \frac{3}{5}(x^2 + 6x - 5)$ |

En los Ejercicios 43-46, escriba una ecuación en forma estándar para la parábola.

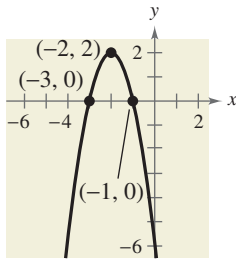
43.



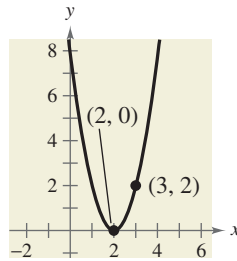
44.



45.



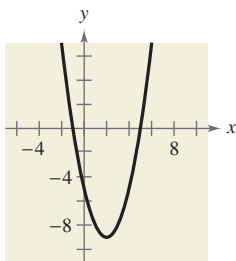
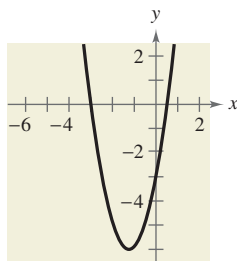
46.



En los Ejercicios 47-56, escriba la forma estándar de la ecuación de la parábola que tiene el vértice indicado y cuya gráfica pasa por el punto dado.

47. Vértice: $(-2, 5)$; punto: $(0, 9)$ 48. Vértice: $(4, -1)$; punto: $(2, 3)$ 49. Vértice: $(1, -2)$; punto: $(-1, 14)$ 50. Vértice: $(2, 3)$; punto: $(0, 2)$ 51. Vértice: $(5, 12)$; punto: $(7, 15)$ 52. Vértice: $(-2, -2)$; punto: $(-1, 0)$ 53. Vértice: $(-\frac{1}{4}, \frac{3}{2})$; punto: $(-2, 0)$ 54. Vértice: $(\frac{5}{2}, -\frac{3}{4})$; punto: $(-2, 4)$ 55. Vértice: $(-\frac{5}{2}, 0)$; punto: $(-\frac{7}{2}, -\frac{16}{3})$ 56. Vértice: $(6, 6)$; punto: $(\frac{61}{10}, \frac{3}{2})$

RAZONAMIENTO GRÁFICO En los Ejercicios 57 y 58, determine visualmente la(s) intersección(es) de la gráfica con el eje x . A continuación encuentre algebraicamente tal(es) intersección(es) para confirmar sus resultados.

57. $y = x^2 - 4x - 5$ 58. $y = 2x^2 + 5x - 3$ 

En los Ejercicios 59-64, use una calculadora de gráficas para graficar la función cuadrática. Encuentre las intersecciones con el eje x de la gráfica y compárelas con las soluciones de la ecuación cuadrática correspondiente cuando $f(x) = 0$.

59. $f(x) = x^2 - 4x$ 60. $f(x) = -2x^2 + 10x$ 61. $f(x) = x^2 - 9x + 18$ 62. $f(x) = x^2 - 8x - 20$ 63. $f(x) = 2x^2 - 7x - 30$ 64. $f(x) = \frac{7}{10}(x^2 + 12x - 45)$

En los Ejercicios 65-70, encuentre dos funciones cuadráticas, una que abra hacia arriba y otra hacia abajo, cuyas gráficas tengan las intersecciones con el eje x dadas. (Hay numerosas respuestas correctas.)

65. $(-1, 0), (3, 0)$ 66. $(-5, 0), (5, 0)$ 67. $(0, 0), (10, 0)$ 68. $(4, 0), (8, 0)$ 69. $(-3, 0), (-\frac{1}{2}, 0)$ 70. $(-\frac{5}{2}, 0), (2, 0)$

En los Ejercicios 71-74, encuentre dos números reales positivos cuyo producto sea un máximo.

71. La suma es 110.

72. La suma es S .

73. La suma del primero y el doble del segundo es 24.

74. La suma del primero y tres veces el segundo es 42.

75. TRAYECTORIA DE UN CLAVADISTA La trayectoria de un clavadista está dada por

$$y = -\frac{4}{9}x^2 + \frac{24}{9}x + 12$$

donde y es la altura (en pies) y x es la distancia horizontal desde el extremo del trampolín (en pies). ¿Cuál es la máxima altura del clavadista?

76. ALTURA DE UNA PELOTA La altura y (en pies) de un balón pateado está dada por

$$y = -\frac{16}{2025}x^2 + \frac{9}{5}x + 1.5$$

donde x es la distancia horizontal (en pies) desde el punto en el que el balón es pateado.

(a) ¿A qué altura está el balón cuando es pateado?

(b) ¿Cuál es la máxima altura de la patada?

(c) ¿Qué tan larga es la patada?

77. COSTO MÍNIMO Un fabricante de accesorios para iluminación tiene costos diarios de producción expresados por $C = 800 - 10x + 0.25x^2$, donde C es el costo total (en dólares) y x es el número de unidades producidas. ¿Cuántos accesorios deben ser producidos cada día para dar un costo mínimo?

78. UTILIDAD MÁXIMA La utilidad P (en cientos de dólares) que gana una compañía depende de la cantidad x (en cientos de dólares) que gasta en publicidad, de acuerdo con el modelo $P = 230 + 20x - 0.5x^2$. ¿Qué gasto en publicidad dará máxima utilidad?

79. INGRESO MÁXIMO El ingreso total R ganado (en miles de dólares) por manufacturar juegos de vídeo portátiles está dado por

$$R(p) = -25p^2 + 1200p$$

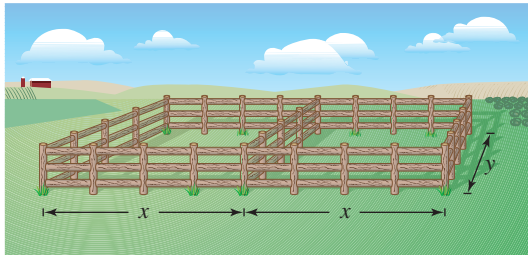
donde p es el precio por unidad (en dólares).

- Encuentre el ingreso cuando el precio por unidad es \$20, \$25 y \$30.
- Encuentre el precio unitario que dará un ingreso máximo. ¿Cuál es el ingreso máximo? Explique sus resultados.

80. INGRESO MÁXIMO El ingreso total R ganado por día (en dólares) por un servicio de cuidar mascotas está dado por $R(p) = -12p^2 + 150p$, donde p es el precio cobrado por mascota (en dólares).

- Encuentre el ingreso cuando el precio por mascota sea \$4, \$6 y \$8.
- Encuentre el precio que dará el ingreso máximo. ¿Cuál es el ingreso máximo? Explique sus resultados.

81. ANÁLISIS NUMÉRICO, GRÁFICO Y ANALÍTICO Un agricultor tiene 200 pies de cerca para encerrar dos corrales rectangulares adyacentes (vea la figura).



- Escriba el área A de los corrales como función de x .
- Genere una tabla que muestre valores posibles de x y las áreas correspondientes del corral. Úsela para calcular las dimensiones que producirán la máxima área encerrada.
- Use una calculadora de gráficas para graficar la función del área. Use la gráfica para calcular las dimensiones que producirán la máxima área encerrada.
- Escriba la función del área en forma estándar para hallar analíticamente las dimensiones que producirán la máxima área.
- Compare sus resultados de los incisos (b), (c) y (d).

82. GEOMETRÍA Un salón interior para acondicionamiento físico está formado por una región rectangular con un semicírculo en cada extremo. El perímetro del salón ha de ser una pista de carreras de 200 metros de un solo carril.

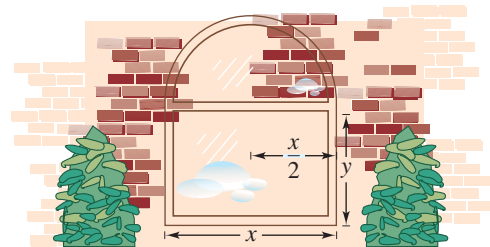
- Trace un diagrama que ilustre el problema. Con x y y represente la longitud y el ancho de la región rectangular, respectivamente.

- Determine el radio de cada extremo semicircular del salón. Determine la distancia, en términos de y , alrededor del borde interior de cada parte semicircular de la pista.
- Use el resultado del inciso (b) para escribir una ecuación, en términos de x y y , para la distancia recorrida en una vuelta alrededor de la pista. Despeje y .
- Use el resultado del inciso (c) para escribir el área A de la región rectangular como función de x . ¿Qué dimensiones producirán un rectángulo de máxima área?

83. INGRESO MÁXIMO Un pequeño teatro tiene una capacidad de 2000 asientos. Cuando el precio del billete es \$20, la asistencia es de 1500. Por cada reducción de \$1 en precio, la asistencia aumenta en 100.

- Escriba el ingreso R del teatro como función del precio x del billete.
- ¿Qué precio del billete dará un ingreso máximo? ¿Cuál es el ingreso máximo?

84. ÁREA MÁXIMA Una ventana “normanda” se construye al unir un semicírculo a la parte superior de una ventana rectangular ordinaria (vea figura). El perímetro de la ventana es 16 pies.



- Escriba el área A de la ventana como función de x .
- ¿Qué dimensiones producirán una ventana de máxima área?



85. ANÁLISIS GRÁFICO De 1950 a 2005, el consumo C per cápita de cigarrillos por estadounidenses (18 años de edad o mayores) se puede modelar con la expresión $C = 3565.0 + 60.30t - 1.783t^2$, $0 \leq t \leq 55$, donde t es el año, con $t = 0$ para 1950. (Fuente: *Tobacco Outlook Report*)

- Use una calculadora de gráficas para graficar el modelo.
- Use la gráfica del modelo para calcular el promedio máximo de consumo anual. A partir del año 1966, por ley todos los paquetes de cigarrillos deben llevar una advertencia de riesgos de salud. ¿Piensa usted que la advertencia tuvo algún efecto? Explique.
- En 2005, la población de Estados Unidos (18 años de edad o mayores) era de 296 329 000. De éstos, unos 59 858 458 eran fumadores. ¿Cuál era el promedio anual de consumo de cigarrillos *por fumador* en 2005? ¿Cuál era el promedio diario de consumo de cigarrillos *por fumador*?



- 86. ANÁLISIS DE DATOS: VENTAS** Las ventas y (en miles de millones de dólares) de Harley-Davidson de 2000 a 2007 se ilustran en la tabla siguiente. (Fuente: U.S. Harley-Davidson, Inc.)

Año	Ventas, y
2000	2.91
2001	3.36
2002	4.09
2003	4.62
2004	5.02
2005	5.34
2006	5.80
2007	5.73

- Use una calculadora de gráficas para crear una gráfica de dispersión de los datos. Con x represente el año, con $x = 0$ correspondiente a 2000.
- Use el comando *regression* de la calculadora de gráficas para hallar un modelo cuadrático para los datos.
- Use la calculadora de gráficas para graficar el modelo en la misma pantalla que la gráfica de dispersión. ¿Qué tan bien se ajusta el modelo a los datos?
- Use el comando *trace* de la calculadora de gráficas para calcular el año en el que las ventas de Harley-Davidson fueron máximas.
- Verifique algebraicamente su respuesta al inciso (d).
- Use el modelo para pronosticar las ventas de Harley-Davidson en 2010.

EXPLORACIÓN

¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 87–90, indique si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

- La función dada por $f(x) = -12x^2 - 1$ no tiene intersecciones con el eje x .
- Las gráficas de $f(x) = -4x^2 - 10x + 7$ y $g(x) = 12x^2 + 30x + 1$ tienen el mismo eje de simetría.
- La gráfica de una función cuadrática con coeficiente principal negativo tendrá un valor máximo en su vértice.
- La gráfica de una función cuadrática con coeficiente principal positivo tendrá un valor mínimo en su vértice.

PIÉNSELO En los Ejercicios 91–94, encuentre los valores de b tales que la función tenga el valor máximo o mínimo dado.

- $f(x) = -x^2 + bx - 75$; valor máximo: 25
- $f(x) = -x^2 + bx - 16$; valor máximo: 48

- $f(x) = x^2 + bx + 26$; valor mínimo: 10
- $f(x) = x^2 + bx - 25$; valor mínimo: -50

- 95.** Escriba la función cuadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

en forma estándar para verificar que el vértice se presenta en

$$\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right).$$

- 96. TOQUE FINAL** La utilidad P (en millones de dólares) para un vendedor de vehículos de recreación está modelada por una función cuadrática de la forma

$$P = at^2 + bt + c$$

donde t representa el año. Si usted fuera director general de la compañía, ¿cuál de los modelos siguientes preferiría? Explique su razonamiento.

- a es positiva y $-b/(2a) \leq t$.
- a es positiva y $t \leq -b/(2a)$.
- a es negativa y $-b/(2a) \leq t$.
- a es negativa y $t \leq -b/(2a)$.

97. ANÁLISIS GRÁFICO

- Grafique $y = ax^2$ para $a = -2, -1, -0.5, 0.5, 1$ y 2. ¿En qué forma la gráfica resulta afectada por el cambio de valor de a ?
- Grafique $y = (x - h)^2$ para $h = -4, -2, 2$ y 4. ¿En qué forma la gráfica resulta afectada por el cambio de valor de h ?
- Grafique $y = x^2 + k$ para $k = -4, -2, 2$ y 4. ¿En qué forma la gráfica resulta afectada por el cambio de valor de k ?

- 98.** Describa la sucesión de la transformación de f a g dado que $f(x) = x^2$ y $g(x) = a(x - h)^2 + k$. (Suponga que a , h y k son positivas.)

- 99.** ¿Es posible que una ecuación cuadrática tenga sólo una intersección con el eje x ? Explique.

- 100.** Suponga que la función dada por

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

tiene dos ceros reales. Demuestre que la coordenada x del vértice de la gráfica es el promedio de los ceros de f . (Sugerencia: use la fórmula cuadrática.)

PROYECTO: ALTURA DE UN BALÓN DE BALONCESTO

Para trabajar una aplicación ampliada analizando la altura de un balón de baloncesto después de dejarlo caer, visite el sitio web del texto en academic.cengage.com.

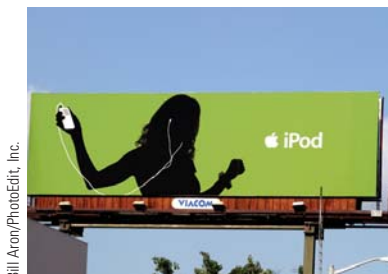
2.2 FUNCIONES POLINOMIALES DE GRADO SUPERIOR

Lo que debe aprender

- Use transformaciones para trazar gráficas de funciones polinomiales.
- Use la prueba del coeficiente principal para determinar el comportamiento final de gráficas de funciones polinomiales.
- Encuentre y use ceros de funciones polinomiales como ayudas para el trazado.
- Use el teorema del valor intermedio para ayudar a localizar ceros de funciones polinomiales

Por qué debe aprenderlo

Usted puede usar funciones polinomiales para analizar situaciones financieras; por ejemplo, la forma en que el ingreso está relacionado con gastos hechos en publicidad, como se estudia en el Ejercicio 104 de la página 148.



Bill Aron/PhotoEdit, Inc.

Gráficas de funciones polinomiales

En esta sección estudiaremos características básicas de las gráficas de las funciones polinomiales. La primera característica es que la gráfica de una función polinomial es **continua**. En esencia, esto significa que la gráfica no tiene interrupciones, huecos o brechas, como se ve en la Figura 2.11(a). La gráfica que se muestra en la Figura 2.11(b) es un ejemplo de una función definida por tramos que no es continua.

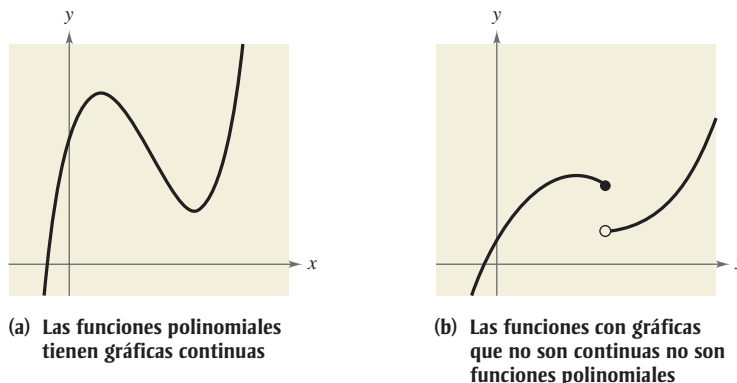


FIGURA 2.11

La segunda característica es que la gráfica de una función polinomial tiene cambios de dirección suaves y redondeados, como se ilustra en la Figura 2.12. Una función polinomial no puede tener un cambio de dirección agudo. Por ejemplo, la función dada por $f(x) = |x|$, que tiene una vuelta aguda en el punto $(0, 0)$, como se ve en la Figura 2.13, no es polinomial.

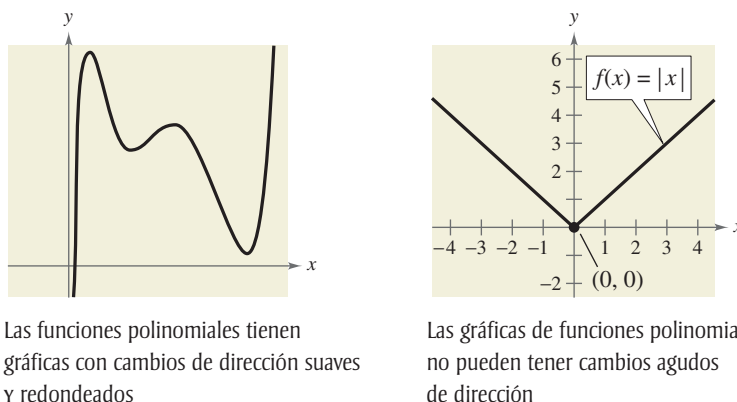


FIGURA 2.12

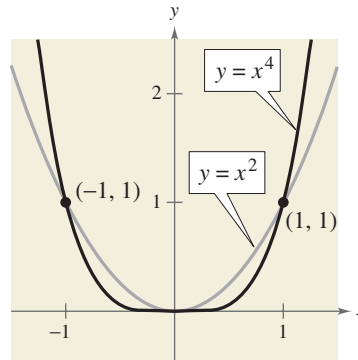
FIGURA 2.13

Las gráficas de funciones polinomiales, de grado superior a 2, son más difíciles de analizar que las gráficas polinomiales de grado 0, 1 o 2. No obstante, usando las características presentadas en esta sección, junto con el conocimiento que el estudiante ya tenga de localizar puntos, intersecciones y simetría, ya debe estar en aptitud de hacer trazos razonablemente precisos *manualmente*.

Tip de estudio

Para funciones potencia dadas por $f(x) = x^n$, si n es par, entonces la gráfica de la función es simétrica respecto al eje y , y si n es impar, entonces la gráfica de la función es simétrica respecto al origen.

Las funciones polinomiales que tienen las gráficas más sencillas son con monomios de la forma $f(x) = x^n$, donde n es un entero mayor a cero. En la Figura 2.14 se puede ver que cuando n es par, la gráfica es similar a la de $f(x) = x^2$, y cuando n es impar, la gráfica es similar a la de $f(x) = x^3$. Además, cuanto mayor sea el valor de n , la gráfica será más plana cerca del origen. A veces las funciones polinomiales de la forma $f(x) = x^n$ se conocen como **funciones potencia**.



(a) Si n es par, la gráfica de $y = x^n$ toca el eje en la intersección con el eje x

(b) Si n es impar, la gráfica de $y = x^n$ corta el eje en la intersección con el eje x

FIGURA 2.14

Ejemplo 1**Trazar transformaciones de funciones polinomiales**

Trace la gráfica de cada función.

- a. $f(x) = -x^5$ b. $h(x) = (x + 1)^4$

Solución

- a. Como el grado de $f(x) = -x^5$ es impar, su gráfica es similar a la de $y = x^3$. En la Figura 2.15, observe que el coeficiente negativo tiene el efecto de reflejar la gráfica en el eje x .
- b. La gráfica de $h(x) = (x + 1)^4$, como se ilustra en la Figura 2.16, es un desplazamiento de una unidad a la izquierda de la gráfica de $y = x^4$.

Ayuda de álgebra

En la Sección 1.7 puede repasar las técnicas para desplazamiento, reflexión y estiramiento.

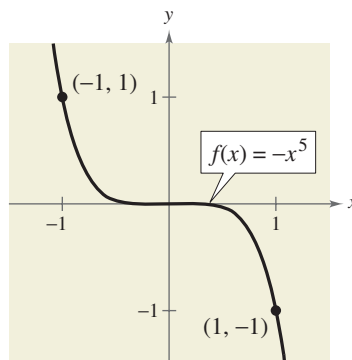


FIGURA 2.15

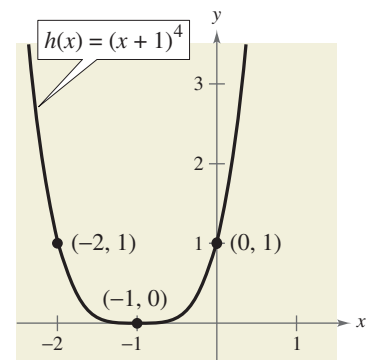


FIGURA 2.16

PUNTO de repaso ➔ Ahora trate de hacer el Ejercicio 17.

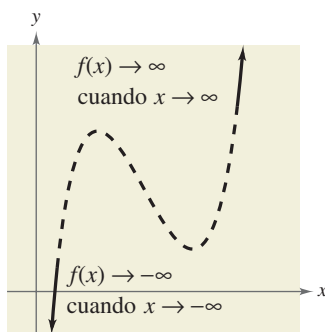
Prueba del coeficiente principal

En el Ejemplo 1, observe que ambas gráficas finalmente suben o bajan sin límite cuando x se mueve a la derecha. Que la gráfica de una función polinomial finalmente suba o baje puede determinarse con el grado de la función (par o impar) y con su coeficiente principal, como lo indica la **prueba del coeficiente principal**.

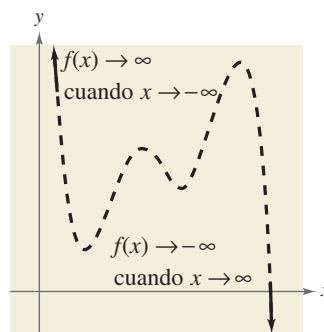
Prueba del coeficiente principal

Cuando x se mueve sin límite a la izquierda o a la derecha, la gráfica de la función polinomial $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ finalmente sube o baja en la forma siguiente.

1. Cuando n es impar:

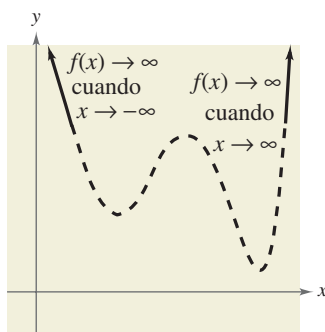


Si el coeficiente principal es positivo ($a_n > 0$), la gráfica baja por la izquierda y sube por la derecha.

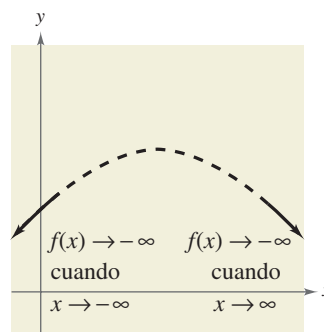


Si el coeficiente principal es negativo ($a_n < 0$), la gráfica sube por la izquierda y baja por la derecha.

2. Cuando n es par:



Si el coeficiente principal es positivo ($a_n > 0$), la gráfica sube por la izquierda y por la derecha.



Si el coeficiente principal es negativo ($a_n < 0$), la gráfica baja por la izquierda y por la derecha.

Las partes interrumpidas de las gráficas indican que la prueba determina *sólo* su comportamiento a la derecha e izquierda.

Tip de estudio

La notación " $f(x) \rightarrow -\infty$ cuando $x \rightarrow -\infty$ " indica que la gráfica baja por la izquierda. La notación " $f(x) \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow \infty$ " indica que la gráfica sube por la derecha.

ATENCIÓN

Una función polinomial se escribe en **forma estándar** si sus términos se escriben en orden descendente de exponentes de izquierda a derecha. Antes de aplicar la prueba del coeficiente principal a una función polinomial, es buena idea asegurarse que esté escrita en forma estándar.

Ejemplo 2 Aplicar la prueba del coeficiente principal

Describa el comportamiento a la derecha e izquierda de la gráfica de cada una de las funciones siguientes.

a. $f(x) = -x^3 + 4x$ b. $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ c. $f(x) = x^5 - x$

Solución

- Como el grado es impar y el coeficiente principal es negativo, la gráfica sube por la izquierda y baja por la derecha, como se ve en la Figura 2.17.
- Como el grado es impar y el coeficiente principal es positivo, la gráfica sube por la izquierda y por la derecha, como se ve en la Figura 2.18.
- Como el grado es impar y el coeficiente principal es positivo, la gráfica baja por la izquierda y sube por la derecha, como se ve en la Figura 2.19.

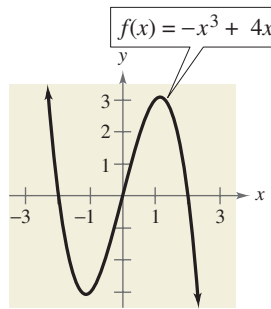


FIGURA 2.17

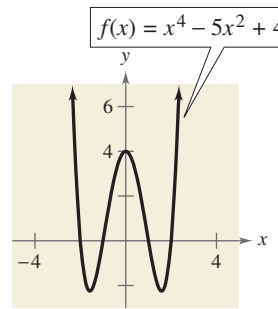


FIGURA 2.18

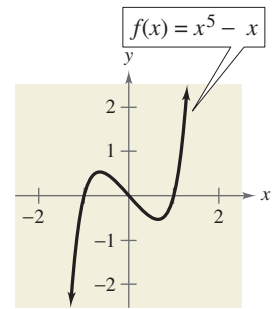


FIGURA 2.19

PUNTO de repaso ➔ Ahora trate de hacer el Ejercicio 23.

En el Ejemplo 2, observe que la prueba del coeficiente principal sólo nos dice si la gráfica *finalmente* sube o baja por la derecha o por la izquierda. Otras características de la gráfica, como son intersecciones y puntos mínimo y máximo, deben ser determinadas por medio de otras pruebas

Ceros de funciones polinomiales

Se puede demostrar que para una función f polinomial de grado n , las siguientes proposiciones son verdaderas.

- La función f tiene, a lo sumo, n ceros reales. (Estudiaremos en detalle este resultado en el análisis del teorema fundamental del álgebra en la Sección 2.5.)
- La gráfica de f tiene, a lo sumo, $n - 1$ puntos extremos. (Los puntos extremos, también llamados mínimos relativos o máximos relativos, son puntos en los que la gráfica cambia de creciente a decreciente o viceversa.)

Hallar los ceros de funciones polinomiales es uno de los más importantes problemas en álgebra. Hay una fuerte interacción entre los métodos gráfico y algebraico para resolverlo. A veces se puede usar información acerca de la gráfica de una función para ayudar a encontrar sus ceros y, en otros casos, se puede usar información acerca de los ceros de una función para ayudar a trazar su gráfica. Hallar los ceros de funciones polinomiales está estrechamente relacionado con factorizar y determinar intersecciones con el eje x .

Tip de estudio

Recuerde que los *ceros* de una función de x son los valores de x para los cuales la función es cero.

Ayuda de álgebra

Para hacer algebraicamente el Ejemplo 3 es necesario que el estudiante pueda factorizar polinomios en su totalidad. En el Apéndice A.3 puede revisar las técnicas para factorizar.

Ceros reales de funciones polinomiales

Si f es una función polinomial y a es un número real, los siguientes enunciados son equivalentes.

1. $x = a$ es un *cero* de la función f .
2. $x = a$ es una *solución* de la ecuación polinomial $f(x) = 0$.
3. $(x - a)$ es un *factor* del polinomio $f(x)$.
4. $(a, 0)$ es una *intersección* de la gráfica de f con el eje x .

Ejemplo 3 Hallar los ceros de una función polinomial

Encuentre todos los ceros reales de

$$f(x) = -2x^4 + 2x^2.$$

A continuación determine el número de puntos extremos de la gráfica de la función.

Solución algebraica

Para hallar los ceros reales de la función, iguale $f(x)$ a 0 y despeje x .

$$-2x^4 + 2x^2 = 0$$

Igualar $f(x)$ a 0.

$$-2x^2(x^2 - 1) = 0$$

Eliminar el factor monomio común.

$$-2x^2(x - 1)(x + 1) = 0$$

Factorizar por completo.

Entonces, los ceros reales son $x = 0$, $x = 1$ y $x = -1$. Como la función es un polinomio de cuarto grado, la gráfica de f puede tener como máximo $4 - 1 = 3$ puntos extremos.

Solución gráfica

Use una calculadora de gráficas para graficar $y = -2x^4 + 2x^2$. En la Figura 2.20, la gráfica parece tener ceros en $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(-1, 0)$. Use el comando *zero* o *root*, o los comandos *zoom* y *trace*, de la calculadora para verificar estos ceros. Entonces, los ceros reales son $x = 0$, $x = 1$ y $x = -1$. De la figura, se puede ver que la gráfica tiene tres puntos extremos. Esto es consistente con el hecho de que un polinomio de cuarto grado puede tener como máximo tres puntos extremos.

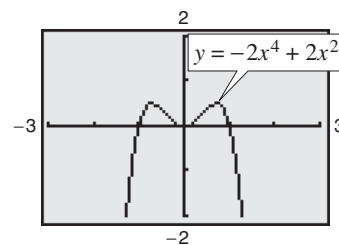


FIGURA 2.20

PUNTO de repaso Ahora trate de hacer el Ejercicio 35.

En el ejemplo 3, observe que como el exponente es mayor que 1, el factor $-2x^2$ produce el *cero repetido* $x = 0$. Puesto que el exponente es par, la gráfica toca el eje x en $x = 0$, como se muestra en la Figura 2.20.

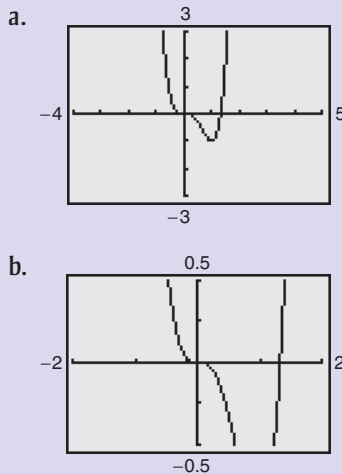
Ceros repetidos

Un factor $(x - a)^k$, $k > 1$, da un **cero repetido** $z = a$ de **multiplicidad** k .

1. Si k es impar, la gráfica *corta* el eje x en $x = a$.
2. Si k es par, la gráfica *toca* el eje x (pero no corta) en $x = a$.

TECNOLOGÍA

El Ejemplo 4 usa un *método algebraico* para describir la gráfica de la función. Una calculadora de gráficas es un complemento para este método. Recuerde que un aspecto importante de usar calculadora de gráficas es hallar una pantalla que muestre todas las características significativas de la gráfica. Por ejemplo, la pantalla del inciso (a) ilustra todas las características significativas de la función del Ejemplo 4, mientras que la pantalla del inciso (b) no las ilustra.



ATENCIÓN

Si no está seguro de la forma de una parte de la gráfica de una función polinomial, grafique algunos puntos adicionales; por ejemplo el punto $(0.5, -0.3125)$, como se ve en la Figura 2.22.

Para graficar funciones polinomiales se puede usar el hecho de que una función polinomial puede cambiar signos sólo en sus ceros. Entre dos ceros consecutivos, un polinomio debe ser enteramente positivo o enteramente negativo. (Esto se deduce del teorema de valor intermedio, que estudiaremos más adelante en esta sección.) Esto significa que cuando los ceros reales de una función polinomial se ponen en orden, dividen la recta numérica real en intervalos en los que la función no tiene cambios de signo. Estos intervalos resultantes son **intervalos de prueba** en los que un valor de x representativo del intervalo se escoge para determinar si el valor de la función polinomial es positivo (la gráfica se encuentra arriba del eje x) o negativo (la gráfica está abajo del eje x).

Ejemplo 4 Trazar la gráfica de una función polinomial

Trace la gráfica de $f(x) = 3x^4 - 4x^3$.

Solución

- 1. Aplique la prueba del coeficiente principal.** Como el coeficiente principal es positivo y el grado es par, sabemos que la gráfica finalmente sube por la izquierda y por la derecha (vea Figura 2.21).
 - 2. Encuentre los ceros del polinomio.** Al factorizar $f(x) = 3x^4 - 4x^3$ como $f(x) = x^3(3x - 4)$, se puede ver que los ceros de f son $x = 0$ y $x = \frac{4}{3}$ (ambos de multiplicidad impar). Por tanto, las intersecciones con el eje x se presentan en $(0, 0)$ y $(\frac{4}{3}, 0)$. Agregue estos puntos a su gráfica, como se muestra en la Figura 2.21.
 - 3. Localice unos cuantos puntos adicionales.** Use los ceros del polinomio para hallar los intervalos de prueba. En cada intervalo de prueba, escoja un valor de x representativo y evalúe la función polinomial, como se muestra en la tabla.
- | Intervalo de prueba | Valor representativo de x | Valor de f | Signo | Punto en la gráfica |
|-------------------------|-----------------------------|-------------------|----------|---------------------|
| $(-\infty, 0)$ | -1 | $f(-1) = 7$ | Positivo | $(-1, 7)$ |
| $(0, \frac{4}{3})$ | 1 | $f(1) = -1$ | Negativo | $(1, -1)$ |
| $(\frac{4}{3}, \infty)$ | 1.5 | $f(1.5) = 1.6875$ | Positivo | $(1.5, 1.6875)$ |
- 4. Trace la gráfica.** Trace una curva continua que pase por los puntos, como se ve en la Figura 2.22. Como ambos ceros son de multiplicidad impar, sabemos que la gráfica debe cortar el eje x en $x = 0$ y $x = \frac{4}{3}$.

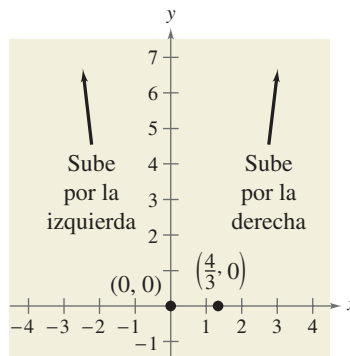


FIGURA 2.21

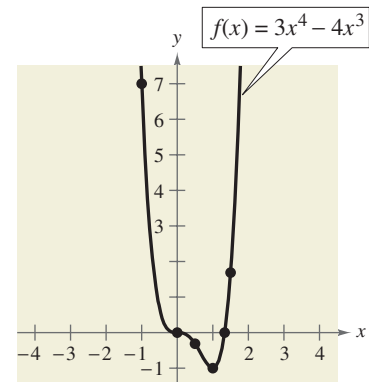


FIGURA 2.22

Ejemplo 5 Trazar la gráfica de una función polinomial

Trace la gráfica de $f(x) = -2x^3 + 6x^2 - \frac{9}{2}x$.

Solución

1. *Aplique la prueba del coeficiente principal.* Como el coeficiente principal es negativo y el grado es impar, sabemos que la gráfica finalmente sube por la izquierda y baja por la derecha (vea Figura 2.23).

2. *Encuentre los ceros del polinomio.* Al factorizar

$$\begin{aligned} f(x) &= -2x^3 + 6x^2 - \frac{9}{2}x \\ &= -\frac{1}{2}x(4x^2 - 12x + 9) \\ &= -\frac{1}{2}x(2x - 3)^2 \end{aligned}$$

se puede ver que los ceros de f son $x = 0$ (multiplicidad impar) y $x = \frac{3}{2}$ (multiplicidad par). Por tanto, las intersecciones con el eje x ocurren en $(0, 0)$ y $(\frac{3}{2}, 0)$. Sume estos puntos a su gráfica, como se muestra en la Figura 2.23.

3. *Localice cuantos pocos puntos adicionales.* Use los ceros del polinomio para hallar los intervalos de prueba. En cada intervalo de prueba, escoja un valor representativo de x y evalúe la función polinomial, como se muestra en la tabla.

Intervalo de prueba	Valor representativo de x	Valor de f	Signo	Punto en la gráfica
$(-\infty, 0)$	-0.5	$f(-0.5) = 4$	Positivo	$(-0.5, 4)$
$(0, \frac{3}{2})$	0.5	$f(0.5) = -1$	Negativo	$(0.5, -1)$
$(\frac{3}{2}, \infty)$	2	$f(2) = -1$	Negativo	$(2, -1)$

4. *Trace la gráfica.* Trace una curva continua que pase por los puntos, como se ve en la Figura 2.24. Como está indicado por la multiplicidad de los ceros, la gráfica corta el eje x en $(0, 0)$ pero no en $(\frac{3}{2}, 0)$.

Tip de estudio

Observe en el Ejemplo 5 que el signo de $f(x)$ es positivo a la izquierda y negativo a la derecha del cero $x = 0$. Del mismo modo, el signo de $f(x)$ es negativo a la izquierda y a la derecha del cero $x = \frac{3}{2}$. Esto sugiere que si el cero de una función polinomial es de multiplicidad *impar*, entonces el signo de $f(x)$ cambia de un lado del cero al otro. Si el cero es de multiplicidad *par*, entonces el signo de $f(x)$ no cambia de ese modo.

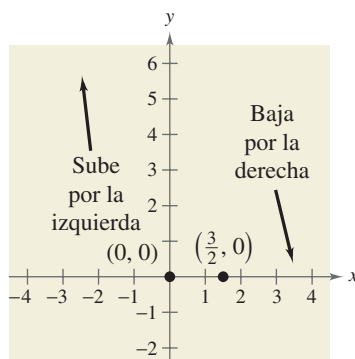


FIGURA 2.23

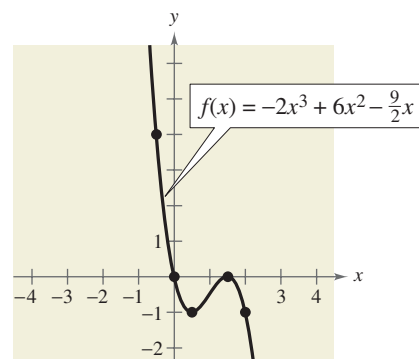


FIGURA 2.24

PUNTO de repaso ➔ Ahora trate de hacer el Ejercicio 77.

Teorema del valor intermedio



El siguiente teorema, llamado **teorema del valor intermedio**, ilustra la existencia de ceros reales de funciones polinomiales. Este teorema implica que si $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ son dos puntos en la gráfica de una función polinomial tal que $f(a) \neq f(b)$, entonces para cualquier número d entre $f(a)$ y $f(b)$ debe haber un número c entre a y b tal que $f(c) = d$. (Vea Figura 2.25.)

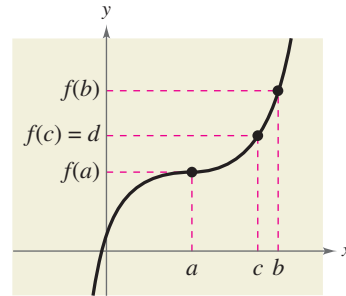


FIGURA 2.25

Teorema del valor intermedio

Sean a y b números reales tales que $a < b$. Si f es una función polinomial tal que $f(a) \neq f(b)$, entonces, en el intervalo $[a, b]$, f toma todo valor entre $f(a)$ y $f(b)$.

El teorema del valor intermedio ayuda a localizar los ceros reales de una función polinomial en la siguiente forma. Si se puede hallar un valor $x = a$ en el que una función polinomial es positiva, y otro valor $x = b$ en el que es negativa, se puede concluir que la función tiene al menos un cero real entre estos dos valores. Por ejemplo, la función dada por $f(x) = x^3 + x^2 + 1$ es negativa cuando $x = -2$ y positiva cuando $x = -1$. Por tanto, del teorema del valor intermedio se deduce que f debe tener un cero real en algún punto entre -2 y -1 , como se ve en la Figura 2.26.

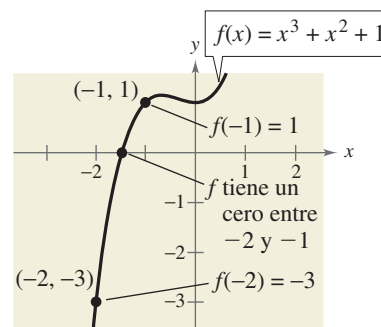


FIGURA 2.26

Para continuar con esta línea de razonamiento, puede calcular cualesquiera ceros reales de una función polinomial a cualquier precisión deseada. Este concepto se demuestra más a fondo en el Ejemplo 6.

Ejemplo 6 Aproximar un cero de una función polinomial



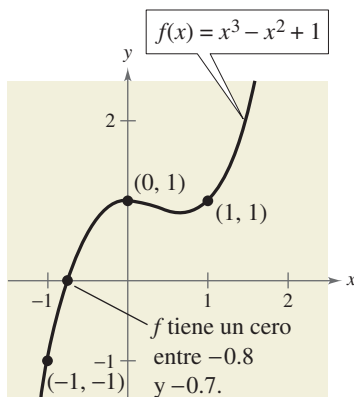
Use el teorema de valor intermedio para calcular el cero real de

$$f(x) = x^3 - x^2 + 1.$$

Solución

Empiece por calcular algunos valores de la función, como sigue.

x	$f(x)$
-2	-11
-1	-1
0	1
1	1



Como $f(-1)$ es negativa y $f(0)$ es positiva, se puede aplicar el teorema del valor intermedio para concluir que la función tiene un cero entre -1 y 0 . Para localizar este cero con más precisión, divida el intervalo $[-1, 0]$ en décimos y evalúe la función en cada punto. Cuando haga esto, encontrará que

$$f(-0.8) = -0.152 \quad \text{y} \quad f(-0.7) = 0.167.$$

Por tanto, f debe tener un cero entre -0.8 y -0.7 , como se muestra en la Figura 2.27. Para una aproximación más precisa, calcule valores de función entre $f(-0.8)$ y $f(-0.7)$ y aplique de nuevo el teorema del valor intermedio. Al continuar este proceso, puede calcular este cero a cualquier precisión deseada.

FIGURA 2.27

PUNTO de repaso → Ahora trate de hacer el Ejercicio 93.

TECNOLOGÍA

El estudiante puede usar el comando *table* de una calculadora de gráficas para aproximar los ceros de una función polinomial. Por ejemplo, para la función dada por

$$f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 3$$

genere una tabla que muestre los valores de función para $-20 \leq x \leq 20$, como se muestra en la primera tabla de la derecha. Arrastre el cursor por la tabla, en busca de valores de función consecutivos que difieran de signo. De la tabla, se ve que $f(0)$ y $f(1)$ difieren de signo. Por tanto, del teorema del valor intermedio se concluye que la función tiene un cero entre 0 y 1 . Se puede ajustar la tabla para que muestre valores de función para $0 \leq x \leq 1$ usando incrementos de 0.1 , como se ilustra en la segunda tabla de la derecha. Al arrastrar el cursor por la tabla, el estudiante verá que $f(0.8)$ y $f(0.9)$ difieren en signo. En consecuencia, la función tiene un cero entre 0.8 y 0.9 . Si repite este proceso varias veces, debe obtener $x \approx 0.806$ como cero de la función. Use el comando *zero* o *root* de una calculadora de gráficas para confirmar este resultado.

x	Y_1	
-2	7	
-1	2	
0	3	
1	2	
2	-5	
3	-25	
4	-78	
5	-173	
$X=1$		

x	Y_1	
.4	2.392	
.5	2.000	
.6	1.400	
.7	.844	
.8	.056	
.9	-.888	
1	-2	
$X=.9$		

2.2 EJERCICIOS

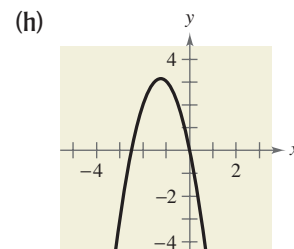
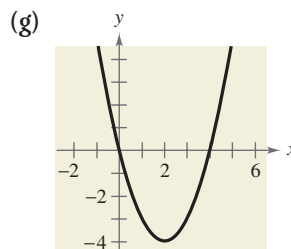
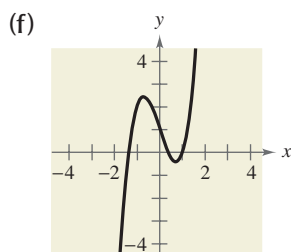
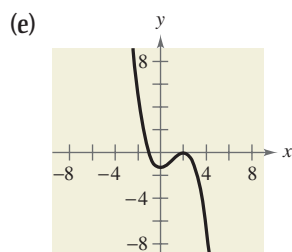
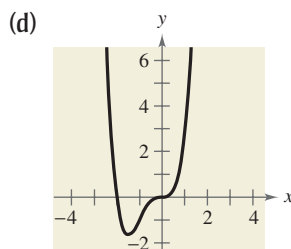
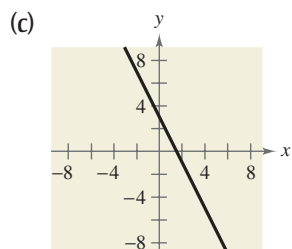
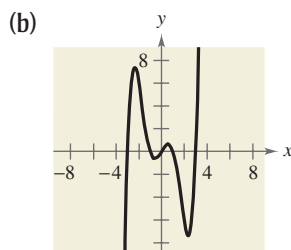
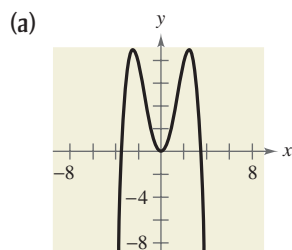
En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

VOCABULARIO: Llene los espacios en blanco.

- Las gráficas de todas las funciones polinomiales son _____, lo cual significa que no tienen interrupciones, huecos o brechas.
- La _____ se usa para determinar el comportamiento por la izquierda y por la derecha de la gráfica de una función polinomial.
- Es frecuente que las funciones polinomiales, de la forma $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ se denominen funciones potencia.
- Una función polinomial de grado n tiene a lo sumo _____ ceros reales y _____ puntos extremos.
- Si $x = a$ es un cero de una función f polinomial, entonces los siguientes tres enunciados son verdaderos.
 - $x = a$ es un _____ de la ecuación polinomial $f(x) = 0$.
 - _____ es un factor del polinomio $f(x)$.
 - $(a, 0)$ es un _____ de la gráfica de f .
- Si un cero real de una función polinomial es de multiplicidad par, entonces la gráfica de f _____ el eje x en $x = a$, y si es de multiplicidad impar, entonces la gráfica de f _____ el eje x en $x = a$.
- Una función polinomial se escribe en forma _____ si sus términos se escriben en orden descendente de exponentes de izquierda a derecha.
- El teorema del _____ expresa que si f es una función polinomial tal que $f(a) \neq f(b)$, entonces, en el intervalo $[a, b]$, f toma todo valor entre $f(a)$ y $f(b)$.

HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 9-16, relacione la función polinomial con su gráfica. [Las gráficas están marcadas (a), (b), (c), (d), (e), (f), (g) y (h).]



- | | |
|-------------------------------------|---|
| 9. $f(x) = -2x + 3$ | 10. $f(x) = x^2 - 4x$ |
| 11. $f(x) = -2x^2 - 5x$ | 12. $f(x) = 2x^3 - 3x + 1$ |
| 13. $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + 3x^2$ | 14. $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - \frac{4}{3}$ |
| 15. $f(x) = x^4 + 2x^3$ | 16. $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - 2x^3 + \frac{9}{5}x$ |

En los Ejercicios 17-20, trace la gráfica de $y = x^n$ y cada transformación.

- | | |
|---------------------------------|------------------------------------|
| 17. $y = x^3$ | |
| (a) $f(x) = (x - 4)^3$ | (b) $f(x) = x^3 - 4$ |
| (c) $f(x) = -\frac{1}{4}x^3$ | (d) $f(x) = (x - 4)^3 - 4$ |
| 18. $y = x^5$ | |
| (a) $f(x) = (x + 1)^5$ | (b) $f(x) = x^5 + 1$ |
| (c) $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x^5$ | (d) $f(x) = -\frac{1}{2}(x + 1)^5$ |
| 19. $y = x^4$ | |
| (a) $f(x) = (x + 3)^4$ | (b) $f(x) = x^4 - 3$ |
| (c) $f(x) = 4 - x^4$ | (d) $f(x) = \frac{1}{2}(x - 1)^4$ |
| (e) $f(x) = (2x)^4 + 1$ | (f) $f(x) = (\frac{1}{2}x)^4 - 2$ |

20. $y = x^6$

(a) $f(x) = -\frac{1}{8}x^6$ (b) $f(x) = (x + 2)^6 - 4$
 (c) $f(x) = x^6 - 5$ (d) $f(x) = -\frac{1}{4}x^6 + 1$
 (e) $f(x) = (\frac{1}{4}x)^6 - 2$ (f) $f(x) = (2x)^6 - 1$

En los Ejercicios 21-30, describa el comportamiento a la derecha e izquierda de la gráfica de la función polinomial.

21. $f(x) = \frac{1}{5}x^3 + 4x$ 22. $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$
 23. $g(x) = 5 - \frac{7}{2}x - 3x^2$ 24. $h(x) = 1 - x^6$
 25. $f(x) = -2.1x^5 + 4x^3 - 2$
 26. $f(x) = 4x^5 - 7x + 6.5$
 27. $f(x) = 6 - 2x + 4x^2 - 5x^3$
 28. $f(x) = (3x^4 - 2x + 5)/4$
 29. $h(t) = -\frac{3}{4}(t^2 - 3t + 6)$
 30. $f(s) = -\frac{7}{8}(s^3 + 5s^2 - 7s + 1)$



ANÁLISIS GRÁFICO En los Ejercicios 31-34, use una calculadora de gráficas para graficar las funciones f y g en la misma pantalla. Utilice el comando *zoom* lo suficiente como para demostrar que los comportamientos a la derecha e izquierda de f y g parezcan idénticos.

31. $f(x) = 3x^3 - 9x + 1$, $g(x) = 3x^3$
 32. $f(x) = -\frac{1}{3}(x^3 - 3x + 2)$, $g(x) = -\frac{1}{3}x^3$
 33. $f(x) = -(x^4 - 4x^3 + 16x)$, $g(x) = -x^4$
 34. $f(x) = 3x^4 - 6x^2$, $g(x) = 3x^4$

En los Ejercicios 35-50, (a) encuentre todos los ceros reales de la función polinomial, (b) determine la multiplicidad de cada cero y el número de puntos de inflexión de la gráfica de la función y (c) use una calculadora de gráficas para graficar la función y verificar sus respuestas.

35. $f(x) = x^2 - 36$ 36. $f(x) = 81 - x^2$
 37. $h(t) = t^2 - 6t + 9$ 38. $f(x) = x^2 + 10x + 25$
 39. $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$ 40. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}$
 41. $f(x) = 3x^3 - 12x^2 + 3x$ 42. $g(x) = 5x(x^2 - 2x - 1)$
 43. $f(t) = t^3 - 8t^2 + 16t$ 44. $f(x) = x^4 - x^3 - 30x^2$
 45. $g(t) = t^5 - 6t^3 + 9t$ 46. $f(x) = x^5 + x^3 - 6x$
 47. $f(x) = 3x^4 + 9x^2 + 6$ 48. $f(x) = 2x^4 - 2x^2 - 40$
 49. $g(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$
 50. $f(x) = x^3 - 4x^2 - 25x + 100$



ANÁLISIS GRÁFICO En los Ejercicios 51-54, (a) use una calculadora de gráficas para graficar la función, (b) use la gráfica para calcular cualesquiera intersecciones de la gráfica con el eje x , (c) haga $y = 0$ y resuelva la ecuación resultante y (d) compare los resultados del inciso (c) con cualesquiera intersecciones de la gráfica con el eje x .

51. $y = 4x^3 - 20x^2 + 25x$ 52. $y = 4x^3 + 4x^2 - 8x - 8$

53. $y = x^5 - 5x^3 + 4x$ 54. $y = \frac{1}{4}x^3(x^2 - 9)$

En los Ejercicios 55-64, encuentre una función polinomial que tenga los ceros dados. (Hay numerosas respuestas correctas.)

55. 0, 8 56. 0, -7
 57. 2, -6 58. -4, 5
 59. 0, -4, -5 60. 0, 1, 10
 61. 4, -3, 3, 0 62. -2, -1, 0, 1, 2
 63. $1 + \sqrt{3}$, $1 - \sqrt{3}$ 64. $2, 4 + \sqrt{5}$, $4 - \sqrt{5}$

En los Ejercicios 65-74, encuentre una función polinomial de grado n que tenga los ceros dados. (Hay numerosas respuestas correctas.)

Cero(s)	Grado
65. $x = -3$	$n = 2$
66. $x = -12, -6$	$n = 2$
67. $x = -5, 0, 1$	$n = 3$
68. $x = -2, 4, 7$	$n = 3$
69. $x = 0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}$	$n = 3$
70. $x = 9$	$n = 3$
71. $x = -5, 1, 2$	$n = 4$
72. $x = -4, -1, 3, 6$	$n = 4$
73. $x = 0, -4$	$n = 5$
74. $x = -1, 4, 7, 8$	$n = 5$

En los Ejercicios 75-88, trace la gráfica de la función al (a) aplicar la prueba del coeficiente principal, (b) hallar los ceros del polinomio, (c) localizar suficientes puntos de solución y (d) trazar una curva continua que pase por los puntos.

75. $f(x) = x^3 - 25x$ 76. $g(x) = x^4 - 9x^2$
 77. $f(t) = \frac{1}{4}(t^2 - 2t + 15)$
 78. $g(x) = -x^2 + 10x - 16$
 79. $f(x) = x^3 - 2x^2$ 80. $f(x) = 8 - x^3$
 81. $f(x) = 3x^3 - 15x^2 + 18x$
 82. $f(x) = -4x^3 + 4x^2 + 15x$
 83. $f(x) = -5x^2 - x^3$ 84. $f(x) = -48x^2 + 3x^4$
 85. $f(x) = x^2(x - 4)$ 86. $h(x) = \frac{1}{3}x^3(x - 4)^2$
 87. $g(t) = -\frac{1}{4}(t - 2)^2(t + 2)^2$
 88. $g(x) = \frac{1}{10}(x + 1)^2(x - 3)^3$



En los Ejercicios 89-92, use una calculadora de gráficas para graficar la función. Use el comando *zero* o *root* para aproximar los ceros reales de el comando. A continuación determine la multiplicidad de cada cero.

89. $f(x) = x^3 - 16x$ 90. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$
 91. $g(x) = \frac{1}{5}(x + 1)^2(x - 3)(2x - 9)$
 92. $h(x) = \frac{1}{5}(x + 2)^2(3x - 5)^2$

En los Ejercicios 93-96, use el teorema del valor intermedio y el comando *table* de una calculadora de gráficas para hallar intervalos de una unidad de longitud, en los que se garantice que la función polinomial tiene un cero. Ajuste la tabla para aproximar los ceros de la función. Use el comando *zero* o *root* de la calculadora de gráficas para verificar sus resultados.

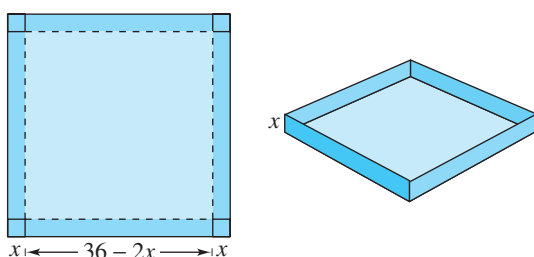
93. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$

94. $f(x) = 0.11x^3 - 2.07x^2 + 9.81x - 6.88$

95. $g(x) = 3x^4 + 4x^3 - 3$

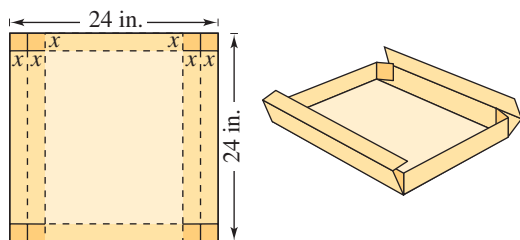
96. $h(x) = x^4 - 10x^2 + 3$

97. ANÁLISIS NUMÉRICO Y GRÁFICO Se ha de construir una caja abierta a partir de una pieza cuadrada de material, de 36 pulgadas por lado, cortando cuadrados iguales con lados de longitud x desde las esquinas y volteando hacia arriba los lados (vea figura).



- Escriba una función $V(x)$ que represente el volumen de la caja.
- Determine el dominio de la función.
- Use una calculadora de gráficas para crear una tabla que muestre alturas x de la caja y los correspondientes volúmenes V . Use la tabla para estimar las dimensiones que producirán un volumen máximo.
- Use una calculadora de gráficas para graficar V y use la gráfica para estimar el valor de x para el que $V(x)$ sea máximo. Compare su resultado con el del inciso (c).

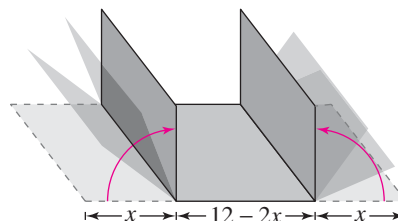
98. VOLUMEN MÁXIMO Una caja abierta con pestañas de cierre se ha de construir a partir de una pieza cuadrada de material de 24 pulgadas por lado. Esto se ha de hacer cortando cuadrados iguales de las esquinas y doblando a lo largo de las líneas discontinuas que se ven en la figura.



- Escriba una función $V(x)$ que represente el volumen de la caja.
- Determine el dominio de la función V .

- Trace una gráfica de la función y calcule el valor de x para el cual $V(x)$ sea máximo.

99. CONSTRUCCIÓN Un contratista de impermeabilizaciones está fabricando canales de techo para desagüe, con hojas de aluminio de 12 pulgadas. El contratista piensa usar una prensa de dobleces laterales de aluminio para hacer una canal al doblar longitudes iguales para los costados (vea figura).



- Represente con x la altura de la pared lateral de la canal. Escriba una función A que represente el área de sección transversal de la canal.
- La longitud de la hoja de aluminio es de 16 pies. Escriba una función V que represente el volumen de un tramo de x en términos de x .
- Determine el dominio de la función del inciso (b).
- Use una calculadora de gráficas para crear una tabla que muestre varias alturas x de pared y los correspondientes volúmenes V . Use la tabla para estimar las dimensiones que producirán un volumen máximo.
- Use una calculadora de gráficas para graficar V . Use la gráfica para estimar el valor de x para el cual $V(x)$ es máximo. Compare su resultado con el del inciso (d).
- ¿Cambiaría el valor de x si la hoja de aluminio fuera de longitud diferente? Explique.

100. CONSTRUCCIÓN Un tanque de gas propano industrial se forma al unir dos hemisferios a los extremos de un cilindro circular recto. La longitud de la parte cilíndrica del tanque es cuatro veces el radio de los componentes hemisféricos (vea figura).



- Escriba una función que represente el volumen total V del tanque en términos de r .
- Encuentre el dominio de la función.
- Use una calculadora de gráficas para graficar la función.
- El volumen total del tanque ha de ser de 120 pies cúbicos. Use la gráfica del inciso (c) para estimar el radio y longitud de la parte cilíndrica del tanque.



- 101. INGRESO** El total de ingresos R (en millones de dólares) de Krispy Kreme de 2000 a 2007 se muestra en la tabla siguiente.



Año	Ingresos, R
2000	300.7
2001	394.4
2002	491.5
2003	665.6
2004	707.8
2005	543.4
2006	461.2
2007	429.3

Un modelo que representa estos datos está dado por $R = 3.0711t^4 - 42.803t^3 + 160.59t^2 - 62.6t + 307$, $0 \leq t \leq 7$, donde t representa el año, con $t = 0$ para el año 2000. (Fuente: Krispy Kreme)

- Use una calculadora de gráficas para crear una gráfica de dispersión de los datos. A continuación grafique el modelo en la misma pantalla.
 - ¿Qué tan bien se ajusta el modelo a los datos?
 - Use una calculadora de gráficas para aproximar cualesquier extremos relativos del modelo sobre su dominio.
 - Use una calculadora de gráficas para aproximar los intervalos sobre los cuales el ingreso para Krispy Kreme fue creciente y decreciente en su dominio.
 - Use los resultados de los incisos (c) y (d) para escribir un breve párrafo acerca del ingreso de Krispy Kreme durante este periodo.
- 102. INGRESO** El ingreso total R (en millones de dólares) para Papa John's International, de 2000 a 2007, se muestra en la tabla siguiente.



Año	Ingreso, R
2000	944.7
2001	971.2
2002	946.2
2003	917.4
2004	942.4
2005	968.8
2006	1001.6
2007	1063.6

Un modelo que representa estos datos está dado por $R = -0.5635t^4 + 9.019t^3 - 40.20t^2 + 49.0t + 947$, $0 \leq t \leq 7$, donde t representa el año, con $t = 0$ correspondiente a 2000. (Fuente: Papa John's International)

- Use una calculadora de gráficas para crear una gráfica de dispersión de los datos. A continuación grafique el modelo en la misma pantalla.
- ¿Qué tan bien se ajusta el modelo a los datos?
- Use una calculadora de gráficas para aproximar cualesquier extremos relativos del modelo sobre su dominio.
- Use una calculadora de gráficas para aproximar los intervalos sobre los cuales el ingreso para Papa John's International fue creciente y decreciente en su dominio.
- Use los resultados de los incisos (c) y (d) para escribir un breve párrafo acerca del ingreso de Papa John's International durante este periodo.



- 103. CRECIMIENTO DE ÁRBOLES** El crecimiento de un roble rojo se calcula mediante la función

$$G = -0.003t^3 + 0.137t^2 + 0.458t - 0.839$$

donde G es la altura del árbol (en pies) y t ($2 \leq t \leq 34$) es su edad (en años).

- Use una calculadora de gráficas para graficar la función. (Sugerencia: use una pantalla en la que $-10 \leq x \leq 45$ y $-5 \leq y \leq 60$.)
 - Calcule la edad del árbol cuando esté creciendo más rápidamente. Este punto se denomina *punto de rendimiento a la baja* porque el aumento en tamaño será menor con cada año adicional.
 - Usando cálculo, el punto de rendimiento a la baja también se puede hallar si se encuentra el vértice de la parábola dado por
- $$y = -0.009t^2 + 0.274t + 0.458.$$
- Encuentre el vértice de esta parábola.
- Compare sus resultados de los incisos (b) y (c).

- 104. INGRESO** El ingreso total R (en millones de dólares) para una compañía está relacionado con su gasto en publicidad mediante la función

$$R = \frac{1}{100\,000}(-x^3 + 600x^2), \quad 0 \leq x \leq 400$$

donde x es la cantidad gastada en publicidad (en decenas de miles de dólares). Use la gráfica de esta función, que se muestra en la figura siguiente, para calcular el punto de la gráfica en el que la función crece con máxima rapidez. Este punto recibe el nombre de *punto de rendimiento a la baja*, porque cualquier gasto arriba de esta cantidad dará menor rendimiento por dólar invertido en publicidad.

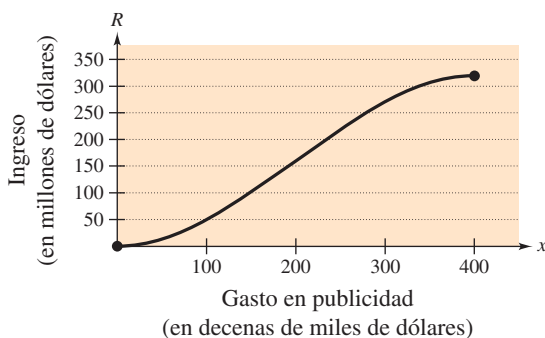


FIGURA PARA EL EJERCICIO 104

EXPLORACIÓN

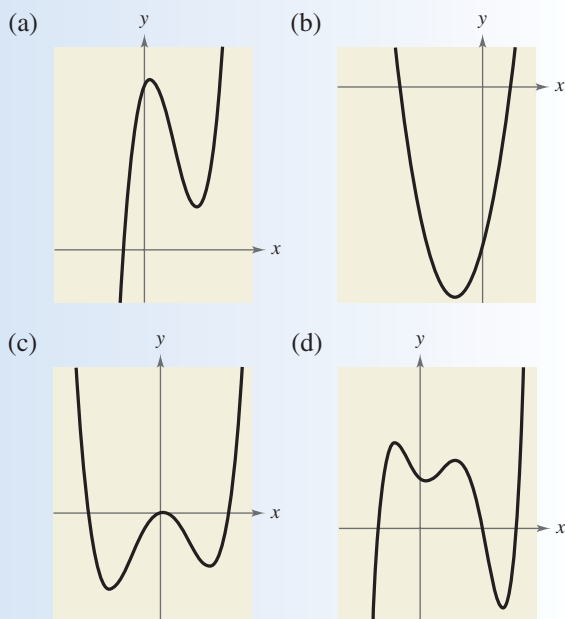
¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 105-107, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

- 105.** Un polinomio de quinto grado puede tener cinco puntos extremos en su gráfica.
- 106.** Es posible que un polinomio de sexto grado tenga sólo una solución.
- 107.** La gráfica de la función dada por

$$f(x) = 2 + x - x^2 + x^3 - x^4 + x^5 + x^6 - x^7$$

sube por la izquierda y baja por la derecha.

108. TOQUE FINAL Describa una función polinomial que pueda representar cada gráfica. (Indique el grado de la función y el signo de su coeficiente principal.)



109. RAZONAMIENTO GRÁFICO Trace una gráfica de la función dada por $f(x) = x^4$. Explique la forma en que la gráfica de cada función g difiere (si es así) de la de cada función f . Determine si g es impar, par o ninguna de éstas.

- (a) $g(x) = f(x) + 2$ (b) $g(x) = f(x + 2)$
 (c) $g(x) = f(-x)$ (d) $g(x) = -f(x)$
 (e) $g(x) = f\left(\frac{1}{2}x\right)$ (f) $g(x) = \frac{1}{2}f(x)$
 (g) $g(x) = f(x^{3/4})$ (h) $g(x) = (f \circ f)(x)$

110. PIÉNSELO Para cada función, identifique su grado y si éste es par o impar. Identifique el coeficiente principal y si es positivo o negativo. Use una calculadora de gráficas para graficar cada función. Describa la relación entre el grado de la función y el signo del coeficiente principal y el comportamiento a la derecha e izquierda de la gráfica.

- (a) $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 1$
 (b) $f(x) = 2x^5 + 2x^2 - 5x + 1$
 (c) $f(x) = -2x^5 - x^2 + 5x + 3$
 (d) $f(x) = -x^3 + 5x - 2$
 (e) $f(x) = 2x^2 + 3x - 4$
 (f) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x - 1$
 (g) $f(x) = x^2 + 3x + 2$

111. PIÉNSELO Trace la gráfica de cada función polinomial. En seguida cuente el número de ceros de la función y el número de mínimos relativos y máximos relativos. Compare estos números con el grado del polinomio. ¿Qué observa?

- (a) $f(x) = -x^3 + 9x$ (b) $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$
 (c) $f(x) = x^5 - 16x$

112. Explore las transformaciones de la forma



$$g(x) = a(x - h)^5 + k.$$

- (a) Use una calculadora de gráficas para graficar las funciones $y_1 = -\frac{1}{3}(x - 2)^5 + 1$ y $y_2 = \frac{3}{5}(x + 2)^5 - 3$. Determine si las gráficas son crecientes o decrecientes. Explique.
- (b) ¿La gráfica de g siempre será creciente o decreciente? Si es así, ¿su comportamiento está determinado por a , h o k ? Explique.
- (c) Use una calculadora de gráficas para graficar la función dada por $H(x) = x^5 - 3x^3 + 2x + 1$. Use la gráfica y el resultado del inciso (b) para determinar si H puede escribirse en la forma $H(x) = a(x - h)^5 + k$. Explique.

2.3 DIVISIÓN DE POLINOMIOS Y SINTÉTICA

Lo que debe aprender

- Usar división larga para dividir polinomios entre polinomios.
- Usar división sintética para dividir polinomios entre binomios de la forma $(x - k)$.
- Usar el teorema del residuo y el teorema del factor.

Por qué debe aprenderlo

La división sintética puede ayudar a evaluar funciones polinomiales. Por ejemplo, en el Ejercicio 85 de la página 157 el lector usará división sintética para determinar la cantidad donada para sostener la educación superior en Estados Unidos en 2010.

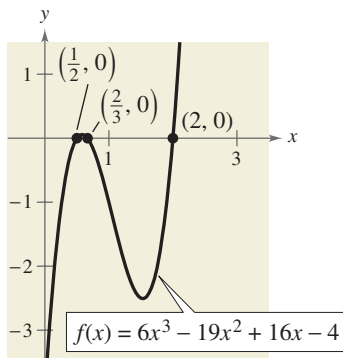


FIGURA 2.28

División larga de polinomios

En esta sección estudiaremos dos procedimientos para *dividir* polinomios. Estos procedimientos son especialmente valiosos para hallar los ceros de funciones polinomiales. Para empezar, supóngase que nos dan la gráfica de

$$f(x) = 6x^3 - 19x^2 + 16x - 4.$$

Observe que un cero de f ocurre en $x = 2$, como se ve en la Figura 2.28. Como $x = 2$ es un cero de f , sabemos que $(x - 2)$ es un factor de $f(x)$. Esto significa que existe un polinomio de segundo grado $q(x)$ tal que

$$f(x) = (x - 2) \cdot q(x).$$

Para hallar $q(x)$ se puede usar la **división larga**, como se ve en el Ejemplo 1.

Ejemplo 1 División larga de polinomios

Divida $6x^3 - 19x^2 + 16x - 4$ por $x - 2$ y use el resultado para factorizar completamente el polinomio.

Solución

$$\begin{array}{r}
 \quad \quad \quad \begin{array}{l} \text{Considerar } \frac{6x^3}{x} = 6x^2. \\ \text{Considerar } \frac{-7x^2}{x} = -7x. \\ \text{Considerar } \frac{2x}{x} = 2. \end{array} \\
 \quad \quad \quad \begin{array}{r} 6x^2 - 7x + 2 \\ x - 2 \overline{) 6x^3 - 19x^2 + 16x - 4} \\ \underline{6x^3 - 12x^2} \\ -7x^2 + 16x \\ \underline{-7x^2 + 14x} \\ 2x - 4 \\ \underline{2x - 4} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Multiplicar: } 6x^2(x - 2). \\ \text{Restar.} \\ \text{Multiplicar: } -7x(x - 2). \\ \text{Restar.} \\ \text{Multiplicar: } 2(x - 2). \\ \text{Restar.} \end{array}
 \end{array}$$

De esta división, se puede concluir que

$$6x^3 - 19x^2 + 16x - 4 = (x - 2)(6x^2 - 7x + 2)$$

y al factorizar $6x^2 - 7x + 2$, tenemos

$$6x^3 - 19x^2 + 16x - 4 = (x - 2)(2x - 1)(3x - 2).$$

Observe que esta factorización está acorde con la gráfica de la Figura 2.28 en que las tres intersecciones con el eje x se presentan en $x = 2$, $x = \frac{1}{2}$ y $x = \frac{2}{3}$.

PUNTO de repaso ➡ Ahora trate de hacer el Ejercicio 11.

En el Ejemplo 1, $x - 2$ es un factor del polinomio $6x^3 - 19x^2 + 16x - 4$, y el proceso de división larga produce un residuo de cero. A veces la división larga produce un residuo diferente de cero. Por ejemplo, si dividimos $x^2 + 3x + 5$ entre $x + 1$ obtenemos lo siguiente.

$$\begin{array}{r}
 \text{Divisor} \rightarrow x + 1 \overline{) x^2 + 3x + 5} \quad \begin{array}{l} x + 2 \leftarrow \text{Cociente} \\ \leftarrow \text{Dividendo} \end{array} \\
 \underline{x^2 + x} \\
 2x + 5 \\
 \underline{2x + 2} \\
 3 \leftarrow \text{Residuo}
 \end{array}$$

En forma fraccionaria, se puede escribir este resultado como sigue.

$$\begin{array}{c}
 \text{Dividendo} \\
 \hline
 x^2 + 3x + 5 \\
 \hline
 \text{Divisor} \\
 x + 1
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \text{Cociente} \\
 x + 2
 \end{array}
 +
 \begin{array}{c}
 \text{Residuo} \\
 \downarrow \\
 3 \\
 \hline
 \text{Divisor} \\
 x + 1
 \end{array}$$

Esto implica que

$$x^2 + 3x + 5 = (x + 1)(x + 2) + 3 \quad \text{Multiplicar cada lado por } (x + 1).$$

que ilustra el siguiente teorema, llamado **algoritmo de la división**.

Algoritmo de la división

Si $f(x)$ y $d(x)$ son polinomios tales que $d(x) \neq 0$ y el grado de $d(x)$ es menor o igual al grado de $f(x)$, existen polinomios únicos $q(x)$ y $r(x)$ tales que

$$f(x) = d(x)q(x) + r(x)$$

$\begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{Dividendo} & & \text{Cociente} & \\ & \text{Divisor} & & \text{Residuo} \end{array}$

donde $r(x) = 0$, o bien el grado de $r(x)$ es menor que el de $d(x)$. Si el residuo $r(x)$ es cero, $d(x)$ se divide uniformemente entre $f(x)$.

El algoritmo de la división también se puede escribir como

$$\frac{f(x)}{d(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{d(x)}.$$

En el algoritmo de la división, la expresión racional $f(x)/d(x)$ es **impropia** porque el grado de $f(x)$ es mayor o igual que el de $d(x)$. Por otra parte, la expresión racional $r(x)/d(x)$ es **propia** porque el grado de $r(x)$ es menor que el de $d(x)$.

Antes de aplicar el algoritmo de la división, siga estos pasos.

1. Escriba el dividendo y el divisor en potencias descendentes de la variable.
2. Inserte dígitos con coeficientes cero en lugar de potencias faltantes de la variable.

Ejemplo 2 División larga de polinomios

Divida $x^3 - 1$ entre $x - 1$.

Solución

Como no hay término en x^2 ni término en x en el dividendo, es necesario alinear la sustracción usando coeficientes cero (o dejando espacio) en lugar de términos faltantes.

$$\begin{array}{r}
 x^2 + x + 1 \\
 x - 1 \overline{) x^3 + 0x^2 + 0x - 1} \\
 \underline{x^3 - x^2} \\
 x^2 + 0x \\
 \underline{x^2 - x} \\
 x - 1 \\
 \underline{x - 1} \\
 0
 \end{array}$$

Por tanto, $x - 1$ se divide uniformemente entre $x^3 - 1$, y podemos escribir

$$\frac{x^3 - 1}{x - 1} = x^2 + x + 1, \quad x \neq 1.$$

PUNTO de repaso ➔ Ahora trate de hacer el Ejercicio 17.

Es posible verificar el resultado del Ejemplo 2 multiplicando:

$$(x - 1)(x^2 + x + 1) = x^3 + x^2 + x - x^2 - x - 1 = x^3 - 1$$

Ejemplo 3 División larga de polinomios

Divida $-5x^2 - 2 + 3x + 2x^4 + 4x^3$ entre $2x - 3 + x^2$.

Solución

Empiece por escribir el dividendo y el divisor en potencias descendentes de x .

$$\begin{array}{r}
 2x^2 + 1 \\
 x^2 + 2x - 3 \overline{) 2x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 3x - 2} \\
 \underline{2x^4 + 4x^3 - 6x^2} \\
 x^2 + 3x - 2 \\
 \underline{x^2 + 2x - 3} \\
 x + 1
 \end{array}$$

Observe que la primera sustracción eliminó dos términos del dividendo. Cuando ocurre esto, el cociente se salta un término. Podemos escribir el resultado como

$$\frac{2x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 3x - 2}{x^2 + 2x - 3} = 2x^2 + 1 + \frac{x + 1}{x^2 + 2x - 3}.$$

PUNTO de repaso ➔ Ahora trate de hacer el Ejercicio 23

Ayuda de álgebra

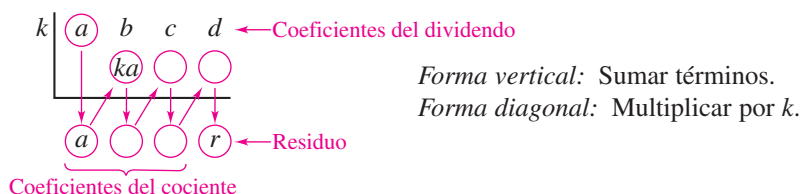
La verificación de un problema de división larga se hace multiplicando. En el Apéndice A.3 se pueden revisar las técnicas para multiplicar polinomios.

División sintética

Hay un práctico atajo para la división larga de polinomios entre divisores de la forma $x - k$. Este atajo se llama **división sintética**. La forma para la división sintética de un polinomio cúbico se resume como sigue. (La forma para polinomios de grado superior es similar.)

División sintética (para un polinomio cúbico)

Para dividir $ax^3 + bx^2 + cx + d$ entre $x - k$, use la siguiente forma.



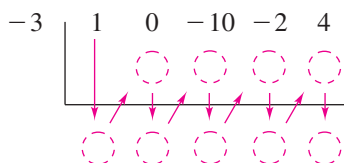
Este algoritmo de la división sintética funciona sólo para divisores de la forma $x - k$. Recuerde que $x + k = x - (-k)$.

Ejemplo 4 Uso de división sintética

Use división sintética para dividir $x^4 - 10x^2 - 2x + 4$ entre $x + 3$.

Solución

El estudiante debe escribir el arreglo como sigue. Observe que está incluido un cero por el término x^3 faltante en el dividendo.



A continuación, use la forma de la división sintética sumando términos en columnas y multiplicando por -3 los resultados.

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 -3 & 1 & 0 & -10 & -2 & 4 \\
 & & -3 & 9 & 3 & -3 \\
 \hline
 & 1 & -3 & -1 & 1 & 1
 \end{array}$$

Divisor: $x + 3$ Dividendo: $x^4 - 10x^2 - 2x + 4$

Cociente: $x^3 - 3x^2 - x + 1$ Residuo: 1

Por tanto, tenemos

$$\frac{x^4 - 10x^2 - 2x + 4}{x + 3} = x^3 - 3x^2 - x + 1 + \frac{1}{x + 3}.$$

PUNTO de repaso ➔ Ahora trate de hacer el Ejercicio 27.

Teoremas del residuo y del factor

El residuo obtenido en el proceso de división sintética tiene una interpretación importante, como se describe en el **teorema del residuo**.

Teorema del residuo

Si un polinomio $f(x)$ se divide entre $x - k$, el residuo es

$$r = f(k).$$

Para una demostración del teorema del residuo, vea la página 211.

El teorema del residuo indica que la división sintética se puede usar para evaluar una función polinomial. Esto es, para evaluar una función polinomial $f(x)$ cuando $x = k$, divida $f(x)$ entre $x - k$. El residuo será $f(k)$, como se ilustra en el Ejemplo 5.

Ejemplo 5 Uso del teorema del residuo

Use el teorema del residuo para evaluar la siguiente función en $x = -2$.

$$f(x) = 3x^3 + 8x^2 + 5x - 7$$

Solución

Usando división sintética, se obtiene lo siguiente.

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 3 & 8 & 5 & -7 \\ & & -6 & -4 & -2 \\ \hline & 3 & 2 & 1 & -9 \end{array}$$

Como el residuo es $r = -9$, se puede concluir que

$$f(-2) = -9. \quad r = f(k)$$

Esto significa que $(-2, -9)$ es un punto en la gráfica de f . Se puede verificar esto al sustituir $x = -2$ en la función original.

Comprobación

$$\begin{aligned} f(-2) &= 3(-2)^3 + 8(-2)^2 + 5(-2) - 7 \\ &= 3(-8) + 8(4) - 10 - 7 = -9 \end{aligned}$$

PUNTO de repaso

➡ Ahora trate de hacer el Ejercicio 55.

Otro importante teorema es el **teorema del factor**, que se expresa a continuación. Este teorema indica que se puede probar para ver si un polinomio tiene $(x - k)$ como factor al evaluar el polinomio en $x = k$. Si el resultado es 0, $(x - k)$ es un factor.

Teorema del factor

Un polinomio $f(x)$ tiene un factor $(x - k)$ si y sólo si $f(k) = 0$.

Para una demostración del teorema del factor, vea la página 211.

Ejemplo 6 Factorizar un polinomio: división repetida

Demuestre que $(x - 2)$ y $(x + 3)$ son factores de $f(x) = 2x^4 + 7x^3 - 4x^2 - 27x - 18$. A continuación encuentre los factores restantes de $f(x)$.

Solución algebraica

Usando división sintética con el factor $(x - 2)$ se obtiene lo siguiente.

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 2 & 7 & -4 & -27 & -18 \\ & & 4 & 22 & 36 & 18 \\ \hline & 2 & 11 & 18 & 9 & 0 \end{array} \rightarrow \text{Residuo 0, entonces } f(2) = 0 \text{ y } (x - 2) \text{ es un factor.}$$

Tome el resultado de esta división y realice división sintética una vez más usando el factor $(x + 3)$.

$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & 2 & 11 & 18 & 9 \\ & & -6 & -15 & -9 \\ \hline & 2 & 5 & 3 & 0 \end{array} \rightarrow \text{Residuo 0, entonces } f(-3) = 0 \text{ y } (x + 3) \text{ es un factor.}$$

$2x^2 + 5x + 3$

Como la expresión cuadrática resultante se factoriza como

$$2x^2 + 5x + 3 = (2x + 3)(x + 1)$$

la factorización completa de $f(x)$ es

$$f(x) = (x - 2)(x + 3)(2x + 3)(x + 1).$$

PUNTO de repaso → Ahora trate de hacer el Ejercicio 67.

Solución gráfica

De la gráfica de $f(x) = 2x^4 + 7x^3 - 4x^2 - 27x - 18$ se puede ver que hay cuatro intersecciones con x (vea Figura 2.29). Éstas ocurren en $x = -3$, $x = -\frac{3}{2}$, $x = -1$ y $x = 2$. (Verifíquelo algebraicamente.) Esto implica que $(x + 3)$, $(x + \frac{3}{2})$, $(x + 1)$ y $(x - 2)$ son factores de $f(x)$. [Observe que $(x + \frac{3}{2})$ y $(2x + 3)$ son factores equivalentes porque ambos dan el mismo cero, $x = -\frac{3}{2}$.]

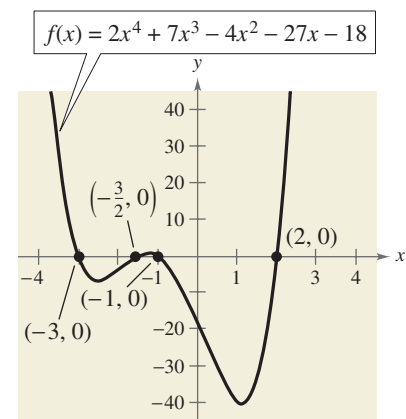


FIGURA 2.29

Tip de estudio

Observe en el Ejemplo 6 que la factorización completa de $f(x)$ implica que f tiene cuatro ceros reales: $x = 2$, $x = -3$, $x = -\frac{3}{2}$ y $x = -1$. Esto se confirma por la gráfica de f , que se muestra en la Figura 2.29.

Usos del residuo en división sintética

El residuo r , obtenido en la división sintética de $f(x)$ entre $x - k$, proporciona la siguiente información.

1. El residuo r da el valor de f en $x = k$. Esto es, $r = f(k)$.
2. Si $r = 0$, $(x - k)$ es un factor de $f(x)$.
3. Si $r = 0$, $(k, 0)$ es una intersección con el eje x de la gráfica de f .

En todo este texto destacamos la importancia de desarrollar varias estrategias para resolver problemas. En los ejercicios de esta sección, trate de usar más de una para resolver varios de ellos. Por ejemplo, si usted encuentra que $x - k$ se divide uniformemente entre $f(x)$ (sin residuo), trate de trazar la gráfica de f . Debe hallar que $(k, 0)$ es una intersección de la gráfica con el eje x .

2.3 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

VOCABULARIO

1. A continuación veamos dos formas del algoritmo de la división. Identifique y marque cada término o función.

$$f(x) = d(x)q(x) + r(x) \qquad \frac{f(x)}{d(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{d(x)}$$

En los Ejercicios 2-6, llene los espacios en blanco.

- La expresión racional $p(x)/q(x)$ se denomina _____ si el grado del numerador es mayor o igual que el del denominador, y _____ si el grado del numerador es menor que el del denominador.
- En el algoritmo de la división, la expresión racional $f(x)/d(x)$ es _____ porque el grado de $f(x)$ es mayor o igual que el de $d(x)$.
- Un método alternativo a la división larga de polinomios se llama _____, en el que el divisor debe ser de la forma $x - k$.
- El teorema _____ expresa que un polinomio $f(x)$ tiene un factor $(x - k)$ si y sólo si $f(k) = 0$.
- El teorema _____ expresa que si un polinomio $f(x)$ se divide entre $x - k$, el residuo es $r = f(k)$.

HABILIDADES Y APLICACIONES

ANÁLISIS NUMÉRICO En los Ejercicios 7 y 8, use división larga para verificar que $y_1 = y_2$.

$$7. y_1 = \frac{x^2}{x+2}, \quad y_2 = x - 2 + \frac{4}{x+2}$$

$$8. y_1 = \frac{x^4 - 3x^2 - 1}{x^2 + 5}, \quad y_2 = x^2 - 8 + \frac{39}{x^2 + 5}$$



ANÁLISIS GRÁFICO En los Ejercicios 9 y 10, (a) use una calculadora de gráficas para graficar las dos ecuaciones en la misma pantalla, (b) use las gráficas para verificar que las expresiones son equivalentes, y (c) use división larga para verificar algebraicamente los resultados.

$$9. y_1 = \frac{x^2 + 2x - 1}{x + 3}, \quad y_2 = x - 1 + \frac{2}{x + 3}$$

$$10. y_1 = \frac{x^4 + x^2 - 1}{x^2 + 1}, \quad y_2 = x^2 - \frac{1}{x^2 + 1}$$

En los Ejercicios 11-26, use división larga para dividir.

- $(2x^2 + 10x + 12) \div (x + 3)$
- $(5x^2 - 17x - 12) \div (x - 4)$
- $(4x^3 - 7x^2 - 11x + 5) \div (4x + 5)$
- $(6x^3 - 16x^2 + 17x - 6) \div (3x - 2)$
- $(x^4 + 5x^3 + 6x^2 - x - 2) \div (x + 2)$
- $(x^3 + 4x^2 - 3x - 12) \div (x - 3)$
- $(x^3 - 27) \div (x - 3)$
- $(x^3 + 125) \div (x + 5)$
- $(7x + 3) \div (x + 2)$
- $(8x - 5) \div (2x + 1)$
- $(x^3 - 9) \div (x^2 + 1)$
- $(x^5 + 7) \div (x^3 - 1)$
- $(3x + 2x^3 - 9 - 8x^2) \div (x^2 + 1)$

$$24. (5x^3 - 16 - 20x + x^4) \div (x^2 - x - 3)$$

$$25. \frac{x^4}{(x-1)^3} \qquad 26. \frac{2x^3 - 4x^2 - 15x + 5}{(x-1)^2}$$

En los Ejercicios 27-46, use división sintética para dividir.

- $(3x^3 - 17x^2 + 15x - 25) \div (x - 5)$
- $(5x^3 + 18x^2 + 7x - 6) \div (x + 3)$
- $(6x^3 + 7x^2 - x + 26) \div (x - 3)$
- $(2x^3 + 14x^2 - 20x + 7) \div (x + 6)$
- $(4x^3 - 9x + 8x^2 - 18) \div (x + 2)$
- $(9x^3 - 16x - 18x^2 + 32) \div (x - 2)$
- $(-x^3 + 75x - 250) \div (x + 10)$
- $(3x^3 - 16x^2 - 72) \div (x - 6)$
- $(5x^3 - 6x^2 + 8) \div (x - 4)$
- $(5x^3 + 6x + 8) \div (x + 2)$
- $\frac{10x^4 - 50x^3 - 800}{x - 6}$
- $\frac{x^5 - 13x^4 - 120x + 80}{x + 3}$
- $\frac{x^3 + 512}{x + 8}$
- $\frac{x^3 - 729}{x - 9}$
- $\frac{-3x^4}{x - 2}$
- $\frac{-3x^4}{x + 2}$
- $\frac{180x - x^4}{x - 6}$
- $\frac{5 - 3x + 2x^2 - x^3}{x + 1}$
- $\frac{4x^3 + 16x^2 - 23x - 15}{x + \frac{1}{2}}$
- $\frac{3x^3 - 4x^2 + 5}{x - \frac{3}{2}}$

En los Ejercicios 47-54, escriba la función en la forma $f(x) = (x - k)q(x) + r$ para el valor dado de k , y demuestre que $f(k) = r$.

47. $f(x) = x^3 - x^2 - 14x + 11$, $k = 4$
 48. $f(x) = x^3 - 5x^2 - 11x + 8$, $k = -2$
 49. $f(x) = 15x^4 + 10x^3 - 6x^2 + 14$, $k = -\frac{2}{3}$
 50. $f(x) = 10x^3 - 22x^2 - 3x + 4$, $k = \frac{1}{5}$
 51. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 14$, $k = \sqrt{2}$
 52. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 4$, $k = -\sqrt{5}$
 53. $f(x) = -4x^3 + 6x^2 + 12x + 4$, $k = 1 - \sqrt{3}$
 54. $f(x) = -3x^3 + 8x^2 + 10x - 8$, $k = 2 + \sqrt{2}$

En los Ejercicios 55-58, use el teorema del residuo y división sintética para hallar el valor de cada función. Verifique sus respuestas usando otro método.

55. $f(x) = 2x^3 - 7x + 3$
 (a) $f(1)$ (b) $f(-2)$ (c) $f(\frac{1}{2})$ (d) $f(2)$
 56. $g(x) = 2x^6 + 3x^4 - x^2 + 3$
 (a) $g(2)$ (b) $g(1)$ (c) $g(3)$ (d) $g(-1)$
 57. $h(x) = x^3 - 5x^2 - 7x + 4$
 (a) $h(3)$ (b) $h(2)$ (c) $h(-2)$ (d) $h(-5)$
 58. $f(x) = 4x^4 - 16x^3 + 7x^2 + 20$
 (a) $f(1)$ (b) $f(-2)$ (c) $f(5)$ (d) $f(-10)$

En los Ejercicios 59-66, use división sintética para demostrar que x es una solución de la ecuación de tercer grado con polinomios, y use el resultado para factorizar el polinomio completamente. Haga una lista de todas las soluciones reales de la ecuación.

59. $x^3 - 7x + 6 = 0$, $x = 2$
 60. $x^3 - 28x - 48 = 0$, $x = -4$
 61. $2x^3 - 15x^2 + 27x - 10 = 0$, $x = \frac{1}{2}$
 62. $48x^3 - 80x^2 + 41x - 6 = 0$, $x = \frac{2}{3}$
 63. $x^3 + 2x^2 - 3x - 6 = 0$, $x = \sqrt{3}$
 64. $x^3 + 2x^2 - 2x - 4 = 0$, $x = \sqrt{2}$
 65. $x^3 - 3x^2 + 2 = 0$, $x = 1 + \sqrt{3}$
 66. $x^3 - x^2 - 13x - 3 = 0$, $x = 2 - \sqrt{5}$

En los Ejercicios 67-74, (a) verifique los factores dados de la función f , (b) encuentre los factores restantes de f , (c) use sus resultados para escribir la factorización completa de f , (d) haga una lista de todos los ceros reales de f y (e) confirme sus resultados usando una calculadora de gráficas para graficar la función.

- | <i>Función</i> | <i>Factores</i> |
|------------------------------------|--------------------|
| 67. $f(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$ | $(x + 2), (x - 1)$ |
| 68. $f(x) = 3x^3 + 2x^2 - 19x + 6$ | $(x + 3), (x - 2)$ |
| 69. $f(x) = x^4 - 4x^3 - 15x^2$ | $(x - 5), (x + 4)$ |
| + $58x - 40$ | |

- | <i>Función</i> | <i>Factores</i> |
|--|----------------------------|
| 70. $f(x) = 8x^4 - 14x^3 - 71x^2 - 10x + 24$ | $(x + 2), (x - 4)$ |
| 71. $f(x) = 6x^3 + 41x^2 - 9x - 14$ | $(2x + 1), (3x - 2)$ |
| 72. $f(x) = 10x^3 - 11x^2 - 72x + 45$ | $(2x + 5), (5x - 3)$ |
| 73. $f(x) = 2x^3 - x^2 - 10x + 5$ | $(2x - 1), (x + \sqrt{5})$ |
| 74. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 48x - 144$ | $(x + 4\sqrt{3}), (x + 3)$ |



ANÁLISIS GRÁFICO En los Ejercicios 75-80, (a) use el comando *zero* o *root* de una calculadora de gráficas para aproximar los ceros de la función, con una precisión de tres lugares decimales, (b) determine uno de los ceros exactos, y (c) use división sintética para verificar su resultado del inciso (b), y luego factorice completamente el polinomio.

75. $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 10$
 76. $g(x) = x^3 - 4x^2 - 2x + 8$
 77. $h(t) = t^3 - 2t^2 - 7t + 2$
 78. $f(s) = s^3 - 12s^2 + 40s - 24$
 79. $h(x) = x^5 - 7x^4 + 10x^3 + 14x^2 - 24x$
 80. $g(x) = 6x^4 - 11x^3 - 51x^2 + 99x - 27$

En los Ejercicios 81-84, simplifique la expresión racional usando división larga o división sintética.

81. $\frac{4x^3 - 8x^2 + x + 3}{2x - 3}$ 82. $\frac{x^3 + x^2 - 64x - 64}{x + 8}$
 83. $\frac{x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x}{x^2 + 3x + 2}$
 84. $\frac{x^4 + 9x^3 - 5x^2 - 36x + 4}{x^2 - 4}$



ANÁLISIS DE DATOS: EDUCACIÓN SUPERIOR Las cantidades A (en miles de millones de dólares) donadas para sostener la educación superior en Estados Unidos, de 2000 a 2007, se dan en la tabla siguiente, donde t representa el año, con $t = 0$ correspondiente a 2000.

Año, t	Cantidad, A
0	23.2
1	24.2
2	23.9
3	23.9
4	24.4
5	25.6
6	28.0
7	29.8

- Use una calculadora de gráficas para crear una gráfica de dispersión de los datos.
- Use el comando *regression* de la calculadora de gráficas para hallar un modelo cúbico para los datos. Grafique el modelo en la misma pantalla que la gráfica de dispersión.
- Use el modelo para crear una tabla de valores estimados de A . Compare el modelo con los datos originales.
- Use división sintética para evaluar el modelo para el año 2010. Aun cuando el modelo sea relativamente preciso para estimar los datos dados, ¿lo usaría usted para predecir la cantidad donada para la educación superior en el futuro? Explique.



86. ANÁLISIS DE DATOS: SERVICIO MÉDICO Las cantidades A (en miles de millones de dólares) de gastos de servicio médico nacional en Estados Unidos, de 2000 a 2007, se ilustran en la tabla siguiente, donde t representa el año, con $t = 0$ correspondiente a 2000.



Año, t	Cantidad, A
0	30.5
1	32.2
2	34.2
3	38.0
4	42.7
5	47.9
6	52.7
7	57.6

- Use una calculadora de gráficas para crear una gráfica de dispersión de los datos.
- Use el comando *regression* de la calculadora de gráficas para hallar un modelo cúbico para los datos. Grafique el modelo en la misma pantalla que la gráfica de dispersión.
- Use el modelo para crear una tabla de valores estimados de A . Compare el modelo con los datos originales.
- Use división sintética para evaluar el modelo para el año 2010.

EXPLORACIÓN

¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 87-89, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

- Si $(7x + 4)$ es un factor de alguna función f polinomial, entonces $\frac{4}{7}$ es un cero de f .
- $(2x - 1)$ es un factor del polinomio $6x^6 + x^5 - 92x^4 + 45x^3 + 184x^2 + 4x - 48$.

89. La expresión racional

$$\frac{x^3 + 2x^2 - 13x + 10}{x^2 - 4x - 12}$$

es impropia.

- Use la forma $f(x) = (x - k)q(x) + r$ para crear una función cúbica que (a) pase por el punto $(2, 5)$ y suba por la derecha, y (b) pase por el punto $(-3, 1)$ y baje por la derecha. (Hay numerosas respuestas correctas.)

PIÉNSELO En los Ejercicios 91 y 92, realice la división suponiendo que n es un entero positivo.

$$91. \frac{x^{3n} + 9x^{2n} + 27x^n + 27}{x^n + 3} \quad 92. \frac{x^{3n} - 3x^{2n} + 5x^n - 6}{x^n - 2}$$

- ESCRITURA** Brevemente explique qué significa que un divisor se divida uniformemente en un dividendo.
- Brevemente explique cómo verificar una división con polinomios y justifique su razonamiento. Dé un ejemplo.

EXPLORACIÓN En los Ejercicios 95 y 96, encuentre la constante c tal que el denominador se divida uniformemente en el numerador.

$$95. \frac{x^3 + 4x^2 - 3x + c}{x - 5} \quad 96. \frac{x^5 - 2x^2 + x + c}{x + 2}$$

- PIÉNSELO** Encuentre el valor de k tal que $x - 4$ sea un factor de $x^3 - kx^2 + 2kx - 8$.
- PIÉNSELO** Encuentre el valor de k tal que $x - 3$ sea un factor de $x^3 - kx^2 + 2kx - 12$.
- ESCRITURA** Complete cada una de las divisiones con polinomios siguientes. Escriba una breve descripción de la forma que usted obtuvo y use su resultado para hallar una fórmula para la división con polinomios $(x^n - 1)/(x - 1)$. Genere un ejemplo numérico para probar su fórmula.

$$(a) \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \quad (b) \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \quad$$

$$(c) \frac{x^4 - 1}{x - 1} = \quad$$

100. TOQUE FINAL Considere la división

$$f(x) \div (x - k)$$

donde

$$f(x) = (x + 3)^2(x - 3)(x + 1)^3.$$

- ¿Cuál es el residuo cuando $k = -3$? Explique.
- Si es necesario hallar $f(2)$, ¿es más fácil evaluar la función directamente o usar división sintética? Explique.

2.4 NÚMEROS COMPLEJOS

Lo que debe aprender

- Usar la unidad imaginaria i para escribir números complejos.
- Sumar, restar y multiplicar números complejos.
- Usar conjugados complejos para escribir el cociente de dos números complejos en forma estándar.
- Hallar soluciones complejas de ecuaciones cuadráticas.

Por qué debe aprenderlo

El lector puede usar números complejos para modelar y resolver problemas de la vida real en electrónica. Por ejemplo, en el Ejercicio 89 de la página 165 aprenderá a usar números complejos para hallar la impedancia de un circuito eléctrico.



© Richard Megna/Fundamental Photographs

Unidad imaginaria i

Ya ha aprendido que algunas ecuaciones cuadráticas no tienen soluciones reales. Por ejemplo, la ecuación cuadrática $x^2 + 1 = 0$ no tiene solución real porque no hay número real x que pueda elevarse al cuadrado y producir -1 . Para superar esta deficiencia, los matemáticos crearon un sistema expandido de números usando la **unidad imaginaria i** , definida como

$$i = \sqrt{-1} \quad \text{Unidad imaginaria}$$

donde $i^2 = -1$. Al sumar números reales a múltiplos reales de esta unidad imaginaria, se obtiene el **conjunto de números complejos**. Cada número complejo se puede escribir en la **forma estándar $a + bi$** . Por ejemplo, la forma estándar para el número complejo $-5 + \sqrt{-9}$ es $-5 + 3i$ porque

$$-5 + \sqrt{-9} = -5 + \sqrt{3^2(-1)} = -5 + 3\sqrt{-1} = -5 + 3i.$$

En la forma estándar $a + bi$, el número real a se denomina **parte real** del **número complejo $a + bi$** , y el número bi (donde b es un número real) se llama **parte imaginaria** del número complejo.

Definición de un número complejo

Si a y b son números reales, el número $a + bi$ es un **número complejo** y se dice que está escrito en **forma estándar**. Si $b = 0$, el número $a + bi = a$ es un número real. Si $b \neq 0$, el número $a + bi$ se llama **número imaginario**. Un número de la forma bi , donde $b \neq 0$, se llama **número imaginario puro**.

El conjunto de los números reales es un subconjunto del conjunto de los números complejos, como se muestra en la Figura 2.30. Esto es cierto porque todo número real a se puede escribir como un número complejo usando $b = 0$. Esto es, para todo número real a , se puede escribir $a = a + 0i$.

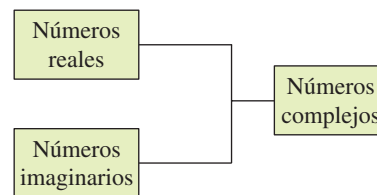


FIGURA 2.30

Igualdad de los números complejos

Dos números complejos $a + bi$ y $c + di$, escritos en forma estándar, son iguales entre sí

$$a + bi = c + di \quad \text{Igualdad de dos números complejos.}$$

si y sólo si $a = c$ y $b = d$.

Operaciones con números complejos

Para sumar (o restar) dos números complejos, se suman (o restan) por separado las partes real e imaginaria de los números.

Adición y sustracción de números complejos

Si $a + bi$ y $c + di$ son dos números complejos escritos en forma estándar, su suma y diferencia están definidas como sigue:

$$\text{Suma: } (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$\text{Diferencia: } (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

La **identidad aditiva** del sistema de los números complejos es cero (la misma que en el sistema de los números reales). Además, el **inverso aditivo** del número complejo $a + bi$ es

$$-(a + bi) = -a - bi. \quad \text{Inverso aditivo}$$

Entonces, tenemos

$$(a + bi) + (-a - bi) = 0 + 0i = 0.$$

Ejemplo 1 Sumar y restar números complejos

- a. $(4 + 7i) + (1 - 6i) = 4 + 7i + 1 - 6i$ Eliminar paréntesis.
 $= (4 + 1) + (7i - 6i)$ Agrupar términos semejantes.
 $= 5 + i$ Escribir en forma estándar.
- b. $(1 + 2i) - (4 + 2i) = 1 + 2i - 4 - 2i$ Eliminar paréntesis.
 $= (1 - 4) + (2i - 2i)$ Agrupar términos semejantes.
 $= -3 + 0$ Simplificar.
 $= -3$ Escribir en forma estándar.
- c. $3i - (-2 + 3i) - (2 + 5i) = 3i + 2 - 3i - 2 - 5i$
 $= (2 - 2) + (3i - 3i - 5i)$
 $= 0 - 5i$
 $= -5i$
- d. $(3 + 2i) + (4 - i) - (7 + i) = 3 + 2i + 4 - i - 7 - i$
 $= (3 + 4 - 7) + (2i - i - i)$
 $= 0 + 0i$
 $= 0$

PUNTO de repaso ➔ Ahora trate de hacer el Ejercicio 21.

Observe en los Ejemplos 1(b) y 1(d) que la suma de dos números complejos puede ser un número real.

Muchas de las propiedades de los números reales también son válidas para los números complejos. A continuación veamos algunos ejemplos.

Propiedades asociativas de la adición y la multiplicación

Propiedades conmutativas de la adición y la multiplicación

Propiedad distributiva de la multiplicación sobre la adición

Observe a continuación cómo se usan estas propiedades cuando se multiplican dos números complejos.

$$\begin{aligned}
 (a + bi)(c + di) &= a(c + di) + bi(c + di) && \text{Propiedad distributiva} \\
 &= ac + (ad)i + (bc)i + (bd)i^2 && \text{Propiedad distributiva} \\
 &= ac + (ad)i + (bc)i + (bd)(-1) && i^2 = -1 \\
 &= ac - bd + (ad)i + (bc)i && \text{Propiedad conmutativa} \\
 &= (ac - bd) + (ad + bc)i && \text{Propiedad asociativa}
 \end{aligned}$$

Más que tratar de memorizar esta regla de multiplicación, el lector debe simplemente recordar cómo se usa la propiedad distributiva para multiplicar dos números complejos.

Ejemplo 2 Multiplicar números complejos

Tip de estudio

El procedimiento descrito líneas antes es semejante a multiplicar dos polinomios y combinar términos semejantes, como en el método FOIL que se ve en el Apéndice A.3. Por ejemplo, se puede usar el método FOIL para multiplicar dos números complejos del Ejemplo 2(b).

$$\begin{array}{c} \text{F} \quad \text{O} \quad \text{I} \quad \text{L} \\ (2 - i)(4 + 3i) = 8 + 6i - 4i - 3i^2 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \text{a. } 4(-2 + 3i) &= 4(-2) + 4(3i) && \text{Propiedad distributiva} \\
 &= -8 + 12i && \text{Simplificar.} \\
 \text{b. } (2 - i)(4 + 3i) &= 2(4 + 3i) - i(4 + 3i) && \text{Propiedad distributiva} \\
 &= 8 + 6i - 4i - 3i^2 && \text{Propiedad distributiva} \\
 &= 8 + 6i - 4i - 3(-1) && i^2 = -1 \\
 &= (8 + 3) + (6i - 4i) && \text{Agrupar términos semejantes.} \\
 &= 11 + 2i && \text{Escribir en forma estándar.} \\
 \text{c. } (3 + 2i)(3 - 2i) &= 3(3 - 2i) + 2i(3 - 2i) && \text{Propiedad distributiva} \\
 &= 9 - 6i + 6i - 4i^2 && \text{Propiedad distributiva} \\
 &= 9 - 6i + 6i - 4(-1) && i^2 = -1 \\
 &= 9 + 4 && \text{Simplificar.} \\
 &= 13 && \text{Escribir en forma estándar.} \\
 \text{d. } (3 + 2i)^2 &= (3 + 2i)(3 + 2i) && \text{Cuadrado de un binomio} \\
 &= 3(3 + 2i) + 2i(3 + 2i) && \text{Propiedad distributiva} \\
 &= 9 + 6i + 6i + 4i^2 && \text{Propiedad distributiva} \\
 &= 9 + 6i + 6i + 4(-1) && i^2 = -1 \\
 &= 9 + 12i - 4 && \text{Simplificar.} \\
 &= 5 + 12i && \text{Escribir en forma estándar.}
 \end{aligned}$$

PUNTO de repaso ➔ Ahora trate de hacer el Ejercicio 31.

Conjugados complejos

Observe en el Ejemplo 2(c) que el producto de dos números complejos puede ser un número real. Esto ocurre con pares de números complejos de la forma $a + bi$ y $a - bi$, llamados **conjugados complejos**.

$$\begin{aligned}(a + bi)(a - bi) &= a^2 - abi + abi - b^2i^2 \\ &= a^2 - b^2(-1) \\ &= a^2 + b^2\end{aligned}$$

Ayuda de álgebra

En el Apéndice A.2 se pueden comparar conjugados complejos con el método para racionalizar denominadores.

Ejemplo 3 Multiplicar conjugados

Multiplique cada número complejo por su conjugado complejo.

- a. $1 + i$ b. $4 - 3i$

Solución

- a. El conjugado complejo de $1 + i$ es $1 - i$.

$$(1 + i)(1 - i) = 1^2 - i^2 = 1 - (-1) = 2$$

- b. El conjugado complejo de $4 - 3i$ es $4 + 3i$.

$$(4 - 3i)(4 + 3i) = 4^2 - (3i)^2 = 16 - 9i^2 = 16 - 9(-1) = 25$$

PUNTO de repaso ➔ Ahora trate de hacer el Ejercicio 41.

Para escribir el cociente de $a + bi$ y $c + di$ en forma estándar, donde c y d no son cero ambas, multiplique el numerador y denominador por el conjugado complejo del denominador para obtener

$$\begin{aligned}\frac{a + bi}{c + di} &= \frac{a + bi}{c + di} \left(\frac{c - di}{c - di} \right) \\ &= \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}.\end{aligned}$$

Forma estándar

Ejemplo 4 Escribir un cociente de números complejos en forma estándar

$$\begin{aligned}\frac{2 + 3i}{4 - 2i} &= \frac{2 + 3i}{4 - 2i} \left(\frac{4 + 2i}{4 + 2i} \right) \\ &= \frac{8 + 4i + 12i + 6i^2}{16 - 4i^2}\end{aligned}$$

Multiplicar numerador y denominador por el conjugado complejo del denominador.

$$= \frac{8 - 6 + 16i}{16 + 4}$$

Expandir.

$$i^2 = -1$$

$$= \frac{2 + 16i}{20}$$

Simplificar.

$$= \frac{1}{10} + \frac{4}{5}i$$

Escribir en forma estándar.

PUNTO de repaso ➔ Ahora trate de hacer el Ejercicio 53.

Tip de estudio

Observe que cuando se multiplican el numerador y el denominador de un cociente de números complejos por

$$\frac{c - di}{c - di}$$

en realidad se está multiplicando el cociente por una forma de 1. No se está cambiando la expresión original, sino que sólo se crea una expresión equivalente a la original.

Ayuda de álgebra

En el Apéndice A.5 se pueden repasar las técnicas para usar la fórmula cuadrática.

ATENCIÓN

La definición de raíz cuadrada principal usa la regla

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$$

para $a > 0$ y $b < 0$. Esta regla no es válida si *tanto a como b* son negativas. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}\sqrt{-5}\sqrt{-5} &= \sqrt{5(-1)}\sqrt{5(-1)} \\ &= \sqrt{5i}\sqrt{5i} \\ &= \sqrt{25i^2} \\ &= 5i^2 = -5\end{aligned}$$

mientras que

$$\sqrt{(-5)(-5)} = \sqrt{25} = 5.$$

Para evitar problemas con raíces cuadradas de números negativos, asegúrese de convertir números complejos a forma estándar *antes* de multiplicar.

Soluciones complejas de ecuaciones cuadráticas

Cuando se usa la fórmula cuadrática para resolver una ecuación cuadrática, a veces se obtiene un resultado como $\sqrt{-3}$, que sabemos no es un número real. Al factorizar $i = \sqrt{-1}$, se puede escribir este número en forma estándar.

$$\sqrt{-3} = \sqrt{3(-1)} = \sqrt{3}\sqrt{-1} = \sqrt{3}i$$

El número $\sqrt{3}i$ se llama *raíz cuadrada principal* de -3 .

Raíz cuadrada principal de un número negativo

Si a es un número positivo, la **raíz cuadrada principal** del número negativo $-a$ está definida como

$$\sqrt{-a} = \sqrt{a}i.$$

Ejemplo 5 Escribir números complejos en forma estándar

- a. $\sqrt{-3}\sqrt{-12} = \sqrt{3}i\sqrt{12}i = \sqrt{36}i^2 = 6(-1) = -6$
 b. $\sqrt{-48} - \sqrt{-27} = \sqrt{48}i - \sqrt{27}i = 4\sqrt{3}i - 3\sqrt{3}i = \sqrt{3}i$
 c. $(-1 + \sqrt{-3})^2 = (-1 + \sqrt{3}i)^2$
 $= (-1)^2 - 2\sqrt{3}i + (\sqrt{3})^2(i^2)$
 $= 1 - 2\sqrt{3}i + 3(-1)$
 $= -2 - 2\sqrt{3}i$

PUNTO de repaso ➔ Ahora trate de hacer el Ejercicio 63.

Ejemplo 6 Soluciones complejas de una ecuación cuadrática

Resuelva (a) $x^2 + 4 = 0$ y (b) $3x^2 - 2x + 5 = 0$.

Solución

a. $x^2 + 4 = 0$

$$x^2 = -4$$

$$x = \pm 2i$$

b. $3x^2 - 2x + 5 = 0$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(3)(5)}}{2(3)}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{-56}}{6}$$

$$= \frac{2 \pm 2\sqrt{14}i}{6}$$

$$= \frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{14}}{3}i$$

Escribir la ecuación original.

Restar 4 de cada lado.

Extraer raíces cuadradas.

Escribir ecuación original.

Fórmula cuadrática.

Simplificar.

Escribir $\sqrt{-56}$ en forma estándar.

Escribir en forma estándar.

PUNTO de repaso ➔ Ahora trate de hacer el Ejercicio 69.

2.4 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

VOCABULARIO

1. Relacione el tipo de número complejo con su definición.

- (a) Número real (i) $a + bi$, $a \neq 0$, $b \neq 0$
 (b) Número imaginario (ii) $a + bi$, $a = 0$, $b \neq 0$
 (c) Número imaginario puro (iii) $a + bi$, $b = 0$

En los Ejercicios 2-4, llene los espacios en blanco.

2. La unidad imaginaria i está definida como $i =$ _____, donde $i^2 =$ _____.
 3. Si a es un número positivo, la raíz _____ del número negativo $-a$ está definida como $\sqrt{-a} = \sqrt{a}i$.
 4. Los números $a + bi$ y $a - bi$ se denominan _____, y su producto es un número real $a^2 + b^2$.

HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 5-8, encuentre los números reales a y b tales que la ecuación sea verdadera.

5. $a + bi = -12 + 7i$ 6. $a + bi = 13 + 4i$
 7. $(a - 1) + (b + 3)i = 5 + 8i$
 8. $(a + 6) + 2bi = 6 - 5i$

En los Ejercicios 9-20, escriba el número complejo en forma estándar.

9. $8 + \sqrt{-25}$ 10. $5 + \sqrt{-36}$
 11. $2 - \sqrt{-27}$ 12. $1 + \sqrt{-8}$
 13. $\sqrt{-80}$ 14. $\sqrt{-4}$
 15. 14 16. 75
 17. $-10i + i^2$ 18. $-4i^2 + 2i$
 19. $\sqrt{-0.09}$ 20. $\sqrt{-0.0049}$

En los Ejercicios 21-30, realice la suma o resta y escriba el resultado en forma estándar.

21. $(7 + i) + (3 - 4i)$ 22. $(13 - 2i) + (-5 + 6i)$
 23. $(9 - i) - (8 - i)$ 24. $(3 + 2i) - (6 + 13i)$
 25. $(-2 + \sqrt{-8}) + (5 - \sqrt{-50})$
 26. $(8 + \sqrt{-18}) - (4 + 3\sqrt{2}i)$
 27. $13i - (14 - 7i)$
 28. $25 + (-10 + 11i) + 15i$
 29. $-(\frac{3}{2} + \frac{5}{2}i) + (\frac{5}{3} + \frac{11}{3}i)$
 30. $(1.6 + 3.2i) + (-5.8 + 4.3i)$

En los Ejercicios 31-40, realice la operación y escriba el resultado en forma estándar.

31. $(1 + i)(3 - 2i)$ 32. $(7 - 2i)(3 - 5i)$
 33. $12i(1 - 9i)$ 34. $-8i(9 + 4i)$
 35. $(\sqrt{14} + \sqrt{10}i)(\sqrt{14} - \sqrt{10}i)$
 36. $(\sqrt{3} + \sqrt{15}i)(\sqrt{3} - \sqrt{15}i)$

37. $(6 + 7i)^2$ 38. $(5 - 4i)^2$
 39. $(2 + 3i)^2 + (2 - 3i)^2$ 40. $(1 - 2i)^2 - (1 + 2i)^2$

En los Ejercicios 41-48, escriba el conjugado complejo del número complejo. A continuación multiplique el número por su conjugado complejo.

41. $9 + 2i$ 42. $8 - 10i$
 43. $-1 - \sqrt{5}i$ 44. $-3 + \sqrt{2}i$
 45. $\sqrt{-20}$ 46. $\sqrt{-15}$
 47. $\sqrt{6}$ 48. $1 + \sqrt{8}$

En los Ejercicios 49-58, escriba el cociente en forma estándar.

49. $\frac{3}{i}$ 50. $-\frac{14}{2i}$
 51. $\frac{2}{4 - 5i}$ 52. $\frac{13}{1 - i}$
 53. $\frac{5 + i}{5 - i}$ 54. $\frac{6 - 7i}{1 - 2i}$
 55. $\frac{9 - 4i}{i}$ 56. $\frac{8 + 16i}{2i}$
 57. $\frac{3i}{(4 - 5i)^2}$ 58. $\frac{5i}{(2 + 3i)^2}$

En los Ejercicios 59-62, realice la operación y escriba el resultado en forma estándar.

59. $\frac{2}{1 + i} - \frac{3}{1 - i}$
 60. $\frac{2i}{2 + i} + \frac{5}{2 - i}$
 61. $\frac{i}{3 - 2i} + \frac{2i}{3 + 8i}$
 62. $\frac{1 + i}{i} - \frac{3}{4 - i}$

En los Ejercicios 63-68, escriba el número complejo en forma estándar.

63. $\sqrt{-6} \cdot \sqrt{-2}$

64. $\sqrt{-5} \cdot \sqrt{-10}$

65. $(\sqrt{-15})^2$

66. $(\sqrt{-75})^2$

67. $(3 + \sqrt{-5})(7 - \sqrt{-10})$

68. $(2 - \sqrt{-6})^2$

En los Ejercicios 69-78, use la fórmula cuadrática para resolver la ecuación cuadrática.

69. $x^2 - 2x + 2 = 0$

70. $x^2 + 6x + 10 = 0$

71. $4x^2 + 16x + 17 = 0$

72. $9x^2 - 6x + 37 = 0$

73. $4x^2 + 16x + 15 = 0$

74. $16t^2 - 4t + 3 = 0$

75. $\frac{3}{2}x^2 - 6x + 9 = 0$

76. $\frac{7}{8}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{5}{16} = 0$

77. $1.4x^2 - 2x - 10 = 0$

78. $4.5x^2 - 3x + 12 = 0$

En los Ejercicios 79-88, simplifique el número complejo y escríbalo en forma estándar.

79. $-6i^3 + i^2$

80. $4i^2 - 2i^3$

81. $-14i^5$

82. $(-i)^3$

83. $(\sqrt{-72})^3$

84. $(\sqrt{-2})^6$

85. $\frac{1}{i^3}$

86. $\frac{1}{(2i)^3}$

87. $(3i)^4$

88. $(-i)^6$

89. IMPEDANCIA La oposición a la corriente en un circuito eléctrico se llama impedancia. La impedancia z en un circuito paralelo con dos trayectorias satisface la ecuación

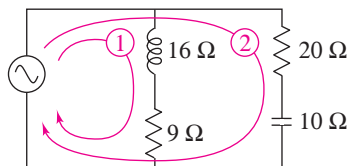
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}$$

donde z_1 es la impedancia (en ohms) de la trayectoria 1 y z_2 es la impedancia de la trayectoria 2.

(a) La impedancia de cada trayectoria en un circuito paralelo se encuentra al sumar las impedancias de todos los componentes en la trayectoria. Use la tabla para hallar z_1 y z_2 .

(b) Encuentre la impedancia z .

	Resistor	Inductor	Condensador
Símbolo			
Impedancia	a	bi	$-ci$



90. Eleve al cubo cada uno de los números complejos siguientes.

(a) 2 (b) $-1 + \sqrt{3}i$ (c) $-1 - \sqrt{3}i$

91. Eleve a la cuarta potencia cada uno de los números complejos.

(a) 2 (b) -2 (c) $2i$ (d) $-2i$

92. Escriba cada una de las potencias de i como i , $-i$, 1 o -1 .

(a) i^{40} (b) i^{25} (c) i^{50} (d) i^{67}

EXPLORACIÓN

¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 93-96, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

93. No hay número complejo que sea igual a su conjugado complejo.

94. $-i\sqrt{6}$ es una solución de $x^4 - x^2 + 14 = 56$.

95. $i^{44} + i^{150} - i^{74} - i^{109} + i^{61} = -1$

96. La suma de dos números complejos es siempre un número real.

97. RECONOCIMIENTO DE UN PATRÓN Complete lo siguiente.

$i^1 = i$ $i^2 = -1$ $i^3 = -i$ $i^4 = 1$

$i^5 = \square$ $i^6 = \square$ $i^7 = \square$ $i^8 = \square$

$i^9 = \square$ $i^{10} = \square$ $i^{11} = \square$ $i^{12} = \square$

¿Qué patrón observa? Escriba una breve descripción de cómo encontraría i elevada a cualquier potencia entera positiva.

98. TOQUE FINAL Considere las funciones

$f(x) = 2(x - 3)^2 - 4$ y $g(x) = -2(x - 3)^2 - 4$.

(a) Sin graficar ninguna función, determine si la gráfica de f y la de g tienen intersecciones con el eje x . Explique su razonamiento.

(b) Resuelva $f(x) = 0$ y $g(x) = 0$.

(c) Explique la forma en que los ceros de f y g están relacionados si sus gráficas tienen intersecciones con el eje x .

(d) Para la función $f(x) = a(x - h)^2 + k$, haga un enunciado general acerca de la forma en que a , h y k afectan si la gráfica de f tiene intersecciones con el eje x , y si los ceros de f son reales o complejos.

99. ANÁLISIS DE ERROR Describa el error.

~~$$\sqrt{-6}\sqrt{-6} = \sqrt{(-6)(-6)} = \sqrt{36} = 6$$~~

100. DEMOSTRACIÓN Demuestre que el conjugado complejo del producto de dos números complejos $a_1 + b_1i$ y $a_2 + b_2i$ es el producto de sus conjugados complejos.

101. DEMOSTRACIÓN Demuestre que el conjugado complejo de la suma de dos números complejos $a_1 + b_1i$ y $a_2 + b_2i$ es la suma de sus conjugados complejos.

2.5 CEROS DE FUNCIONES POLINOMIALES

Lo que debe aprender

- Usar el teorema fundamental del álgebra para determinar el número de ceros de funciones polinomiales.
- Hallar ceros racionales de funciones polinomiales.
- Hallar pares conjugados de ceros complejos.
- Hallar ceros de polinomios por factorización.
- Use la regla de los signos de Descartes y las reglas de límite superior e inferior para hallar ceros de polinomios.

Por qué debe aprenderlo

Hallar ceros de funciones polinomiales es una parte importante de resolver problemas de la vida real. Por ejemplo, en el Ejercicio 120 de la página 179 los ceros de una función polinomial puede ayudarnos a analizar la asistencia a juegos de baloncesto colegial para mujeres.

Tip de estudio

Recuerde que para hallar los ceros de una función $f(x)$, iguale $f(x)$ a 0 y de la ecuación resultante despeje x . Por ejemplo, la función del Ejemplo 1(a) tiene un cero en $x = 2$ porque

$$\begin{aligned}x - 2 &= 0 \\x &= 2.\end{aligned}$$

Ayuda de álgebra

Los Ejemplos 1(b), 1(c) y 1(d) comprenden factorización de polinomios. En el Apéndice A.3, el lector puede repasar las técnicas para factorizar polinomios.

Teorema fundamental del álgebra

Ya sabemos que un polinomio de grado n puede tener como máximo n ceros reales. En el sistema de números complejos, este enunciado se puede mejorar. Esto es, en el sistema de números complejos toda función polinomial de grado n tiene *precisamente* n ceros. Este importante resultado se deriva del **teorema fundamental del álgebra**, propuesto primeramente por el matemático alemán Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

Teorema fundamental del álgebra

Si $f(x)$ es un polinomio de grado n , donde $n > 0$, entonces f tiene al menos un cero en el sistema de números complejos.

Con el uso del teorema fundamental del álgebra y la equivalencia de ceros y factores, se obtiene el **teorema de factorización lineal**.

Teorema de factorización lineal

Si $f(x)$ es un polinomio de grado n , donde $n > 0$, entonces f tiene precisamente n factores lineales

$$f(x) = a_n(x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_n)$$

donde $c_1, c_2, \dots, c_n$ son números complejos.

Para una demostración del teorema de factorización lineal, vea la página 212.

Observe que el teorema fundamental del álgebra y el teorema de factorización lineal sólo nos dicen que los ceros o factores de un polinomio existen, no cómo hallarlos. Estos teoremas reciben el nombre de *teoremas de existencia*. Recuerde que los n ceros de una función polinomial pueden ser reales o complejos, y pueden estar repetidos.

Ejemplo 1 Ceros de funciones polinomiales

- El polinomio de primer grado $f(x) = x - 2$ tiene exactamente *un* cero: $x = 2$.
- Contando multiplicidad, la función polinomial de segundo grado

$$f(x) = x^2 - 6x + 9 = (x - 3)(x - 3)$$

tiene exactamente *dos* ceros: $x = 3$ y $x = 3$. (Esto se llama un *cero repetido*.)

- La función polinomial de tercer grado

$$f(x) = x^3 + 4x = x(x^2 + 4) = x(x - 2i)(x + 2i)$$

tiene exactamente *tres* ceros: $x = 0$, $x = 2i$ y $x = -2i$.

- La función polinomial de cuarto grado

$$f(x) = x^4 - 1 = (x - 1)(x + 1)(x - i)(x + i)$$

tiene exactamente cuatro ceros: $x = 1$, $x = -1$, $x = i$ y $x = -i$.

PUNTO de repaso ➔ Ahora trate de hacer el Ejercicio 9.

Prueba del cero racional

La **prueba del cero racional** relaciona los posibles ceros racionales de un polinomio (que tenga coeficientes enteros) con su coeficiente principal y con su término constante.

NOTA HISTÓRICA

Fogg Art Museum/Harvard University



Aun cuando no fueron contemporáneos, Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783) trabajó independientemente de Carl Gauss para tratar de demostrar el teorema fundamental del álgebra. Su trabajo fue tal que, en Francia, ese teorema frecuentemente se conoce como teorema d'Alembert.

Prueba del cero racional

Si el polinomio $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ tiene coeficientes *enteros*, todo cero racional de f tiene la forma

$$\text{cero racional} = \frac{p}{q}$$

donde p y q no tienen factores comunes que no sea 1, y

p = un factor del término constante a_0

q = un factor del coeficiente principal a_n .

Para usar la prueba del cero racional, primero se debe hacer una lista de todos los números racionales cuyos numeradores sean factores del término constante y cuyos denominadores sean factores del coeficiente principal.

$$\text{Posibles ceros racionales} = \frac{\text{factores del término constante}}{\text{factores del coeficiente principal}}$$

Habiendo formado esta lista de *posibles ceros racionales*, use un método de prueba y error para determinar cuáles, si los hay, son ceros reales del polinomio. Observe que cuando el coeficiente principal es 1, los posibles ceros racionales son simplemente factores del término constante.

Ejemplo 2 Prueba del cero racional con coeficiente principal de 1

Encuentre los ceros racionales de

$$f(x) = x^3 + x + 1.$$

Solución

Como el coeficiente principal es 1, los posibles ceros racionales son ± 1 , los factores del término constante. Al probar estos posibles ceros, se puede ver que ninguno funciona.

$$\begin{aligned} f(1) &= (1)^3 + 1 + 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(-1) &= (-1)^3 + (-1) + 1 \\ &= -1 \end{aligned}$$

Por tanto, se puede concluir que el polinomio dado *no tiene* ceros racionales. Observe de la gráfica de f de la Figura 2.31 que f tiene un cero real entre -1 y 0 . No obstante, por la prueba del cero racional, sabemos que este cero real *no es* un número racional.

PUNTO de repaso Ahora trate de hacer el Ejercicio 15.

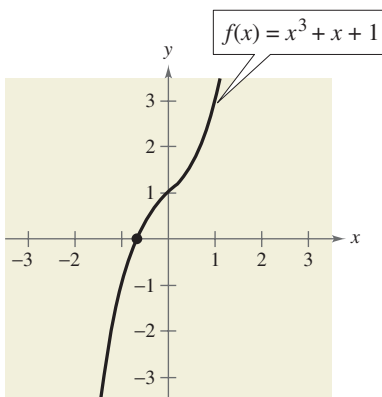


FIGURA 2.31

Tip de estudio

Cuando la lista de posibles ceros racionales sea pequeña, como en el Ejemplo 2, puede ser más rápido probar los ceros al evaluar la función. Cuando la lista de posibles ceros racionales sea grande, como en el Ejemplo 3, puede ser más rápido usar un método diferente para probar los ceros; por ejemplo, usar división sintética o trazar la gráfica.

Ayuda de álgebra

En la Sección 2.3 se pueden repasar las técnicas para división sintética.

Ejemplo 3 Prueba del cero racional con coeficiente principal de 1

Encuentre los ceros racionales de $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 3x - 6$.

Solución

Como el coeficiente principal es 1, los posibles ceros racionales son los factores del término constante.

Posibles ceros racionales $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

Al aplicar sucesivamente la división sintética, es posible determinar que $x = -1$ y $x = 2$ son los únicos dos ceros racionales.

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & -1 & 1 & -3 & -6 \\ & & -1 & 2 & -3 & 6 \\ \hline & 1 & -2 & 3 & -6 & 0 \end{array} \quad \text{residuo 0, entonces } x = -1 \text{ es un cero.}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -2 & 3 & -6 \\ & & 2 & 0 & 6 \\ \hline & 1 & 0 & 3 & 0 \end{array} \quad \text{residuo 0, entonces } x = 2 \text{ es un cero.}$$

Por tanto, $f(x)$ se factoriza como

$$f(x) = (x + 1)(x - 2)(x^2 + 3).$$

Como el factor $(x^2 + 3)$ no produce ceros reales, se puede concluir que $x = -1$ y $x = 2$ son los únicos ceros *reales* de f , lo cual se verifica en la Figura 2.32.

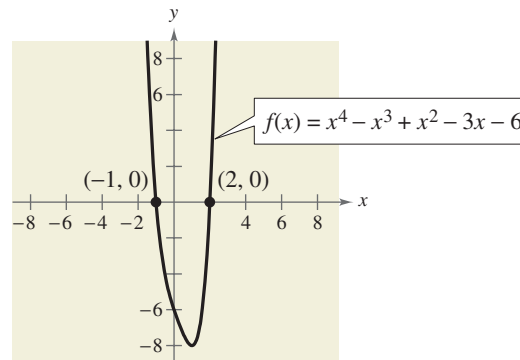


FIGURA 2.32

PUNTO de repaso Ahora trate de hacer el Ejercicio 19.

Si el coeficiente principal de un polinomio no es 1, la lista de posibles ceros racionales puede aumentar considerablemente. En tales casos, la búsqueda se puede acortar de varias formas: (1) usar una calculadora programable para agilizar los cálculos; (2) una gráfica, trazada ya sea manualmente o con una calculadora de gráficas, puede dar una buena estimación de la ubicación de los ceros; (3) el teorema del valor intermedio junto con una tabla generada por una calculadora de gráficas puede dar aproximaciones de ceros; y (4) la división sintética puede usarse para probar los posibles ceros racionales.

Hallar el primer cero es a veces la parte más difícil. Después de eso, la búsqueda se simplifica al trabajar con el polinomio de grado más bajo obtenido mediante la división sintética, como se muestra en el Ejemplo 3.

Tip de estudio

Recuerde que cuando usted trate de hallar los ceros racionales de una función polinomial con numerosos ceros racionales posibles, como en el Ejemplo 4, debe usar prueba y error. No hay un método algebraico rápido para determinar cuál de las posibilidades es un cero real, pero trazar una gráfica puede ser útil.

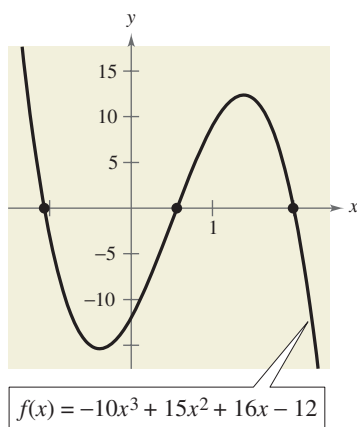


FIGURA 2.33

Ayuda de álgebra

En el Apéndice A.5 se pueden repasar las técnicas para usar la fórmula cuadrática.

Ejemplo 4 Uso de la prueba del cero racional

Encuentre los ceros racionales de $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$.

Solución

El coeficiente principal es 2 y el término constante es 3.

$$\text{Posibles ceros racionales: } \frac{\text{Factores de 3}}{\text{Factores de 2}} = \frac{\pm 1, \pm 3}{\pm 1, \pm 2} = \pm 1, \pm 3, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}$$

Por división sintética se puede determinar que $x = 1$ es un cero racional.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & 3 & -8 & 3 \\ & & 2 & 5 & -3 \\ \hline & 2 & 5 & -3 & 0 \end{array}$$

Por tanto, $f(x)$ se factoriza como

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - 1)(2x^2 + 5x - 3) \\ &= (x - 1)(2x - 1)(x + 3) \end{aligned}$$

y se concluye que los ceros racionales de f son $x = 1$, $x = \frac{1}{2}$ y $x = -3$.

PUNTO de repaso → Ahora trate de hacer el Ejercicio 25.

Recuerde de la Sección 2.2 que si $x = a$ es un cero de la función polinomial f , entonces $x = a$ es una solución de la ecuación con polinomios $f(x) = 0$.

Ejemplo 5 Resolver una ecuación polinomial

Encuentre todas las soluciones reales de $-10x^3 + 15x^2 + 16x - 12 = 0$.

Solución

El coeficiente principal es -10 y el término constante es -12 .

$$\text{Posibles soluciones racionales } \frac{\text{Factores de } -12}{\text{Factores de } -10} = \frac{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12}{\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10}$$

Con tantas posibilidades (32, de hecho), merece la pena detenerse y trazar una gráfica. De la Figura 2.33, parece que tres soluciones razonables serían $x = -\frac{6}{5}$, $x = \frac{1}{2}$ y $x = 2$. Probarlas por división sintética demuestra que $x = 2$ es la única solución racional. Por tanto, tenemos

$$(x - 2)(-10x^2 - 5x + 6) = 0.$$

Usando la fórmula cuadrática para el segundo factor, se encuentra que las dos soluciones adicionales son números irracionales.

$$x = \frac{-5 - \sqrt{265}}{20} \approx -1.0639$$

y

$$x = \frac{-5 + \sqrt{265}}{20} \approx 0.5639$$

PUNTO de repaso → Ahora trate de hacer el Ejercicio 31.

Pares conjugados

En los Ejemplos 1(c) y 1(d), observe que los pares de ceros complejos son **conjugados**. Esto es, son de la forma $a + bi$ y $a - bi$.

Los ceros complejos se presentan en pares conjugados

Sea $f(x)$ una función polinomial que tiene coeficientes reales. Si $a + bi$, donde $b \neq 0$, es un cero de la función, el conjugado $a - bi$ también es un cero de la función.

Asegúrese de ver que este resultado sea verdadero sólo si la función polinomial tiene coeficientes reales. Por ejemplo, el resultado se aplica a la función dada por $f(x) = x^2 + 1$, pero no a la función dada por $g(x) = x - i$.

Ejemplo 6 Hallar un polinomio con ceros dados

Encuentre una función polinomial de cuarto grado con coeficientes reales que tiene -1 , -1 y $3i$ como sus ceros.

Solución

Como $3i$ es un cero y además se indica que el polinomio tiene coeficientes reales, sabemos que el conjugado $-3i$ también debe ser un cero. Por tanto, del teorema de factorización lineal, $f(x)$ se puede escribir como

$$f(x) = a(x + 1)(x + 1)(x - 3i)(x + 3i).$$

Para mayor sencillez, sea $a = 1$ para obtener

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 + 2x + 1)(x^2 + 9) \\ &= x^4 + 2x^3 + 10x^2 + 18x + 9. \end{aligned}$$

PUNTO de repaso ➔ Ahora trate de hacer el Ejercicio 45.

Factorización de un polinomio

El teorema de factorización lineal muestra que se puede escribir cualquier polinomio de n -ésimo grado como el producto de n factores lineales.

$$f(x) = a_n(x - c_1)(x - c_2)(x - c_3) \cdots (x - c_n)$$

No obstante, este resultado incluye la posibilidad de que algunos de los valores de c_i sean complejos. El siguiente teorema dice que incluso si no deseamos trabajar con “factores complejos,” todavía se puede escribir $f(x)$ como el producto de factores lineales y cuadráticos, o ambos. Para una demostración de este teorema, vea Demostraciones en matemáticas en la página 212.

Factores de un polinomio

Todo polinomio de grado $n > 0$ con coeficientes reales se puede escribir como el producto de factores lineales y cuadráticos con coeficientes reales, donde los factores cuadráticos no tienen ceros reales.

Se dice que un factor cuadrático con ceros reales es *primo* o **irreducible en los reales**. Asegúrese de ver que esto no es igual a ser *irreducible en los racionales*. Por ejemplo, la expresión cuadrática $x^2 + 1 = (x - i)(x + i)$ es irreducible en los reales (y, por consiguiente, en los racionales). Por otra parte, la expresión cuadrática $x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$ es irreducible en los racionales pero reducible en los reales.

Ejemplo 7 Hallar los ceros de una función polinomial

Encuentre todos los ceros de $f(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 + 2x - 60$ dado que $1 + 3i$ es cero de f .

Solución algebraica

Como los ceros complejos se presentan en pares conjugados, sabemos que $1 - 3i$ también es cero de f . Esto significa que los siguientes

$$[x - (1 + 3i)] \quad \text{y} \quad [x - (1 - 3i)]$$

son factores de f . Al multiplicar estos dos factores resulta:

$$\begin{aligned} [x - (1 + 3i)][x - (1 - 3i)] &= [(x - 1) - 3i][(x - 1) + 3i] \\ &= (x - 1)^2 - 9i^2 \\ &= x^2 - 2x + 10. \end{aligned}$$

Usando división larga se puede dividir $x^2 - 2x + 10$ en f para obtener lo siguiente.

$$\begin{array}{r} x^2 - 2x + 10 \overline{) x^4 - 3x^3 + 6x^2 + 2x - 60} \\ \underline{x^4 - 2x^3 + 10x^2} \\ -x^3 - 4x^2 + 2x \\ \underline{-x^3 + 2x^2 - 10x} \\ -6x^2 + 12x - 60 \\ \underline{-6x^2 + 12x - 60} \\ 0 \end{array}$$

Por tanto, tenemos

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 2x + 10)(x^2 - x - 6) \\ &= (x^2 - 2x + 10)(x - 3)(x + 2) \end{aligned}$$

y podemos concluir que los ceros de f son $x = 1 + 3i$, $x = 1 - 3i$, $x = 3$ y $x = -2$.

PUNTO de repaso ➡ Ahora trate de hacer el Ejercicio 55.

Ayuda de álgebra

En la Sección 2.3 se pueden repasar las técnicas para división larga con polinomios.

En el Ejemplo 7, si no nos dijeran que $1 + 3i$ es un cero de f , aún podríamos hallar todos los ceros de la función mediante división sintética para determinar los ceros reales -2 y 3 . Así, podríamos factorizar el polinomio como $(x + 2)(x - 3)(x^2 - 2x + 10)$. Finalmente, con el uso de la fórmula cuadrática, podríamos determinar que los ceros son $x = -2$, $x = 3$, $x = 1 + 3i$ y $x = 1 - 3i$.

Solución gráfica

Como los ceros complejos siempre se presentan en pares conjugados, sabemos que $1 - 3i$ también es un cero de f . Como el polinomio es de cuarto grado, sabemos que como máximo hay otros dos ceros de la función. Use una calculadora de gráficas para graficar

$$y = x^4 - 3x^3 + 6x^2 + 2x - 60$$

como se ve en la Figura 2.34.

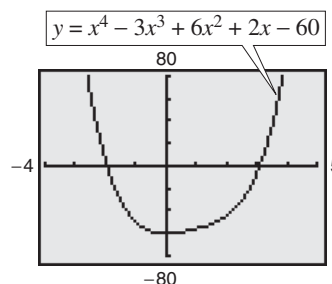


FIGURA 2.34

Se puede ver que -2 y 3 parecen ser ceros de la gráfica de la función. Use el comando *zero* o *root* o los comandos *zoom* y *trace* de la calculadora para confirmar que $x = -2$ y $x = 3$ son ceros de la gráfica. Por tanto, se puede concluir que los ceros de f son $x = 1 + 3i$, $x = 1 - 3i$, $x = 3$ y $x = -2$.

Tip de estudio

En el Ejemplo 8, la función polinomial de quinto grado tiene tres ceros reales. En tales casos, se pueden usar los comandos *zoom* y *trace* o el comando *zero* o *root* de una calculadora de gráficas para aproximar los ceros reales. También se pueden usar estos ceros reales para determinar algebraicamente los ceros complejos.

El Ejemplo 8 muestra la forma de hallar todos los ceros de una función polinomial, incluidos los ceros complejos.

Ejemplo 8 Hallar los ceros de una función polinomial

Escriba $f(x) = x^5 + x^3 + 2x^2 - 12x + 8$ como el producto de factores lineales y haga una lista de todos sus ceros.

Solución

Los posibles ceros racionales son $\pm 1, \pm 2, \pm 4$ y ± 8 . La división sintética produce lo siguiente.

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & -12 & 8 \\ & & 1 & 1 & 2 & 4 & -8 \\ \hline & 1 & 1 & 2 & 4 & -8 & 0 \end{array} \quad \longrightarrow \quad 1 \text{ es un cero.}$$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -2 & 1 & 1 & 2 & 4 & -8 \\ & & -2 & 2 & -8 & 8 \\ \hline & 1 & -1 & 4 & -4 & 0 \end{array} \quad \longrightarrow \quad -2 \text{ es un cero.}$$

Por tanto, tenemos

$$\begin{aligned} f(x) &= x^5 + x^3 + 2x^2 - 12x + 8 \\ &= (x - 1)(x + 2)(x^3 - x^2 + 4x - 4). \end{aligned}$$

Se puede factorizar $x^3 - x^2 + 4x - 4$ como $(x - 1)(x^2 + 4)$, y al factorizar $x^2 + 4$ como

$$\begin{aligned} x^2 - (-4) &= (x - \sqrt{-4})(x + \sqrt{-4}) \\ &= (x - 2i)(x + 2i) \end{aligned}$$

se obtiene

$$f(x) = (x - 1)(x - 1)(x + 2)(x - 2i)(x + 2i)$$

que da los siguientes cinco ceros de f .

$$x = 1, x = 1, x = -2, x = 2i \quad \text{y} \quad x = -2i$$

En la gráfica de f mostrada en la Figura 2.35 se puede ver que los ceros reales son los únicos que aparecen como intersecciones con el eje x . Observe que $x = 1$ es un cero repetido.

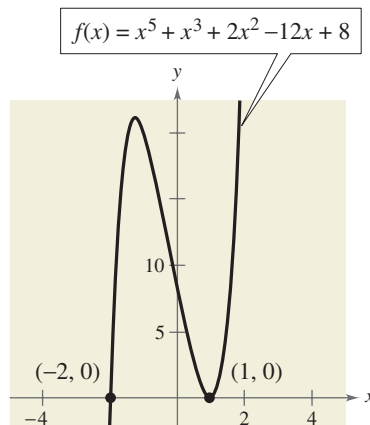


FIGURA 2.35

PUNTO de repaso

Ahora trate de hacer el Ejercicio 77.

TECNOLOGÍA

Se puede usar el comando *table* de una calculadora de gráficas para ayudar a determinar cuál de los posibles ceros racionales son ceros del polinomio del Ejemplo 8. La tabla debe ponerse en el modo *ask* (pedir). A continuación ingrese cada uno de los posibles ceros racionales en ella. Cuando haga esto, verá que hay dos ceros racionales, -2 y 1 , como se ilustra a la derecha.

X	Y1
-8	-33048
-4	-1000
-2	0
-1	20
1	0
2	32
8	1080

X=4

Otras pruebas para los ceros de polinomios

Sabemos que una función polinomial de n -ésimo grado o como se ha puesto, función polinomial de grado n puede tener *a lo sumo* n ceros reales. Desde luego, muchos polinomios de grado n no tienen tantos ceros reales. Por ejemplo $f(x) = x^2 + 1$ no tiene ceros reales, y $f(x) = x^3 + 1$ tiene sólo un cero real. El siguiente teorema, llamado **regla de los signos de Descartes**, arroja más luz sobre el número de ceros reales de un polinomio.

Regla de los signos de Descartes

Sea $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ un polinomio con coeficientes reales y $a_0 \neq 0$.

1. El número de *ceros reales positivos* de f es igual al número de variaciones en signo de $f(x)$ o menor que ese número en un entero par.
2. El número de *ceros reales negativos* de f es igual al número de variaciones en signo de $f(-x)$ o menor que ese número en un entero par.

Una **variación en signo** significa que dos coeficientes consecutivos tienen signos contrarios.

Al usar la regla de Descartes de los signos, un cero de multiplicidad k debe contarse como k ceros. Por ejemplo, el polinomio $x^3 - 3x + 2$ tiene dos variaciones en signo y, por tanto, tiene o dos ceros reales positivos o ningún cero real positivo. Como

$$x^3 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 1)(x + 2)$$

se puede ver que los dos ceros reales positivos son $x = 1$ de multiplicidad 2.

Ejemplo 9 Uso de la regla de Descartes de los signos

Describa los ceros reales positivos de

$$f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 6x - 4.$$

Solución

El polinomio original tiene *tres* variaciones en signo.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & + & a & - & & + & a & - \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 f(x) = & 3x^3 & - & 5x^2 & + & 6x & - & 4 \\
 & & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & & - & a & + & &
 \end{array}$$

El polinomio

$$\begin{aligned}
 f(-x) &= 3(-x)^3 - 5(-x)^2 + 6(-x) - 4 \\
 &= -3x^3 - 5x^2 - 6x - 4
 \end{aligned}$$

no tiene variaciones en signo. En consecuencia, por la regla de Descartes de los signos, el polinomio $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 6x - 4$ tiene tres ceros reales positivos o un cero real positivo, y no tiene ceros reales negativos. En la gráfica de la Figura 2.36 se puede ver que la función tiene sólo un cero real, en $x = 1$.

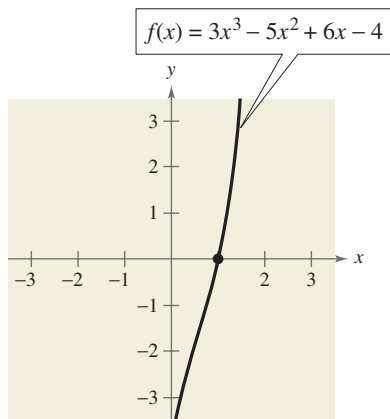


FIGURA 2.36

PUNTO de repaso ➔ Ahora trate de hacer el Ejercicio 87.

Otra prueba para los ceros de una función polinomial está relacionada con el patrón de signos del último renglón del arreglo de la división sintética. Esta prueba puede darnos una cota superior o inferior de los ceros reales de f . Un número real b es una **cota superior** para los ceros reales de f si no hay ceros mayores a b . Del mismo modo, b es una **cota inferior** si no hay ceros reales de f menores a b .

Reglas de cotas superior e inferior

Sea $f(x)$ un polinomio con coeficientes reales y un coeficiente principal positivo. Suponga que $f(x)$ está dividido entre $x - c$, usando división sintética.

1. Si $c > 0$ y cada número del último renglón es positivo o cero, c es una **cota superior** para los ceros reales de f .
2. Si $c < 0$ y los números del último renglón son alternativamente positivos y negativos (cero entradas cuentan como positivos o negativos), c es una **cota inferior** para los ceros reales de f .

Ejemplo 10 Hallar los ceros de una función polinomial

Encuentre los ceros reales de $f(x) = 6x^3 - 4x^2 + 3x - 2$.

Solución

Los posibles ceros reales son como sigue.

$$\frac{\text{Factores de } 2}{\text{Factores de } 6} = \frac{\pm 1, \pm 2}{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6} = \pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{6}, \pm \frac{2}{3}, \pm 2$$

El polinomio original $f(x)$ tiene tres variaciones en signo. El polinomio

$$\begin{aligned} f(-x) &= 6(-x)^3 - 4(-x)^2 + 3(-x) - 2 \\ &= -6x^3 - 4x^2 - 3x - 2 \end{aligned}$$

no tiene variaciones en signo. Como resultado de estos dos hallazgos, se puede aplicar la regla de Descartes de los signos para concluir que hay tres ceros reales positivos o un cero real positivo y ningún cero negativo. Intentar con $x = 1$ produce lo siguiente.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 6 & -4 & 3 & -2 \\ & & 6 & 2 & 5 \\ \hline & 6 & 2 & 5 & 3 \end{array}$$

En consecuencia, $x = 1$ no es un cero, pero como el último renglón tiene todas sus entradas positivas, sabemos que $x = 1$ es una cota superior para los ceros reales. Por tanto, se puede restringir la búsqueda a ceros entre 0 y 1. Por prueba y error, se puede determinar que $x = \frac{2}{3}$ es un cero. Entonces,

$$f(x) = \left(x - \frac{2}{3}\right)(6x^2 + 3).$$

Como $6x^2 + 3$ no tiene ceros reales, se deduce que $x = \frac{2}{3}$ es el único cero real.

PUNTO de repaso ➔ Ahora trate de hacer el Ejercicio 95.

Antes de concluir esta sección, a continuación veamos dos sugerencias adicionales que pueden ayudar a hallar los ceros reales de un polinomio.

1. Si los términos de $f(x)$ tienen un monomio factor común, debe ser factorizado antes de aplicar las pruebas expuestas en esta sección. Por ejemplo, al escribir

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - 5x^3 + 3x^2 + x \\ &= x(x^3 - 5x^2 + 3x + 1) \end{aligned}$$

se puede ver que $x = 0$ es un cero de f y que los ceros restantes se pueden obtener al analizar el factor cúbico.

2. Si el lector puede hallar todos los ceros excepto dos de $f(x)$, siempre podrá usar la fórmula cuadrática en el factor cuadrático restante. Por ejemplo, si puede escribir

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - 5x^3 + 3x^2 + x \\ &= x(x - 1)(x^2 - 4x - 1) \end{aligned}$$

puede aplicar la fórmula cuadrática a $x^2 - 4x - 1$ para concluir que los dos ceros restantes son $x = 2 + \sqrt{5}$ y $x = 2 - \sqrt{5}$.

Ejemplo 11 Uso de un modelo con polinomios

Supongamos que usted está diseñando conjuntos de piezas para hacer velas. Cada conjunto tiene 25 pulgadas cúbicas de cera para velas y un molde para hacer una vela en forma de pirámide. Usted desea que la altura de la vela sea 2 pulgadas menor a la longitud de cada lado de la base cuadrada de la vela. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del molde para velas?

Solución

El volumen de una pirámide es $V = \frac{1}{3}Bh$, donde B es el área de la base y h es la altura. El área de la base es x^2 y la altura es $(x - 2)$. Por tanto, el volumen de la pirámide es $V = \frac{1}{3}x^2(x - 2)$. Sustituyendo 25 por el volumen dará lo siguiente.

$$25 = \frac{1}{3}x^2(x - 2) \quad \text{Sustituir 25 por } V.$$

$$75 = x^3 - 2x^2 \quad \text{Multiplicar cada lado por 3.}$$

$$0 = x^3 - 2x^2 - 75 \quad \text{Escribir en forma general.}$$

Las posibles soluciones racionales son $x = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15, \pm 25, \pm 75$. Use división sintética para probar algunas de las posibles soluciones. Observe que, en este caso, tiene sentido probar sólo valores positivos de x . Usando división sintética, se puede determinar que $x = 5$ es una solución.

$$\begin{array}{r|rrrr} 5 & 1 & -2 & 0 & -75 \\ & & 5 & 15 & 75 \\ \hline & 1 & 3 & 15 & 0 \end{array}$$

Las otras dos soluciones, que satisfacen $x^2 + 3x + 15 = 0$, son imaginarias y se pueden descartar. Es posible concluir que la base del molde para velas debe medir 5 pulgadas por 5 pulgadas y que la altura del molde debe ser $5 - 2 = 3$ pulgadas.

PUNTO de repaso ➔ Ahora trate de hacer el Ejercicio 115.

2.5 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.**VOCABULARIO:** Llene los espacios en blanco.

1. El _____ del _____ dice que si $f(x)$ es un polinomio de grado n ($n > 0$), entonces f tiene al menos un cero en el sistema de los números complejos.
2. El _____ expresa que si $f(x)$ es un polinomio de grado n ($n > 0$), entonces f tiene precisamente n factores lineales, $f(x) = a_n(x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_n)$, donde $c_1, c_2, \dots, c_n$ son números complejos.
3. La prueba que da una lista de los posibles ceros racionales de una función polinomial se denomina prueba _____.
4. Si $a + bi$ es un cero complejo de un polinomio con coeficientes reales, entonces así lo es su _____, $a - bi$.
5. Todo polinomio de grado $n > 0$ con coeficientes reales se puede escribir como el producto de _____ y _____ factores con coeficientes reales, donde los factores _____ no tienen ceros reales.
6. Se dice que un factor cuadrático que no se puede factorizar más como producto de factores lineales que contienen números reales es _____ en los _____.
7. El teorema que se puede usar para determinar los posibles números de ceros reales positivos y ceros reales negativos de una función se denomina _____ de _____.
8. Un número real b es una cota _____ para ceros reales de f si no hay ceros reales menores a b , y es una cota _____ si no hay ceros reales mayores a b .

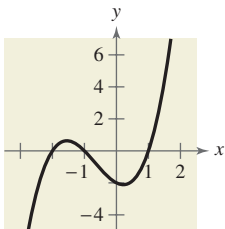
HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 9-14, encuentre todos los ceros de la función.

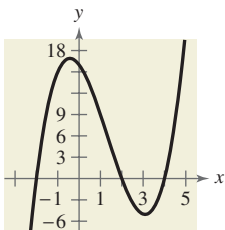
9. $f(x) = x(x - 6)^2$
10. $f(x) = x^2(x + 3)(x^2 - 1)$
11. $g(x) = (x - 2)(x + 4)^3$
12. $f(x) = (x + 5)(x - 8)^2$
13. $f(x) = (x + 6)(x + i)(x - i)$
14. $h(t) = (t - 3)(t - 2)(t - 3i)(t + 3i)$

En los Ejercicios 15-18, use la prueba del cero racional para poner en lista todos los posibles ceros racionales de f . Verifique que los ceros de f mostrados en la gráfica estén contenidos en la lista.

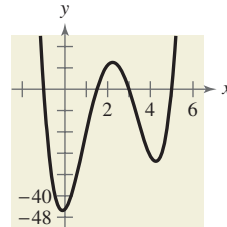
15. $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$



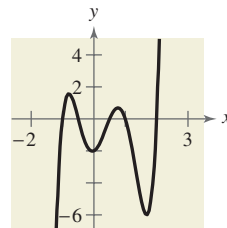
16. $f(x) = x^3 - 4x^2 - 4x + 16$



17. $f(x) = 2x^4 - 17x^3 + 35x^2 + 9x - 45$



18. $f(x) = 4x^5 - 8x^4 - 5x^3 + 10x^2 + x - 2$



En los Ejercicios 19-28, encuentre todos los ceros racionales de la función.

19. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$
20. $f(x) = x^3 - 7x - 6$
21. $g(x) = x^3 - 4x^2 - x + 4$
22. $h(x) = x^3 - 9x^2 + 20x - 12$
23. $h(t) = t^3 + 8t^2 + 13t + 6$
24. $p(x) = x^3 - 9x^2 + 27x - 27$
25. $C(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$
26. $f(x) = 3x^3 - 19x^2 + 33x - 9$
27. $f(x) = 9x^4 - 9x^3 - 58x^2 + 4x + 24$
28. $f(x) = 2x^4 - 15x^3 + 23x^2 + 15x - 25$

En los Ejercicios 29-32, encuentre todas las soluciones reales de la ecuación polinomial.

29. $z^4 + z^3 + z^2 + 3z - 6 = 0$

30. $x^4 - 13x^2 - 12x = 0$

31. $2y^4 + 3y^3 - 16y^2 + 15y - 4 = 0$

32. $x^5 - x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 2x = 0$

En los Ejercicios 33-36, (a) haga una lista de los posibles ceros racionales de f , (b) trace la gráfica de f de modo que algunos de los posibles ceros del inciso (a) se puedan desatender, y luego (c) determine todos los ceros reales de f .

33. $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$

34. $f(x) = -3x^3 + 20x^2 - 36x + 16$

35. $f(x) = -4x^3 + 15x^2 - 8x - 3$

36. $f(x) = 4x^3 - 12x^2 - x + 15$



En los Ejercicios 37-40, (a) haga una lista de los posibles ceros racionales de f , (b) use una calculadora de gráficas para graficar f de modo que algunos de los posibles ceros del inciso (a) se puedan desatender, y luego (c) determine todos los ceros reales de f .

37. $f(x) = -2x^4 + 13x^3 - 21x^2 + 2x + 8$

38. $f(x) = 4x^4 - 17x^2 + 4$

39. $f(x) = 32x^3 - 52x^2 + 17x + 3$

40. $f(x) = 4x^3 + 7x^2 - 11x - 18$



ANÁLISIS GRÁFICO En los Ejercicios 41-44, (a) use el comando *zero* o *root* de una calculadora de gráficas para aproximar los ceros de la función, con una precisión de tres lugares decimales, (b) determine uno de los ceros exactos (use división sintética para verificar su resultado) y (c) factorice completamente el polinomio.

41. $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2$ 42. $P(t) = t^4 - 7t^2 + 12$

43. $h(x) = x^5 - 7x^4 + 10x^3 + 14x^2 - 24x$

44. $g(x) = 6x^4 - 11x^3 - 51x^2 + 99x - 27$

En los Ejercicios 45-50, encuentre una función polinomial con coeficientes reales que tenga los ceros dados. (Hay numerosas respuestas correctas.)

45. 1, $5i$

46. 4, $-3i$

47. 2, $5 + i$

48. 5, $3 - 2i$

49. $\frac{2}{3}$, -1 , $3 + \sqrt{2}i$

50. -5 , -5 , $1 + \sqrt{3}i$

En los Ejercicios 51-54, escriba el polinomio (a) como producto de factores que son irreducibles en los *racionales*, (b) como producto de factores lineales y cuadráticos que son irreducibles en los *reales* y (c) en forma completamente factorizada.

51. $f(x) = x^4 + 6x^2 - 27$

52. $f(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 12x - 18$

(Pista: un factor es $x^2 - 6$.)

53. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x - 6$

(Pista: un factor es $x^2 - 2x - 2$.)

54. $f(x) = x^4 - 3x^3 - x^2 - 12x - 20$

(Pista: un factor es $x^2 + 4$.)

En los Ejercicios 55-62, use el cero dado para hallar todos los ceros de la función.

Función	Cero
55. $f(x) = x^3 - x^2 + 4x - 4$	$2i$
56. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 18x + 27$	$3i$
57. $f(x) = 2x^4 - x^3 + 49x^2 - 25x - 25$	$5i$
58. $g(x) = x^3 - 7x^2 - x + 87$	$5 + 2i$
59. $g(x) = 4x^3 + 23x^2 + 34x - 10$	$-3 + i$
60. $h(x) = 3x^3 - 4x^2 + 8x + 8$	$1 - \sqrt{3}i$
61. $f(x) = x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 21x + 22$	$-3 + \sqrt{2}i$
62. $f(x) = x^3 + 4x^2 + 14x + 20$	$-1 - 3i$

En los Ejercicios 63-80, encuentre todos los ceros de la función y escriba el polinomio como producto de factores lineales.

63. $f(x) = x^2 + 36$

64. $f(x) = x^2 - x + 56$

65. $h(x) = x^2 - 2x + 17$

66. $g(x) = x^2 + 10x + 17$

67. $f(x) = x^4 - 16$

68. $f(y) = y^4 - 256$

69. $f(z) = z^2 - 2z + 2$

70. $h(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$

71. $g(x) = x^3 - 3x^2 + x + 5$

72. $f(x) = x^3 - x^2 + x + 39$

73. $h(x) = x^3 - x + 6$

74. $h(x) = x^3 + 9x^2 + 27x + 35$

75. $f(x) = 5x^3 - 9x^2 + 28x + 6$

76. $g(x) = 2x^3 - x^2 + 8x + 21$

77. $g(x) = x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 16x + 16$

78. $h(x) = x^4 + 6x^3 + 10x^2 + 6x + 9$

79. $f(x) = x^4 + 10x^2 + 9$

80. $f(x) = x^4 + 29x^2 + 100$



En los Ejercicios 81-86, encuentre todos los ceros de la función. Cuando haya una lista amplia de posibles ceros racionales, use una calculadora de gráficas para graficar la función para descartar cualesquiera ceros racionales que obviamente no sean ceros de la función.

81. $f(x) = x^3 + 24x^2 + 214x + 740$

82. $f(s) = 2s^3 - 5s^2 + 12s - 5$

83. $f(x) = 16x^3 - 20x^2 - 4x + 15$

84. $f(x) = 9x^3 - 15x^2 + 11x - 5$

85. $f(x) = 2x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 5x + 2$

86. $g(x) = x^5 - 8x^4 + 28x^3 - 56x^2 + 64x - 32$

En los Ejercicios 87-94, use la regla de Descartes de los signos para determinar el posible número de ceros positivos y negativos de la función.

87. $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3$ 88. $h(x) = 4x^2 - 8x + 3$
 89. $h(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1$ 90. $h(x) = 2x^4 - 3x + 2$
 91. $g(x) = 5x^5 - 10x$
 92. $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1$
 93. $f(x) = -5x^3 + x^2 - x + 5$
 94. $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + x + 3$

En los Ejercicios 95-98, use división sintética para verificar las cotas superior e inferior de los ceros reales de f .

95. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 1$
 (a) Superior: $x = 1$ (b) Inferior: $x = -4$
 96. $f(x) = x^3 - 4x^2 + 1$
 (a) Superior: $x = 4$ (b) Inferior: $x = -1$
 97. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 16x - 16$
 (a) Superior: $x = 5$ (b) Inferior: $x = -3$
 98. $f(x) = 2x^4 - 8x + 3$
 (a) Superior: $x = 3$ (b) Inferior: $x = -4$

En los Ejercicios 99-102, encuentre todos los ceros reales de la función.

99. $f(x) = 4x^3 - 3x - 1$
 100. $f(z) = 12z^3 - 4z^2 - 27z + 9$
 101. $f(y) = 4y^3 + 3y^2 + 8y + 6$
 102. $g(x) = 3x^3 - 2x^2 + 15x - 10$

En los Ejercicios 103-106, encuentre todos los ceros racionales de la función polinomial.

103. $P(x) = x^4 - \frac{25}{4}x^2 + 9 = \frac{1}{4}(4x^4 - 25x^2 + 36)$
 104. $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{23}{2}x + 6 = \frac{1}{2}(2x^3 - 3x^2 - 23x + 12)$
 105. $f(x) = x^3 - \frac{1}{4}x^2 - x + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(4x^3 - x^2 - 4x + 1)$
 106. $f(z) = z^3 + \frac{11}{6}z^2 - \frac{1}{2}z - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}(6z^3 + 11z^2 - 3z - 2)$

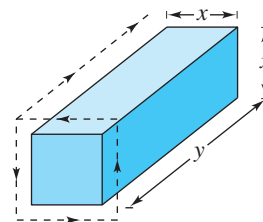
En los Ejercicios 107-110, relacione la función cúbica con los números de ceros racionales e irracionales.

- (a) Ceros racionales: 0; ceros irracionales: 1
 (b) Ceros racionales: 3; ceros irracionales: 0
 (c) Ceros racionales: 1; ceros irracionales: 2
 (d) Ceros racionales: 1; ceros irracionales: 0
 107. $f(x) = x^3 - 1$ 108. $f(x) = x^3 - 2$
 109. $f(x) = x^3 - x$ 110. $f(x) = x^3 - 2x$

111. GEOMETRÍA Se ha de construir una caja abierta a partir de una pieza rectangular de material, de 15 centímetros por 9 centímetros, cortando para ello cuadrados iguales de las esquinas y volteando hacia arriba los lados.

- (a) Represente con x la longitud de los lados de los cuadrados removidos. Trace un diagrama que muestre los cuadrados removidos de la pieza original de material y las dimensiones resultantes de la caja abierta.
 (b) Use el diagrama para escribir el volumen V de la caja como función de x . Determine el dominio de la función.
 (c) Trace la gráfica de la función y aproxime las dimensiones de la caja que darán un volumen máximo.
 (d) Encuentre valores de x tales que $V = 56$. ¿Cuál de estos valores es una imposibilidad física en la construcción de la caja? Explique.

112. GEOMETRÍA Un paquete rectangular que ha de enviarse en un servicio de entregas (vea figura) puede tener una longitud y contorno (perímetro de una sección transversal), combinados, de 120 pulgadas.



- (a) Escriba una función $V(x)$ que represente el volumen del paquete.
 (b) Use una calculadora de gráficas para graficar la función y aproximar las dimensiones del paquete que dará un volumen máximo.
 (c) Encuentre valores de x tales que $V = 13\,500$. ¿Cuál de estos valores es una imposibilidad física en la construcción del paquete? Explique.

113. COSTO DE PUBLICIDAD Una compañía que produce reproductores de archivos MP3 estima que la utilidad P (en dólares) por vender un modelo particular está dada por

$$P = -76x^3 + 4830x^2 - 320\,000, \quad 0 \leq x \leq 60$$

donde x es el gasto en publicidad (en decenas de miles de dólares). Usando este modelo, encuentre la menor de las dos cantidades en publicidad que dará una utilidad de \$2 500 000.

114. COSTO DE PUBLICIDAD Una compañía que manufactura bicicletas estima que la utilidad P (en dólares) por vender un modelo particular está dada por

$$P = -45x^3 + 2500x^2 - 275\,000, \quad 0 \leq x \leq 50$$

donde x es el gasto en publicidad (en decenas de miles de dólares). Con el uso de este modelo, encuentre la menor de dos cantidades en publicidad que dará una utilidad de \$800 000.

- 115. GEOMETRÍA** Una tolva para almacenamiento de alimentos a granel, con dimensiones de 2 pies por 3 pies por 4 pies, necesita aumentarse en tamaño para contener cinco veces la cantidad de alimento que la tolva actual. (Suponga que cada una de las dimensiones se aumenta en la misma cantidad.)

- (a) Escriba una función que represente el volumen V de la nueva tolva.
(b) Encuentre las dimensiones de la nueva tolva.

- 116. GEOMETRÍA** Un fabricante desea agrandar un taller ya existente para manufacturas, de modo que el área total de piso sea 1.5 veces la del taller actual. El área de piso del taller actual es rectangular y mide 250 pies por 160 pies. El fabricante desea aumentar cada una de estas dimensiones en la misma cantidad.

- (a) Escriba una función que represente la nueva área A de piso.
(b) Encuentre las dimensiones del nuevo piso.
(c) Otra alternativa es aumentar la longitud del piso actual en una cantidad que sea el doble del aumento en el ancho del piso. El área total de piso es 1.5 veces el del taller actual. Repita los incisos (a) y (b) usando estos criterios.



- 117. COSTO** El costo C (en miles de dólares) de ordenar y transportar componentes empleados en manufacturar un producto está dado por

$$C = 100\left(\frac{200}{x^2} + \frac{x}{x+30}\right), \quad x \geq 1$$

donde x es el tamaño del pedido (en cientos). En cálculo, se puede demostrar que el costo es mínimo cuando

$$3x^3 - 40x^2 - 2400x - 36\,000 = 0.$$

Use una calculadora para aproximar el tamaño óptimo del pedido a la centena de unidades más cercana.

- 118. ALTURA DE UNA PELOTA DE BÉISBOL** Una pelota de béisbol es lanzada hacia arriba desde una altura de 6 pies, con una rapidez inicial de 48 pies por segundo, y su altura h (en pies) es

$$h(t) = -16t^2 + 48t + 6, \quad 0 \leq t \leq 3$$

donde t es el tiempo (en segundos). Nos indican que la pelota alcanza una altura de 64 pies. ¿Es esto posible?

- 119. UTILIDADES** La ecuación de demanda para cierto producto es $p = 140 - 0.0001x$, donde p es el precio unitario (en dólares) del producto y x es el número de unidades producidas y vendidas. La ecuación de costo para el producto es $C = 80x + 150\,000$, donde C es el costo total (en dólares) y x es el número de unidades producidas. La utilidad total obtenida por producir y vender x unidades es $P = R - C = xp - C$. Usted está trabajando en el departamento de *marketing* de la compañía que produce este producto, y se le pide que



- 120. ATLETISMO** La asistencia A (en millones) a juegos de baloncesto colegial femenino de la NCAA, para los años 2000 a 2007, se muestra en la tabla siguiente. (Fuente: [National Collegiate Athletic Association, Indianapolis, IN](#))



Año	Asistencia, A
2000	8.7
2001	8.8
2002	9.5
2003	10.2
2004	10.0
2005	9.9
2006	9.9
2007	10.9

- (a) Use una calculadora de gráficas para crear una gráfica de dispersión de los datos. Con t represente el año, con $t = 0$ correspondiente a 2000.
(b) Use el comando *regression* de la calculadora de gráficas para hallar un modelo cuártico para los datos.
(c) Grafique el modelo y la gráfica de dispersión en la misma pantalla. ¿Qué tan bien se ajusta el modelo a los datos?
(d) De acuerdo con el modelo de el inciso (b), ¿en cuál(es) año(s) la asistencia fue al menos de 10 millones?
(e) De acuerdo con el modelo, ¿la asistencia continuará en aumento? Explique.

EXPLORACIÓN

¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 121 y 122, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

- 121.** Es posible que una función polinomial de tercer grado, con coeficientes enteros, no tenga ceros reales.

- 122.** Si $x = -i$ es un cero de la función dada por

$$f(x) = x^3 + ix^2 + ix - 1$$

entonces $x = i$ también debe ser un cero de f .

PIÉNSELO En los Ejercicios 123-128, determine (si es posible) los ceros de la función g si la función f tiene ceros en $x = r_1$, $x = r_2$ y $x = r_3$.

123. $g(x) = -f(x)$

124. $g(x) = 3f(x)$

125. $g(x) = f(x - 5)$

126. $g(x) = f(2x)$

127. $g(x) = 3 + f(x)$

128. $g(x) = f(-x)$

129. PIÉNSELO Una función f polinomial de tercer grado tiene ceros reales -2 , $\frac{1}{2}$ y 3 , y su coeficiente principal es negativo. Escriba una ecuación de f . Trace la gráfica de f . ¿Cuántas funciones polinomiales son posibles para f ?

130. TOQUE FINAL Use una calculadora de gráficas para graficar la función dada por $f(x) = x^4 - 4x^2 + k$ para diferentes valores de k . Encuentre valores de k tales que los ceros de f satisfagan las características especificadas. (Algunos incisos no tienen respuestas únicas.)

- (a) Cuatro ceros reales
- (b) Dos ceros reales, cada uno de multiplicidad 2
- (c) Dos ceros reales y dos ceros complejos
- (d) Cuatro ceros complejos
- (e) ¿Las respuestas de la (a) a la (d) cambiarán para la función g , donde $g(x) = f(x - 2)$?
- (f) ¿Las respuestas de la (a) a la (d) cambiarán para la función g , donde $g(x) = f(2x)$?

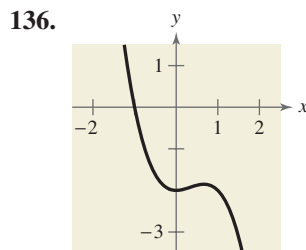
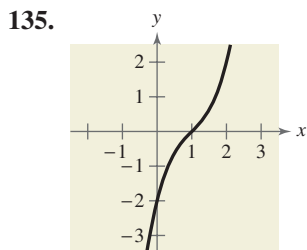
131. PIÉNSELO Trace la gráfica de una función polinomial de quinto grado cuyo coeficiente principal sea positivo y que tenga un cero en $x = 3$ de multiplicidad 2.

132. ESCRITURA Compile una lista de todas las diversas técnicas para factorizar un polinomio que hemos estudiado hasta aquí en el texto. Dé un ejemplo que ilustre cada una de ellas y escriba un párrafo que explique cuándo es apropiado el uso de cada técnica.

133. PIÉNSELO Sea $y = f(x)$ un polinomio cuártico con coeficiente principal $a = 1$ and $f(i) = f(2i) = 0$. Escriba una ecuación para f .

134. PIÉNSELO Sea $y = f(x)$ un polinomio cúbico con coeficiente principal $a = -1$ y $f(2) = f(i) = 0$. Escriba una ecuación para f .

En los Ejercicios 135 y 136, se ilustra la gráfica de una función polinomial cúbica $y = f(x)$. Se sabe que uno de los ceros es $1 + i$. Escriba una ecuación para f .



137. Use la siguiente información de la tabla para contestar cada una de las preguntas.

Intervalo	Valor de $f(x)$
$(-\infty, -2)$	Positivo
$(-2, 1)$	Negativo
$(1, 4)$	Negativo
$(4, \infty)$	Positivo

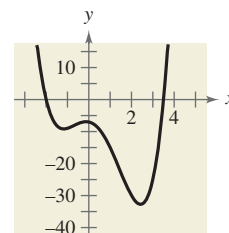
- (a) ¿Cuáles son los tres ceros reales de la función polinomial f ?
- (b) ¿Qué se puede decir del comportamiento de la gráfica de f en $x = 1$?
- (c) ¿Cuál es el grado mínimo posible de f ? Explique. ¿El grado de f puede ser siempre impar? Explique.
- (d) ¿El coeficiente principal de f es positivo o negativo? Explique.
- (e) Escriba una ecuación para f . (Hay numerosas respuestas correctas.)
- (f) Trace una gráfica de la ecuación que usted escribió en el inciso (e).

138. (a) Encuentre una función cuadrática f (con coeficientes enteros) que tenga $\pm\sqrt{bi}$ como ceros. Suponga que b es un entero positivo.

(b) Encuentre una función cuadrática f (con coeficientes enteros) que tenga $a \pm bi$ como ceros. Suponga que b es un entero positivo.

139. RAZONAMIENTO GRÁFICO La gráfica de una de las siguientes funciones se muestra a continuación. Identifique la función mostrada en ella. Explique por qué cada una de las otras no es la función correcta. Use una calculadora de gráficas para verificar su resultado.

- (a) $f(x) = x^2(x + 2)(x - 3.5)$
- (b) $g(x) = (x + 2)(x - 3.5)$
- (c) $h(x) = (x + 2)(x - 3.5)(x^2 + 1)$
- (d) $k(x) = (x + 1)(x + 2)(x - 3.5)$



2.6 FUNCIONES RACIONALES

Lo que debe aprender

- Hallar los dominios de funciones racionales.
- Hallar las asíntotas verticales y horizontales de gráficas de funciones racionales.
- Analizar y trazar gráficas de funciones racionales.
- Trazar gráficas de funciones racionales que tengan asíntotas diagonales.
- Usar funciones racionales para modelar y resolver problemas de la vida real.

Por qué debe aprenderlo

Se pueden usar funciones racionales para modelar y resolver problemas de la vida real relacionados con negocios. Por ejemplo, en el Ejercicio 83 de la página 183 se utiliza una función racional para modelar la rapidez media en una distancia.



Mike Powell/Getty Images

Introducción

Una **función racional** es un cociente de funciones polinomiales. Se puede escribir en la forma

$$f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$$

donde $N(x)$ y $D(x)$ son polinomios y $D(x)$ no es el polinomio cero.

En general, el **dominio** de una función racional de x incluye todos los números reales excepto valores de x que hagan que el denominador sea cero. Buena parte de la exposición de funciones racionales se centrará en su comportamiento gráfico cerca de valores de x excluidos del dominio.

Ejemplo 1 Hallar el dominio de una función racional

Encuentre el dominio de la función recíproca $f(x) = \frac{1}{x}$ y discuta el comportamiento de f cerca de cualesquier valores de x excluidos.

Solución

Como el denominador es cero cuando $x = 0$, el dominio de f es todos los números reales excepto $x = 0$. Para determinar el comportamiento de f cerca de este valor excluido, evalúe $f(x)$ a la izquierda y a la derecha de $x = 0$, como se indica en las tablas siguientes.

x	-1	-0.5	-0.1	-0.01	-0.001	$\rightarrow 0$
$f(x)$	-1	-2	-10	-100	-1000	$\rightarrow -\infty$

x	$0 \leftarrow$	0.001	0.01	0.1	0.5	1
$f(x)$	$\infty \leftarrow$	1000	100	10	2	1

Observe que cuando x se aproxima a 0 *por la izquierda*, $f(x)$ disminuye sin límite. En contraste, cuando x se aproxima a 0 *por la derecha*, $f(x)$ aumenta sin límite. La gráfica de f se muestra en la Figura 2.37.

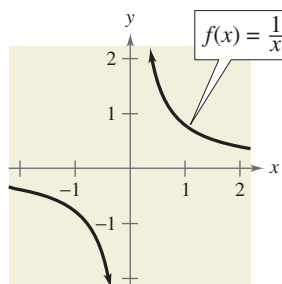


FIGURA 2.37

PUNTO de repaso

Ahora trate de hacer el Ejercicio 5.

Asíntotas verticales y horizontales

En el Ejemplo 1, el comportamiento de f cerca de $x = 0$ se denota como sigue.

$$\underbrace{f(x) \rightarrow -\infty \text{ cuando } x \rightarrow 0^-}_{f(x) \text{ disminuye sin límite cuando } x \text{ se aproxima a } 0 \text{ por la izquierda.}} \quad \underbrace{f(x) \rightarrow \infty \text{ cuando } x \rightarrow 0^+}_{f(x) \text{ aumenta sin límite cuando } x \text{ se aproxima a } 0 \text{ por la derecha.}}$$

La recta $x = 0$ es una **asíntota vertical** de la gráfica de f , como se ve en la Figura 2.38. En esta figura se puede ver que la gráfica de f también tiene una **asíntota horizontal**, la recta $y = 0$. Esto significa que los valores de $f(x) = \frac{1}{x}$ se aproximan a cero cuando x aumenta o disminuye sin límite.

$$\underbrace{f(x) \rightarrow 0 \text{ cuando } x \rightarrow -\infty}_{f(x) \text{ se aproxima a } 0 \text{ cuando } x \text{ disminuye sin límite.}} \quad \underbrace{f(x) \rightarrow 0 \text{ cuando } x \rightarrow \infty}_{f(x) \text{ se aproxima a } 0 \text{ cuando } x \text{ aumenta sin límite.}}$$

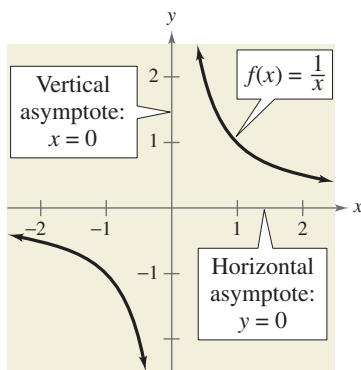


FIGURA 2.38

Definiciones de asíntotas verticales y horizontales

1. La recta $x = a$ es una **asíntota vertical** de la gráfica de f si

$$f(x) \rightarrow \infty \quad \text{o} \quad f(x) \rightarrow -\infty$$

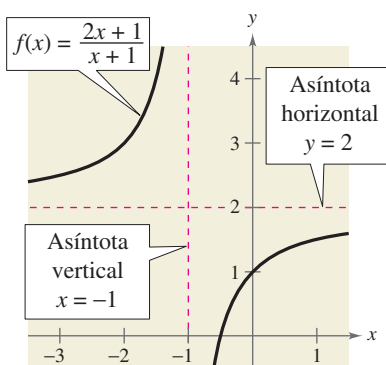
cuando $x \rightarrow a$, ya sea por la derecha o por la izquierda.

2. La recta $y = b$ es una **asíntota horizontal** de la gráfica de f si

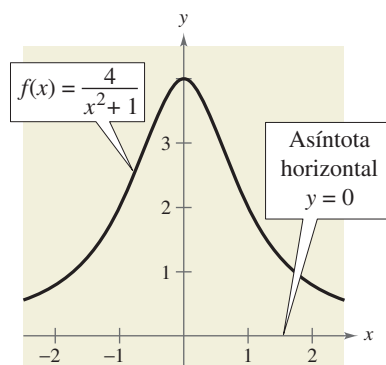
$$f(x) \rightarrow b$$

cuando $x \rightarrow \infty$ o $x \rightarrow -\infty$.

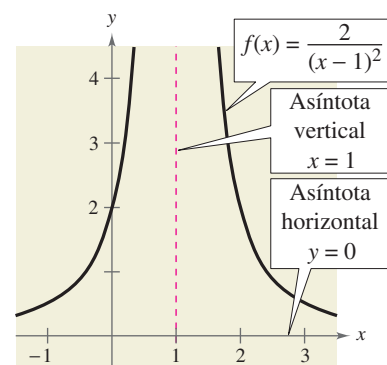
Eventualmente (cuando $x \rightarrow \infty$ o $x \rightarrow -\infty$), la distancia entre la asíntota horizontal y los puntos en la gráfica debe aproximarse a cero. La Figura 2.39 muestra las asíntotas vertical y horizontal de las gráficas de tres funciones racionales.



(a)



(b)



(c)

FIGURA 2.39

Las gráficas de $f(x) = \frac{1}{x}$ en la Figura 2.38 y $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$ en la Figura 2.39(a) son

hipérbolas. Estudiaremos hipérbolas en la Sección 10.4.

Asíntotas verticales y horizontales de una función racional

Sea f la función racional dada por

$$f(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

donde $N(x)$ y $D(x)$ no tienen factores comunes.

1. La gráfica de f tiene asíntotas *verticales* en los ceros de $D(x)$.
2. La gráfica de f tiene una asíntota *horizontal*, o ninguna, determinada al comparar los grados de $N(x)$ y $D(x)$.
 - a. Si $n < m$, la gráfica de f tiene la recta $y = 0$ (el eje x) como asíntota horizontal.
 - b. Si $n = m$, la gráfica de f tiene la recta $y = \frac{a_n}{b_m}$ (razón entre los coeficientes principales) como asíntota horizontal.
 - c. Si $n > m$, la gráfica de f no tiene asíntota horizontal.

Ejemplo 2 Hallar asíntotas verticales y horizontales

Encuentre todas las asíntotas verticales y horizontales de la gráfica de cada función racional.

a. $f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 1}$ b. $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x - 6}$

Solución

- a. Para esta función racional, el grado del numerador es *igual* al del denominador. El coeficiente principal del numerador es 2 y el del denominador es 1, por lo cual la gráfica tiene la recta $y = 2$ como asíntota horizontal. Para hallar cualesquiera asíntotas verticales, iguale a 0 el denominador y despeje x de la ecuación resultante.

$$x^2 - 1 = 0$$

Igualar a 0 el denominador.

$$(x + 1)(x - 1) = 0$$

Factorizar.

$$x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1$$

Igualar a 0 el primer factor.

$$x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

Igualar a 0 el segundo factor.

Esta ecuación tiene dos soluciones reales, $x = -1$ y $x = 1$, de modo que la gráfica tiene las rectas $x = -1$ y $x = 1$ como asíntotas verticales. La gráfica de la función se muestra en la Figura 2.40.

- b. Para esta función racional, el grado del numerador es *igual* al del denominador. El coeficiente principal tanto del numerador como del denominador es 1, por lo que la gráfica tiene la recta $y = 1$ como asíntota horizontal. Para hallar cualesquiera asíntotas verticales, primero factorice el numerador y el denominador como sigue.

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x - 6} = \frac{(x - 1)(x + 2)}{(x + 2)(x - 3)} = \frac{x - 1}{x - 3}, \quad x \neq -2$$

Al igualar a cero el denominador $x - 3$ (de la función simplificada), se puede determinar que la gráfica tiene la recta $x = 3$ como asíntota vertical.

PUNTO de repaso Ahora trate de hacer el Ejercicio 13.

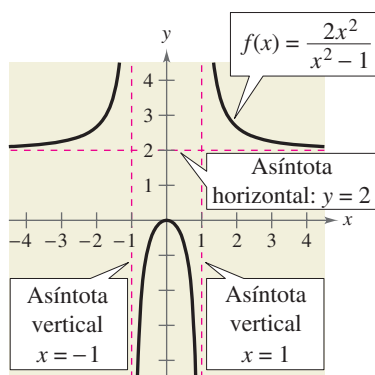


FIGURA 2.40

Ayuda de álgebra

En el Apéndice A.3 se pueden repasar técnicas para factorizar.

Analizar gráficas de funciones racionales

Para trazar la gráfica de una función racional, use la siguiente guía.

Tip de estudio

El lector puede probar la simetría al graficar funciones racionales, en especial para funciones racionales simples. Recuerde de la Sección 1.6 que la gráfica de la función recíproca

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

es simétrica respecto al origen.

Guía para analizar gráficas de funciones racionales

Sea $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$, donde $N(x)$ y $D(x)$ son polinomios.

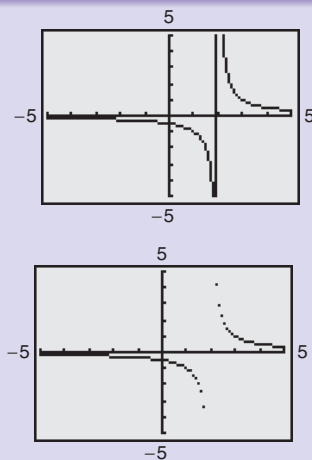
1. Simplifique f , si es posible.
2. Encuentre y determine la intersección con el eje y (si la hay) al evaluar $f(0)$.
3. Encuentre los ceros del numerador (si los hay) al resolver la ecuación $N(x) = 0$. A continuación determine las intersecciones correspondientes con el eje x .
4. Encuentre los ceros del denominador (si los hay) al resolver la ecuación $D(x) = 0$. A continuación trace las asíntotas verticales correspondientes.
5. Encuentre y trace la asíntota horizontal (si la hay) usando la regla para hallar la asíntota horizontal de una función racional.
6. Determine cuando menos un punto *entre* y un punto *más allá* de cada intersección con el eje x y la asíntota vertical.
7. Use curvas lisas para completar la gráfica entre y más allá de las asíntotas verticales.

TECNOLOGÍA

Algunas calculadoras de gráficas tienen dificultades para graficar funciones racionales que tienen asíntotas verticales. A veces, la calculadora enlaza partes de la gráfica que se supone no deben unirse. Por ejemplo, la pantalla superior de la derecha muestra la gráfica de

$$f(x) = \frac{1}{x - 2}$$

Observe que la gráfica debe estar formada de dos partes no enlazadas, una a la izquierda de $x = 2$ y la otra a la derecha de $x = 2$. Para eliminar este problema, se puede intentar cambiar el modo *dot* de la calculadora. El problema con esto es que la gráfica queda entonces representada como un conjunto de puntos (como se ve en la pantalla inferior de la derecha) y no como una curva lisa.



El concepto de *intervalos de prueba* de la Sección 2.2 se puede ampliar para graficar funciones racionales. Para hacer esto, use el hecho de que una función racional puede cambiar de signos sólo en sus ceros y sus valores no definidos (los valores de x para los que su denominador es cero). Entre dos ceros consecutivos del numerador y el denominador, una función racional debe ser enteramente positiva o enteramente negativa. Esto significa que cuando los ceros del numerador y el denominador de una función racional se ponen en orden, dividen la recta numérica real en intervalos de prueba en los que la función no tiene cambios de signo. Se escoge un valor representativo de x para determinar si el valor de la función racional es positivo (la gráfica se encuentra arriba del eje x) o negativo (la gráfica se encuentra abajo del eje x).

Tip de estudio

Se pueden usar transformaciones para ayudar a trazar gráficas de funciones racionales. Por ejemplo, la gráfica de g del Ejemplo 3 es un estiramiento vertical y un desplazamiento hacia la derecha de la gráfica de $f(x) = 1/x$ porque

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{3}{x-2} \\ &= 3\left(\frac{1}{x-2}\right) \\ &= 3f(x-2). \end{aligned}$$

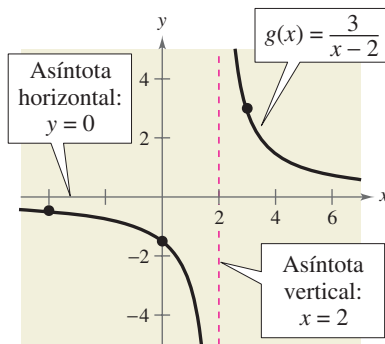


FIGURA 2.41

Ejemplo 3 Trazar la gráfica de una función racional

Trace la gráfica de $g(x) = \frac{3}{x-2}$ y exprese su dominio.

Solución

Intersección con el eje y : $(0, -\frac{3}{2})$, porque $g(0) = -\frac{3}{2}$

Intersección con el eje x : Ninguna, porque $3 \neq 0$

Asíntota vertical: $x = 2$, cero de denominador

Asíntota horizontal: $y = 0$, porque el grado de $N(x) < \text{grado de } D(x)$

Puntos adicionales:

Intervalo de prueba	Valor representativo de x	Valor de g	Signo	Punto en la gráfica
$(-\infty, 2)$	-4	$g(-4) = -0.5$	Negativo	$(-4, -0.5)$
$(2, \infty)$	3	$g(3) = 3$	Positivo	$(3, 3)$

Al localizar las intersecciones con los ejes, asíntotas y unos cuantos puntos adicionales se puede obtener la gráfica que se ilustra en la Figura 2.41. El dominio de f es el de todos los números reales excepto $x = 2$.

PUNTO de repaso ➔ Ahora trate de hacer el Ejercicio 31.

Ejemplo 4 Trazar la gráfica de una función racional

Trace la gráfica de

$$f(x) = \frac{2x-1}{x}$$

y exprese su dominio.

Solución

Intersección con el eje y : Ninguna, porque $x = 0$ no está en el dominio

Intersección con el eje x : $(\frac{1}{2}, 0)$, porque $2x - 1 = 0$

Asíntota vertical: $x = 0$, cero de denominador

Asíntota horizontal: $y = 2$, porque el grado de $N(x) = \text{grado de } D(x)$

Puntos adicionales:

Intervalo de prueba	Valor representativo de x	Valor de f	Signo	Punto en la gráfica
$(-\infty, 0)$	-1	$f(-1) = 3$	Positivo	$(-1, 3)$
$(0, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{4}$	$f(\frac{1}{4}) = -2$	Negativo	$(\frac{1}{4}, -2)$
$(\frac{1}{2}, \infty)$	4	$f(4) = 1.75$	Positivo	$(4, 1.75)$

Al localizar las intersecciones, con los ejes, asíntotas y unos cuantos puntos adicionales se puede obtener la gráfica que se ilustra en la Figura 2.42. El dominio de f es el de todos los números reales, excepto $x = 0$.

PUNTO de repaso ➔ Ahora trate de hacer el Ejercicio 35.

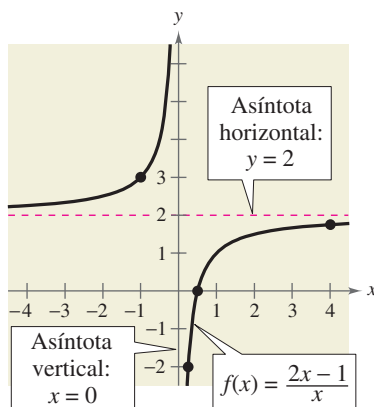


FIGURA 2.42

Ejemplo 5 Trazar la gráfica de una función racional

Trace la gráfica de $f(x) = x/(x^2 - x - 2)$.

Solución

Factorizando el denominador, tenemos $f(x) = \frac{x}{(x+1)(x-2)}$.

Intersección con el eje y : $(0, 0)$, porque $f(0) = 0$

Intersección con el eje x : $(0, 0)$

Asíntotas verticales: $x = -1, x = 2$, ceros de denominador

Asíntota horizontal: $y = 0$, porque el grado de $N(x) < \text{grado de } D(x)$

Puntos adicionales:

Intervalo de prueba	Valor representativo de x	Valor de f	Signo	Punto en la gráfica
$(-\infty, -1)$	-3	$f(-3) = -0.3$	Negativo	$(-3, -0.3)$
$(-1, 0)$	-0.5	$f(-0.5) = 0.4$	Positivo	$(-0.5, 0.4)$
$(0, 2)$	1	$f(1) = -0.5$	Negativo	$(1, -0.5)$
$(2, \infty)$	3	$f(3) = 0.75$	Positivo	$(3, 0.75)$

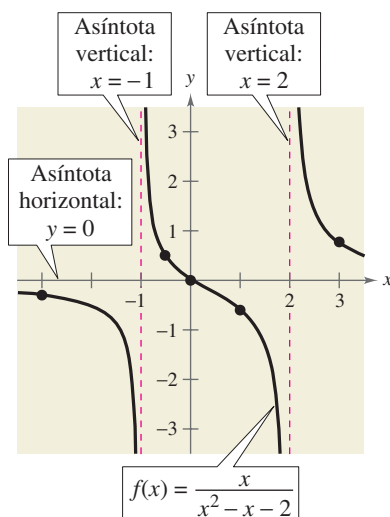


FIGURA 2.43

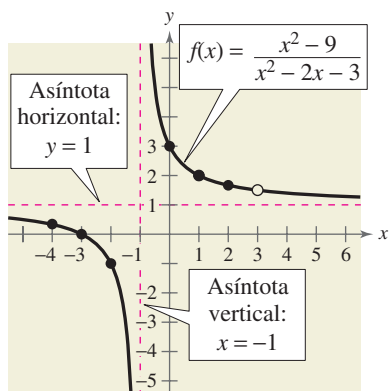
La gráfica se muestra en la Figura 2.43.

PUNTO de repaso

Ahora trate de hacer el Ejercicio 39.

ATENCIÓN

Si no está seguro de la forma de una parte de la gráfica de una función racional, añada algunos puntos más. También observe que cuando el numerador y el denominador de la función tienen un factor común, la gráfica respectiva tiene un *hueco* en el cero de dicho factor.

FIGURA 2.44 Hueco at $x = 3$ **Ejemplo 6** Función racional con factores comunes

Trace la gráfica de $f(x) = (x^2 - 9)/(x^2 - 2x - 3)$.

Solución

Al factorizar el numerador y el denominador se obtiene

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 2x - 3} = \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+1)} = \frac{x+3}{x+1}, \quad x \neq 3.$$

Intersección con el eje y : $(0, 3)$, porque $f(0) = 3$

Intersección con el eje x : $(-3, 0)$, porque $f(-3) = 0$

Asíntota vertical: $x = -1$, cero de denominador (simplificado)

Asíntota horizontal: $y = 1$, porque el grado de $N(x) = \text{grado de } D(x)$

Puntos adicionales:

Intervalo de prueba	Valor representativo de x	Valor de f	Signo	Punto en la gráfica
$(-\infty, -3)$	-4	$f(-4) = 0.33$	Positivo	$(-4, 0.33)$
$(-3, -1)$	-2	$f(-2) = -1$	Negativo	$(-2, -1)$
$(-1, \infty)$	2	$f(2) = 1.67$	Positivo	$(2, 1.67)$

La gráfica se muestra en la Figura 2.44. Observe que hay un hueco en ella en $x = 3$, porque la función no está definida en ese punto.

PUNTO de repaso

Ahora trate de hacer el Ejercicio 45.

Asíntotas oblicuas

Considere una función racional cuyo denominador es de grado 1 o mayor. Si el grado del numerador es exactamente *uno más* que el del denominador, la gráfica de la función tiene una **asíntota oblicua**. Por ejemplo, la gráfica de

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x + 1}$$

tiene una asíntota oblicua, como se ilustra en la Figura 2.45. Para hallar la ecuación de una asíntota oblicua, use división larga. Por ejemplo, al dividir $x^2 - x$ entre $x + 1$, obtenemos

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x + 1} = x - 2 + \frac{2}{x + 1}.$$

Asíntota oblicua
($y = x - 2$)

Cuando x aumenta o disminuye sin límite, el término residuo $2/(x + 1)$ se aproxima a 0, de modo que la gráfica de f se aproxima a la recta $y = x - 2$, como se muestra en la Figura 2.45.

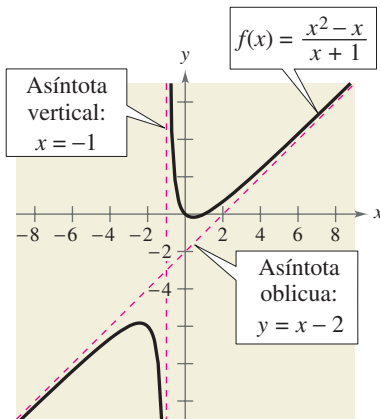


FIGURA 2.45

Ejemplo 7 Función racional con una asíntota oblicua

Trace la gráfica de $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 1}$.

Solución

Factorizando el numerador como $(x - 2)(x + 1)$ permite reconocer las intersecciones con el eje x . Usando división larga

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 1} = x - \frac{2}{x - 1}$$

permite reconocer que la recta $y = x$ es una asíntota oblicua de la gráfica.

Intersección con el eje y : $(0, 2)$, porque $f(0) = 2$

Intersección con el eje x : $(-1, 0)$ y $(2, 0)$

Asíntota vertical: $x = 1$, cero de denominador

Asíntota oblicua: $y = x$

Puntos adicionales:

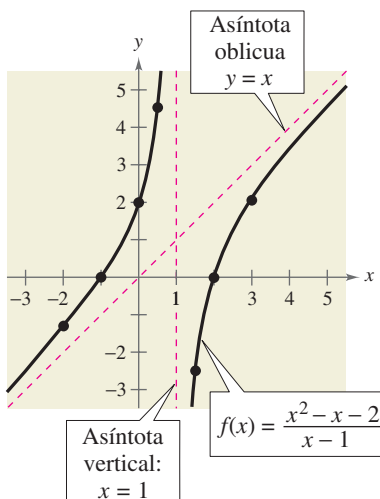


FIGURA 2.46

Intervalo de prueba	Valor representativo de x	Valor de f	Signo	Punto en la gráfica
$(-\infty, -1)$	-2	$f(-2) = -1.33$	Negativo	$(-2, -1.33)$
$(-1, 1)$	0.5	$f(0.5) = 4.5$	Positivo	$(0.5, 4.5)$
$(1, 2)$	1.5	$f(1.5) = -2.5$	Negativo	$(1.5, -2.5)$
$(2, \infty)$	3	$f(3) = 2$	Positivo	$(3, 2)$

La gráfica se muestra en la Figura 2.46.

PUNTO de repaso Ahora trate de hacer el Ejercicio 65.

Aplicaciones

Hay numerosos casos de comportamiento asintótico en la vida real. Por ejemplo, el Ejemplo 8 muestra la forma en que una asíntota vertical se puede usar para analizar el costo de eliminar contaminantes de emisiones de chimeneas.

Ejemplo 8 Modelo de costo-beneficio

Una empresa generadora de energía eléctrica quema carbón para generar electricidad. El costo C (en dólares) de eliminar $p\%$ de contaminantes de la chimenea está dado por

$$C = \frac{80\,000p}{100 - p}$$

para $0 \leq p < 100$. Usted es miembro de una legislatura estatal que considera una ley que requeriría que la empresa eliminara 90% de los contaminantes de sus emisiones en chimeneas. La ley actual requiere la remoción de 85%. ¿Cuánto costo adicional tendría la compañía como resultado de la nueva ley?

Solución algebraica

Como la ley actual requiere la remoción de 85%, el costo será

$$C = \frac{80\,000(85)}{100 - 85} \approx \$453\,333. \quad \text{Evaluar } C \text{ cuando } p = 85.$$

Si la nueva ley aumenta el porcentaje de eliminación a 90%, el costo será

$$C = \frac{80\,000(90)}{100 - 90} = \$720\,000. \quad \text{Evaluar } C \text{ cuando } p = 90.$$

Por tanto, la nueva ley requeriría que la compañía gastara adicionalmente

$$720\,000 - 453\,333 = \$266\,667. \quad \text{Restar 85\% de costo de remoción del costo de remover 90\%.$$

Solución gráfica

Use una calculadora de gráficas para graficar la función

$$y_1 = \frac{80\,000}{100 - x}$$

usando una pantalla similar a la mostrada en la Figura 2.47. Observe que la gráfica tiene una asíntota vertical en $x = 100$. A continuación use el comando *trace* o *value* para calcular los valores de y_1 cuando $x = 85$ y $x = 90$. Debe obtener los valores siguientes.

Cuando $x = 85$, $y_1 \approx 453\,333$.

Cuando $x = 90$, $y_1 = 720\,000$.

En consecuencia, la nueva ley requeriría que la compañía gastara adicionalmente

$$720\,000 - 453\,333 = \$266\,667.$$

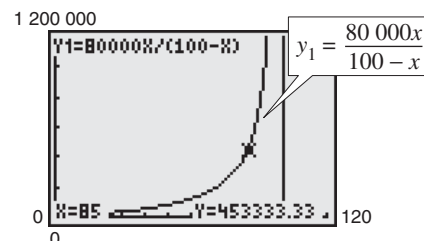


FIGURA 2.47

PUNTO de repaso Ahora trate de hacer el Ejercicio 77.

Ejemplo 9 Hallar un área mínima

Una página rectangular está diseñada para contener 48 pulgadas cuadradas de material impreso. Los márgenes a cada lado son de $1\frac{1}{2}$ pulgadas de ancho. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la página para que se use la cantidad mínima de papel?

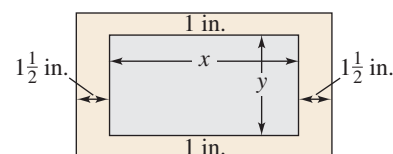


FIGURA 2.48

Solución gráfica

Sea A el área que ha de ser minimizada. De la Figura 2.48, podemos escribir

$$A = (x + 3)(y + 2).$$

El área impresa dentro de los márgenes está modelada por $48 = xy$ o $y = 48/x$. Para hallar el área mínima, reescriba la ecuación para A en términos de sólo una variable al sustituir $48/x$ por y .

$$\begin{aligned} A &= (x + 3)\left(\frac{48}{x} + 2\right) \\ &= \frac{(x + 3)(48 + 2x)}{x}, \quad x > 0 \end{aligned}$$

La gráfica de esta función racional se muestra en la Figura 2.49. Como x representa el ancho del área impresa, es necesario considerar sólo la parte de la gráfica para la cual x es positiva. Usando una calculadora de gráficas, se puede aproximar el valor mínimo de A para que ocurra cuando $x \approx 8.5$ pulgadas. El valor correspondiente de y es $48/8.5 \approx 5.6$ pulgadas. Por tanto, las dimensiones deben ser

$$x + 3 \approx 11.5 \text{ pulgadas} \quad \text{por} \quad y + 2 \approx 7.6 \text{ pulgadas}$$

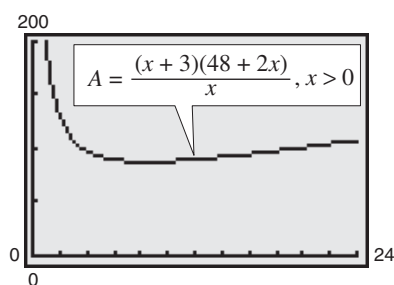


FIGURA 2.49

Solución numérica

Sea A el área que ha de ser minimizada. De la Figura 2.48, podemos escribir

$$A = (x + 3)(y + 2).$$

El área impresa dentro de los márgenes está modelada por $48 = xy$ o $y = 48/x$. Para hallar el área mínima, reescriba la ecuación para A en términos de sólo una variable al sustituir $48/x$ por y .

$$\begin{aligned} A &= (x + 3)\left(\frac{48}{x} + 2\right) \\ &= \frac{(x + 3)(48 + 2x)}{x}, \quad x > 0 \end{aligned}$$

Use el comando *table* de una calculadora de gráficas para crear una tabla de valores para la función

$$y_1 = \frac{(x + 3)(48 + 2x)}{x}$$

comenzando en $x = 1$. En la tabla se puede ver que el valor mínimo de y_1 se presenta cuando x está entre 8 y 9, como se ve en la Figura 2.50. Para aproximar el valor mínimo de y_1 a un lugar decimal, cambie la tabla para que empiece en $x = 8$ y aumente en 0.1. El valor mínimo de y_1 ocurre cuando $x \approx 8.5$, como se muestra en la Figura 2.51. El valor correspondiente de y es $48/8.5 \approx 5.6$ pulgadas. Por tanto, las dimensiones deben ser $x + 3 \approx 11.5$ pulgadas por $y + 2 \approx 7.6$ pulgadas.

X	Y1
6	90
7	88.571
8	88
9	88
10	88.4
11	89.091
12	90

FIGURA 2.50

X	Y1
8.2	87.961
8.3	87.949
8.4	87.943
8.5	87.941
8.6	87.944
8.7	87.952
8.8	87.964

FIGURA 2.51

PUNTO de repaso → Ahora trate de hacer el Ejercicio 81.

Si el lector continúa sus estudios para un curso de cálculo, aprenderá una técnica analítica para hallar el valor exacto de x que produce un área mínima. En este caso, ese valor es $x = 6\sqrt{2} \approx 8.485$.

2.6 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

VOCABULARIO: Llene los espacios en blanco.

- Las funciones de la forma $f(x) = N(x)/D(x)$, donde $N(x)$ y $D(x)$ son funciones polinomiales y $D(x)$ no es el polinomio cero, se denominan _____.
- Si $f(x) \rightarrow \pm\infty$ cuando $x \rightarrow a$ por la izquierda o la derecha, entonces $x = a$ es una _____ de la gráfica de f .
- Si $f(x) \rightarrow b$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$, entonces $y = b$ es una _____ de la gráfica de f .
- Para la función racional dada por $f(x) = N(x)/D(x)$, si el grado de $N(x)$ es exactamente uno más que el grado de $D(x)$, entonces la gráfica de f tiene una _____.

HABILIDADES Y APLICACIONES

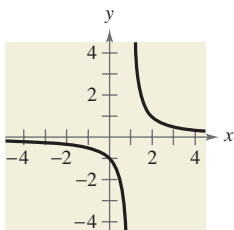
En los Ejercicios 5-8, (a) complete cada tabla para la función, (b) determine las asíntotas verticales y horizontales de la gráfica de la función y (c) encuentre el dominio de la función.

x	$f(x)$
0.5	
0.9	
0.99	
0.999	

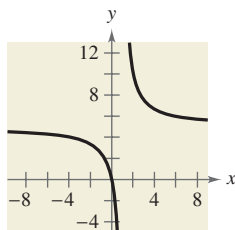
x	$f(x)$
1.5	
1.1	
1.01	
1.001	

x	$f(x)$
5	
10	
100	
1000	

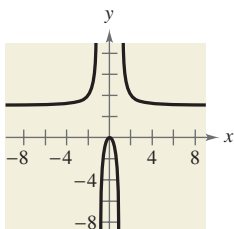
5. $f(x) = \frac{1}{x-1}$



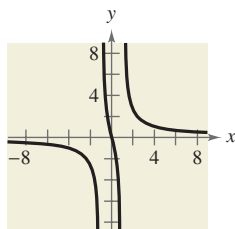
6. $f(x) = \frac{5x}{x-1}$



7. $f(x) = \frac{3x^2}{x^2-1}$



8. $f(x) = \frac{4x}{x^2-1}$



En los Ejercicios 9-16, encuentre el dominio de la función e identifique cualesquiera asíntotas verticales y horizontales.

9. $f(x) = \frac{4}{x^2}$

10. $f(x) = \frac{4}{(x-2)^3}$

11. $f(x) = \frac{5+x}{5-x}$

13. $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$

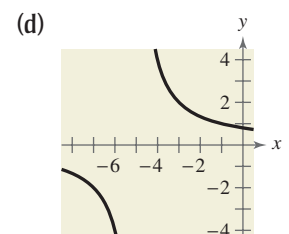
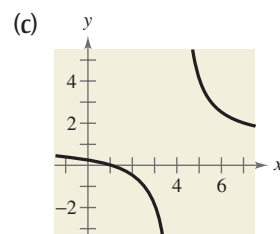
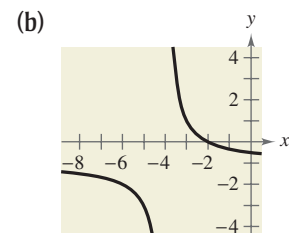
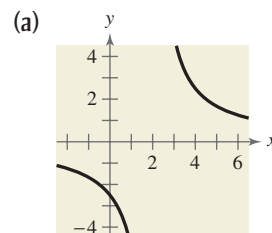
15. $f(x) = \frac{3x^2+1}{x^2+x+9}$

12. $f(x) = \frac{3-7x}{3+2x}$

14. $f(x) = \frac{4x^2}{x+2}$

16. $f(x) = \frac{3x^2+x-5}{x^2+1}$

En los Ejercicios 17-20, relacione la función racional con su gráfica. [Las gráficas están marcadas (a), (b), (c) y (d).]



17. $f(x) = \frac{4}{x+5}$

19. $f(x) = \frac{x-1}{x-4}$

18. $f(x) = \frac{5}{x-2}$

20. $f(x) = -\frac{x+2}{x+4}$

En los Ejercicios 21-24, encuentre los ceros (si los hay) de la función racional.

21. $g(x) = \frac{x^2-9}{x+3}$

23. $f(x) = 1 - \frac{2}{x-7}$

22. $h(x) = 4 + \frac{10}{x^2+5}$

24. $g(x) = \frac{x^3-8}{x^2+1}$

En los Ejercicios 25-30, encuentre el dominio de la función e identifique cualesquiera asíntotas verticales y horizontales.

25. $f(x) = \frac{x-4}{x^2-16}$

26. $f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$

27. $f(x) = \frac{x^2-25}{x^2-4x-5}$

28. $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$

29. $f(x) = \frac{x^2-3x-4}{2x^2+x-1}$

30. $f(x) = \frac{6x^2-11x+3}{6x^2-7x-3}$

En los Ejercicios 31-50, (a) exprese el dominio de la función, (b) identifique todas las intersecciones con los ejes coordenados, (c) encuentre cualesquiera asíntotas verticales y horizontales y (d) localice puntos adicionales de solución, según sea necesario, para trazar la gráfica de la función racional.

31. $f(x) = \frac{1}{x+2}$

32. $f(x) = \frac{1}{x-3}$

33. $h(x) = \frac{-1}{x+4}$

34. $g(x) = \frac{1}{6-x}$

35. $C(x) = \frac{7+2x}{2+x}$

36. $P(x) = \frac{1-3x}{1-x}$

37. $f(x) = \frac{x^2}{x^2+9}$

38. $f(t) = \frac{1-2t}{t}$

39. $g(s) = \frac{4s}{s^2+4}$

40. $f(x) = -\frac{1}{(x-2)^2}$

41. $h(x) = \frac{x^2-5x+4}{x^2-4}$

42. $g(x) = \frac{x^2-2x-8}{x^2-9}$

43. $f(x) = \frac{2x^2-5x-3}{x^3-2x^2-x+2}$

44. $f(x) = \frac{x^2-x-2}{x^3-2x^2-5x+6}$

45. $f(x) = \frac{x^2+3x}{x^2+x-6}$

46. $f(x) = \frac{5(x+4)}{x^2+x-12}$

47. $f(x) = \frac{2x^2-5x+2}{2x^2-x-6}$

48. $f(x) = \frac{3x^2-8x+4}{2x^2-3x-2}$

49. $f(t) = \frac{t^2-1}{t-1}$

50. $f(x) = \frac{x^2-36}{x+6}$

51. $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}, \quad g(x) = x-1$

x	-3	-2	-1.5	-1	-0.5	0	1
f(x)							
g(x)							

52. $f(x) = \frac{x^2(x-2)}{x^2-2x}, \quad g(x) = x$

x	-1	0	1	1.5	2	2.5	3
f(x)							
g(x)							

53. $f(x) = \frac{x-2}{x^2-2x}, \quad g(x) = \frac{1}{x}$

x	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	3
f(x)							
g(x)							

54. $f(x) = \frac{2x-6}{x^2-7x+12}, \quad g(x) = \frac{2}{x-4}$

x	0	1	2	3	4	5	6
f(x)							
g(x)							

En los Ejercicios 55-68, (a) exprese el dominio de la función, (b) identifique todas las intersecciones con los ejes coordenados, (c) identifique cualesquiera asíntotas verticales y oblicuas y (d) localice puntos adicionales de solución, según sea necesario, para trazar la gráfica de la función racional.

55. $h(x) = \frac{x^2-9}{x}$

56. $g(x) = \frac{x^2+5}{x}$

57. $f(x) = \frac{2x^2+1}{x}$

58. $f(x) = \frac{1-x^2}{x}$

59. $g(x) = \frac{x^2+1}{x}$

60. $h(x) = \frac{x^2}{x-1}$

61. $f(t) = -\frac{t^2+1}{t+5}$

62. $f(x) = \frac{x^2}{3x+1}$

63. $f(x) = \frac{x^3}{x^2-4}$

64. $g(x) = \frac{x^3}{2x^2-8}$

65. $f(x) = \frac{x^2-x+1}{x-1}$

66. $f(x) = \frac{2x^2-5x+5}{x-2}$

67. $f(x) = \frac{2x^3-x^2-2x+1}{x^2+3x+2}$

68. $f(x) = \frac{2x^3+x^2-8x-4}{x^2-3x+2}$



ESTUDIO ANALÍTICO, NUMÉRICO Y GRÁFICO En los Ejercicios 51-54, haga lo siguiente.

- Determine los dominios de f y g .
- Simplifique f y encuentre cualesquiera asíntotas verticales de la gráfica de f .
- Compare las funciones al completar la tabla.
- Use una calculadora de gráficas para graficar f y g en la misma pantalla.
- Explique por qué la calculadora de gráficas puede no mostrar la diferencia en los dominios de f y g .



En los Ejercicios 69-72, use una calculadora de gráficas para graficar la función racional. Dé el dominio de la función e identifique cualesquiera asíntotas. A continuación utilice el zoom lo suficientemente lejos como para que la gráfica aparezca como recta. Identifique la recta.

69. $f(x) = \frac{x^2 + 5x + 8}{x + 3}$

70. $f(x) = \frac{2x^2 + x}{x + 1}$

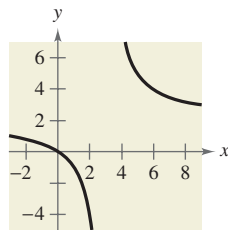
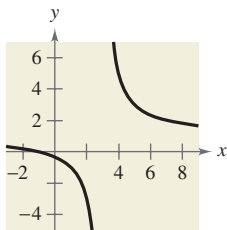
71. $g(x) = \frac{1 + 3x^2 - x^3}{x^2}$

72. $h(x) = \frac{12 - 2x - x^2}{2(4 + x)}$

RAZONAMIENTO GRÁFICO En los Ejercicios 73-76, (a) utilice la gráfica para determinar cualesquiera intersecciones con el eje x de la gráfica de la función racional y (b) haga $y = 0$ y resuelva la ecuación resultante para confirmar su resultado en el inciso (a).

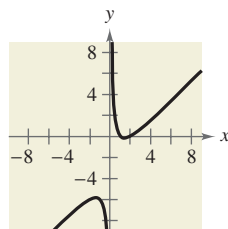
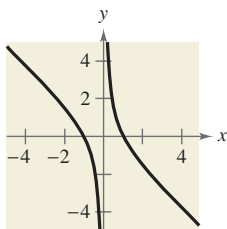
73. $y = \frac{x + 1}{x - 3}$

74. $y = \frac{2x}{x - 3}$



75. $y = \frac{1}{x} - x$

76. $y = x - 3 + \frac{2}{x}$



77. CONTAMINACIÓN El costo C (en millones de dólares) de eliminar $p\%$ de contaminantes industriales y municipales, descargados en un río, está dado por

$$C = \frac{255p}{100 - p}, \quad 0 \leq p < 100.$$



- (a) Use una calculadora de gráficas para graficar la función de costo.
- (b) Encuentre los costos de eliminar 10%, 40% y 75% de los contaminantes.
- (c) De acuerdo con este modelo, ¿sería posible eliminar 100% de los contaminantes? Explique.

78. RECICLAR En un proyecto piloto, una municipalidad rural recibe contenedores de reciclaje para separar y almacenar productos reciclables. El costo C (en dólares)

de suministrar contenedores a $p\%$ de la población está dado por

$$C = \frac{25\,000p}{100 - p}, \quad 0 \leq p < 100.$$

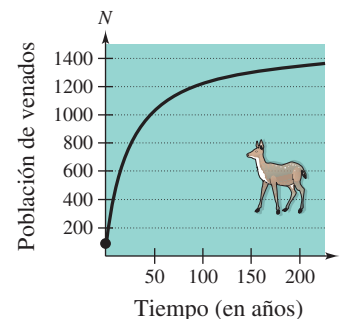


- (a) Use una calculadora de gráficas para graficar la función de costo.
- (b) Encuentre los costos de eliminar 15%, 50% y 90% de los contaminantes.
- (c) De acuerdo con este modelo, ¿sería posible suministrar contenedores a 100% de los residentes? Explique.

79. CRECIMIENTO POBLACIONAL La comisión de caza introduce 100 venados en terrenos estatales de cacería recién adquiridos. La población N del rebaño está modelada por

$$N = \frac{20(5 + 3t)}{1 + 0.04t}, \quad t \geq 0$$

donde t es el tiempo en años (vea figura).



- (a) Encuentre las poblaciones cuando $t = 5$, $t = 10$ y $t = 25$.
- (b) ¿Cuál es el tamaño limitante del rebaño a medida que aumenta el tiempo?

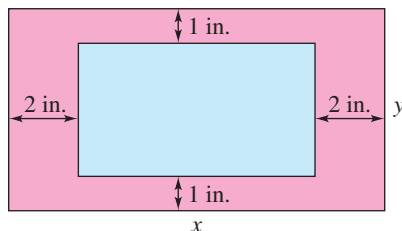
80. CONCENTRACIÓN DE UNA MEZCLA Un tanque de 1000 litros contiene 50 litros de una solución de salmuera al 25%. Se agregan x litros de una solución de salmuera al 75% al tanque.

- (a) Demuestre que la concentración C , la proporción entre salmuera y la solución total, en la mezcla final es

$$C = \frac{3x + 50}{4(x + 50)}.$$

- (b) Determine el dominio de la función basado en las restricciones físicas del problema.
- (c) Trace una gráfica de la función de la concentración.
- (d) A medida que el tanque se llena, ¿qué ocurre con la proporción a la que está aumentando la concentración de salmuera? ¿A qué porcentaje parece aproximarse la concentración de salmuera?

- 81. DISEÑO DE PÁGINA** Una página que mide x pulgadas de ancho y y pulgadas de alto contiene 30 pulgadas cuadradas de material impreso. Los márgenes superior e inferior son de 1 pulgada de profundidad y los márgenes de cada lado son de 2 pulgadas de ancho (vea figura).



- (a) Escriba una función para el área total A de la página en términos de x .
- (b) Determine el dominio de la función con base en las restricciones físicas del problema.



- (c) Use una calculadora de gráficas para graficar la función de área y aproxime las dimensiones de la página para las que se use la mínima cantidad de papel. Verifique numéricamente su respuesta usando el comando *table* de la calculadora.

- 82. DISEÑO DE PÁGINA** Una página rectangular está diseñada para contener 64 pulgadas cuadradas de material impreso. Los márgenes superior e inferior de la página miden 1 pulgada de profundidad cada uno; los márgenes de cada lado miden $1\frac{1}{2}$ pulgadas de ancho. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la página para que se use la cantidad mínima de papel?

- 83. PROMEDIO DE RAPIDEZ** Un automovilista promedió 50 millas por hora en un viaje redondo entre Akron, Ohio, y Columbus, Ohio, que están a 100 millas entre sí. El promedio de magnitudes de rapidez de ida y vuelta fueron x y y millas por hora, respectivamente.

- (a) Demuestre que $y = \frac{25x}{x - 25}$.

- (b) Determine las asíntotas verticales y horizontales de la gráfica de la función.



- (c) Use una calculadora de gráficas para graficar la función.
- (d) Complete la tabla siguiente.

x	30	35	40	45	50	55	60
y							

- (e) ¿Los resultados de la tabla son los que usted esperaba?
- (f) ¿Es posible promediar 20 millas por hora en una dirección y todavía promediar 50 millas por hora en el viaje redondo? Explique.

EXPLORACIÓN

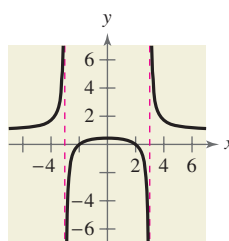
- 84. ESCRITURA** ¿Toda función racional es una función polinomial? ¿Toda función polinomial es una función racional? Explique.

¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 85-87, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

- 85.** Un polinomio puede tener un número infinito de asíntotas verticales.
- 86.** La gráfica de una función racional nunca puede cortar una de sus asíntotas.
- 87.** La gráfica de una función puede tener una asíntota vertical, una horizontal y una oblicua.

BIBLIOTECA DE FUNCIONES GENERATRICES En los Ejercicios 88 y 89, identifique la función racional representada por la gráfica.

88.



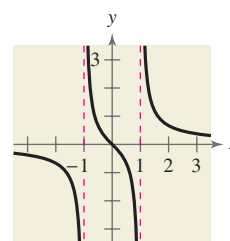
$$(a) f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4}$$

$$(b) f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 9}$$

$$(c) f(x) = \frac{x - 4}{x^2 - 9}$$

$$(d) f(x) = \frac{x - 9}{x^2 - 4}$$

89.



$$(a) f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

$$(b) f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

$$(c) f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$$

$$(d) f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

90. TOQUE FINAL Escriba una función racional f que tenga las características especificadas. (Hay numerosas respuestas correctas.)

- (a) Asíntota vertical: $x = 2$
Asíntota horizontal: $y = 0$
Cero: $x = 1$
- (b) Asíntota vertical: $x = -1$
Asíntota horizontal: $y = 0$
Cero: $x = 2$
- (c) Asíntotas verticales: $x = -2, x = 1$
Asíntota horizontal: $y = 2$
Ceros: $x = 3, x = -3$
- (d) Asíntota vertical: $x = -1, x = 2$
Asíntota horizontal: $y = -2$
Ceros: $x = -2, x = 3$

PROYECTO: DEPARTAMENTO DE DEFENSA Para resolver una aplicación extendida que analice el número total del personal del Departamento de Defensa de 1980 a 2007, visite el sitio web de este texto en academic.cengage.com. (Fuente: U.S. Department of Defense)

2.7 DESIGUALDADES NO LINEALES

Lo que debe aprender

- Resolver desigualdades polinomiales.
- Resolver desigualdades racionales.
- Usar desigualdades para modelar y resolver problemas de la vida real.

Por qué debe aprenderlo

Se pueden usar desigualdades para modelar y resolver problemas de la vida real. Por ejemplo, en el Ejercicio 77 en la página 202 se usa una desigualdad polinomial para modelar la inscripción escolar en Estados Unidos.



Ellen Senisi/The Image Works

Desigualdades polinomiales

Para resolver una desigualdad polinomial, por ejemplo $x^2 - 2x - 3 < 0$, se puede usar el hecho de que un polinomio puede cambiar signos sólo en sus ceros (los valores de x que igualen a cero el polinomio). Entre dos ceros consecutivos, un polinomio debe ser enteramente positivo o enteramente negativo. Esto significa que cuando los ceros reales de un polinomio se ponen en orden, dividen la recta numérica real en intervalos en los que el polinomio no tiene cambios de signo. Estos ceros son los **números de referencia** de la desigualdad, y los intervalos resultantes son los **intervalos de prueba** para la desigualdad. Por ejemplo, el polinomio citado líneas antes se factoriza como

$$x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$$

y tiene dos ceros, $x = -1$ y $x = 3$. Estos ceros dividen la recta numérica real en tres intervalos de prueba:

$$(-\infty, -1), (-1, 3) \text{ y } (3, \infty). \quad (\text{Vea Figura 2.52.})$$

Por tanto, para resolver la desigualdad $x^2 - 2x - 3 < 0$ sólo es necesario probar un valor de cada uno de estos intervalos de prueba para determinar si satisface la desigualdad original. Si es así, se concluye que el intervalo es una solución de la desigualdad.

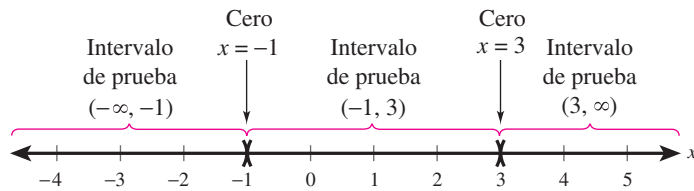


FIGURA 2.52 Tres intervalos de prueba para $x^2 - 2x - 3$

Se puede usar el mismo método básico para determinar los intervalos de prueba para cualquier polinomio.

Hallar intervalos de prueba para un polinomio

Para determinar los intervalos en los que los valores de un polinomio son enteramente negativos o enteramente positivos, siga estos pasos.

1. Halle todos los ceros reales del polinomio y acomódelos los ceros en orden creciente (de menor a mayor). Estos ceros son los números de referencia del polinomio.
2. Use los números de referencia del polinomio para determinar sus intervalos de prueba.
3. Escoja un valor representativo de x en cada intervalo de prueba y evalúe el polinomio en ese valor. Si el valor del polinomio es negativo, el polinomio tendrá valores negativos para todo valor de x del intervalo; si el valor del polinomio es positivo, el polinomio tendrá valores positivos para todo valor de x en el intervalo.

Ayuda de álgebra

En el Apéndice A.3 se pueden repasar técnicas para factorizar polinomios.

Ejemplo 1 Resolver una desigualdad polinomial

Resuelva $x^2 - x - 6 < 0$.

Solución

Si factorizamos el polinomio como

$$x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3)$$

se verá que los números de referencia son $x = -2$ y $x = 3$. Por tanto, los intervalos de prueba del polinomio son

$$(-\infty, -2), (-2, 3) \text{ y } (3, \infty). \quad \text{Intervalos de prueba}$$

En cada intervalo de prueba, escoja un valor representativo de x y evalúe el polinomio.

Intervalo de prueba	Valor de x	Valor del polinomio	Conclusión
$(-\infty, -2)$	$x = -3$	$(-3)^2 - (-3) - 6 = 6$	Positivo
$(-2, 3)$	$x = 0$	$(0)^2 - (0) - 6 = -6$	Negativo
$(3, \infty)$	$x = 4$	$(4)^2 - (4) - 6 = 6$	Positivo

A partir de lo anterior se concluye que la desigualdad se satisface para todos los valores de x en $(-2, 3)$. Esto implica que la solución de la desigualdad $x^2 - x - 6 < 0$ es el intervalo $(-2, 3)$, como se muestra en la Figura 2.53. Observe que la desigualdad original contiene un símbolo “menor que”. Esto significa que el conjunto solución no contiene los puntos extremos del intervalo de prueba $(-2, 3)$.

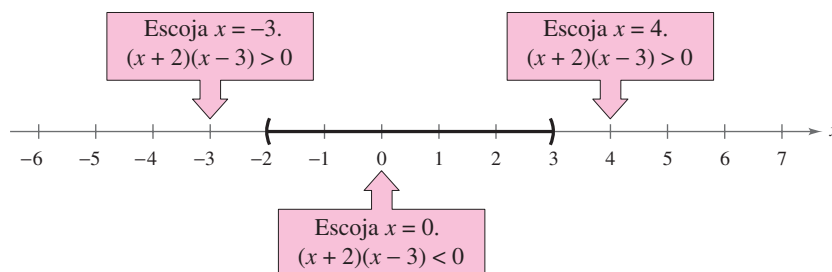


FIGURA 2.53

PUNTO de repaso ➔ Ahora trate de hacer el Ejercicio 21.

Lo mismo que con desigualdades lineales, se puede verificar lo razonable de una solución si sustituimos valores de x en la desigualdad original. Por ejemplo, para verificar la solución encontrada en el Ejemplo 1, trate de sustituir varios valores de x del intervalo $(-2, 3)$ en la desigualdad

$$x^2 - x - 6 < 0.$$

Cualesquiera que sean los valores de x que escoja, la desigualdad debe satisfacerse.

También se puede usar una gráfica para verificar el resultado del Ejemplo 1. Trace la gráfica de $y = x^2 - x - 6$, como se muestra en la Figura 2.54. Observe que la gráfica está abajo del eje x en el intervalo $(-2, 3)$.

En el Ejemplo 1, la desigualdad polinomial está dada en forma general (con el polinomio en un lado y cero en el otro). Siempre que éste no sea el caso, se debe iniciar el proceso de solución escribiendo la desigualdad en forma general.

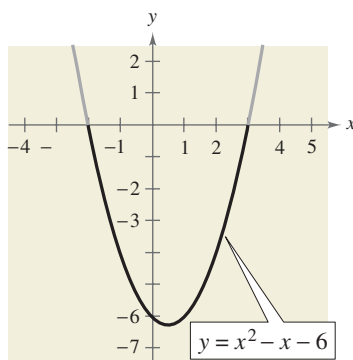


FIGURA 2.54

Ejemplo 2 Resolver una desigualdad polinomial

Resuelva $2x^3 - 3x^2 - 32x > -48$.

Solución

$$2x^3 - 3x^2 - 32x + 48 > 0$$

Escribir en forma general

$$(x - 4)(x + 4)(2x - 3) > 0$$

Factorizar.

Los números de referencia son $x = -4$, $x = \frac{3}{2}$ y $x = 4$, y los intervalos de prueba son $(-\infty, -4)$, $(-4, \frac{3}{2})$, $(\frac{3}{2}, 4)$ y $(4, \infty)$.

Intervalo de prueba	Valor de x	Valor del polinomio	Conclusión
$(-\infty, -4)$	$x = -5$	$2(-5)^3 - 3(-5)^2 - 32(-5) + 48$	Negativo
$(-4, \frac{3}{2})$	$x = 0$	$2(0)^3 - 3(0)^2 - 32(0) + 48$	Positivo
$(\frac{3}{2}, 4)$	$x = 2$	$2(2)^3 - 3(2)^2 - 32(2) + 48$	Negativo
$(4, \infty)$	$x = 5$	$2(5)^3 - 3(5)^2 - 32(5) + 48$	Positivo

A partir de esto se puede concluir que la desigualdad se satisface en los intervalos abiertos $(-4, \frac{3}{2})$ y $(4, \infty)$. Por tanto, el conjunto solución es $(-4, \frac{3}{2}) \cup (4, \infty)$, como se ve en la Figura 2.55.

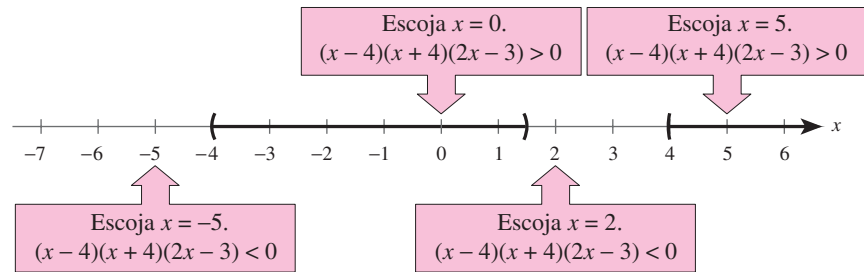


FIGURA 2.55

PUNTO de repaso Ahora trate de hacer el Ejercicio 27.

Ejemplo 3 Resolver una desigualdad polinomial

Resuelva $4x^2 - 5x > 6$.

Solución algebraica

$$4x^2 - 5x - 6 > 0$$

Escribir en forma general.

$$(x - 2)(4x + 3) > 0$$

Factorizar.

Números de referencia: $x = -\frac{3}{4}$, $x = 2$

Intervalos de prueba: $(-\infty, -\frac{3}{4})$, $(-\frac{3}{4}, 2)$, $(2, \infty)$

Prueba: ¿Es $(x - 2)(4x + 3) > 0$?

Después de probar estos intervalos, se puede ver que el polinomio $4x^2 - 5x - 6$ es positivo en los intervalos abiertos $(-\infty, -\frac{3}{4})$ y $(2, \infty)$. En consecuencia, el conjunto solución de la desigualdad es $(-\infty, -\frac{3}{4}) \cup (2, \infty)$.

Solución gráfica

Antes que nada escriba la desigualdad polinomial $4x^2 - 5x > 6$ como $4x^2 - 5x - 6 > 0$. A continuación use una calculadora de gráficas para graficar $y = 4x^2 - 5x - 6$. En la Figura 2.56, se puede ver que la gráfica está arriba del eje x cuando x es menor que $-\frac{3}{4}$ o cuando x es mayor a 2. Por tanto, gráficamente se puede aproximar que el conjunto solución es $(-\infty, -\frac{3}{4}) \cup (2, \infty)$.

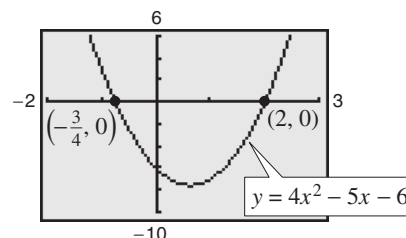


FIGURA 2.56

PUNTO de repaso Ahora trate de hacer el Ejercicio 23.

Tip de estudio

Es posible que el estudiante encuentre más fácil determinar el signo de un polinomio a partir de su forma *factorizada*. Por citar un caso, en el Ejemplo 3, si el valor de prueba $x = 1$ se sustituye en la forma factorizada

$$(x - 2)(4x + 3)$$

se puede ver que el patrón de signos de los factores es

$$(-)(+)$$

lo cual da un resultado negativo. Trate de usar las formas factorizadas de los polinomios para determinar los signos de éstos en los intervalos de prueba de los otros ejemplos de esta sección.

Cuando resuelva una desigualdad polinomial, asegúrese de haber considerado el tipo particular de símbolo de desigualdad dado en ésta. Por citar un caso, en el Ejemplo 3, observe que la desigualdad original contenía un símbolo “mayor que” y la solución estuvo formada por dos intervalos abiertos. Si la desigualdad original hubiera sido

$$4x^2 - 5x \geq 6$$

la solución hubiera estado formada por los intervalos $(-\infty, -\frac{3}{4}]$ y $[2, \infty)$.

Cada una de las desigualdades polinomiales de los Ejemplos 1, 2 y 3 tiene un conjunto de solución formado por un solo intervalo o por la unión de dos intervalos. Cuando resuelva los ejercicios para esta sección, busque conjuntos solución poco comunes, como se ilustra en el Ejemplo 4.

Ejemplo 4 Conjuntos de solución poco comunes

- a. El conjunto solución de la siguiente desigualdad está formado por todo el conjunto de los números reales, $(-\infty, \infty)$. En otras palabras, el valor de la expresión cuadrática $x^2 + 2x + 4$ es positivo para todo valor real de x .

$$x^2 + 2x + 4 > 0$$

- b. El conjunto solución de la siguiente desigualdad está formado por el número real $\{-1\}$, porque la expresión cuadrática $x^2 + 2x + 1$ tiene sólo un número de referencia, $x = -1$, y es el único valor que satisface la desigualdad.

$$x^2 + 2x + 1 \leq 0$$

- c. El conjunto solución de la siguiente desigualdad es vacío. En otras palabras, la expresión cuadrática $x^2 + 3x + 5$ no es menor a cero para ningún valor de x .

$$x^2 + 3x + 5 < 0$$

- d. El conjunto solución de la siguiente desigualdad está formado por todos los números reales excepto $x = 2$. En notación de intervalos, este conjunto solución se puede escribir como $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$.

$$x^2 - 4x + 4 > 0$$

PUNTO de repaso Ahora trate de hacer el Ejercicio 29.

Desigualdades racionales

Los conceptos de números de referencia e intervalos de prueba se pueden ampliar a las desigualdades racionales. Para hacer esto, use el hecho de que el valor de una expresión racional puede cambiar de signo sólo en sus *ceros* (los valores de x para los cuales su numerador es cero) y sus *valores indefinidos* (los valores de x para los cuales su denominador es cero). Estos dos tipos de números forman los *números de referencia* de una desigualdad racional. Cuando resuelva una desigualdad racional, empiece por escribirla en forma general con la expresión racional a la izquierda y cero a la derecha.

Tip de estudio

En el Ejemplo 5, si usted escribe 3 como $\frac{3}{1}$, debe ver que el mínimo común denominador es $(x - 5)(1) = x - 5$. Por tanto, puede reescribir la forma general como

$$\frac{2x - 7}{x - 5} - \frac{3(x - 5)}{x - 5} \leq 0,$$

que se simplifica como se muestra.

Ejemplo 5 Resolver una desigualdad racional

Resuelva $\frac{2x - 7}{x - 5} \leq 3$.

Solución

$$\frac{2x - 7}{x - 5} \leq 3$$

Escribir la desigualdad original.

$$\frac{2x - 7}{x - 5} - 3 \leq 0$$

Escribir en forma general.

$$\frac{2x - 7 - 3x + 15}{x - 5} \leq 0$$

Encontrar el mínimo común denominador y reste fracciones.

$$\frac{-x + 8}{x - 5} \leq 0$$

Simplificar.

Números de referencia: $x = 5, x = 8$ Ceros y valores indefinidos de la expresión racional.

Intervalos de prueba: $(-\infty, 5), (5, 8), (8, \infty)$

Prueba: ¿Es... $\frac{-x + 8}{x - 5} \leq 0$?

Después de probar estos intervalos, como se muestra en la Figura 2.57, se puede ver que la desigualdad se satisface en los intervalos abiertos $(-\infty, 5)$ y $(8, \infty)$. Además, como $\frac{-x + 8}{x - 5} = 0$, cuando $x = 8$, se puede concluir que el conjunto solución está formado por todos los números reales en los intervalos $(-\infty, 5) \cup [8, \infty)$. (Asegúrese de usar un intervalo cerrado para indicar que x puede ser igual a 8.)

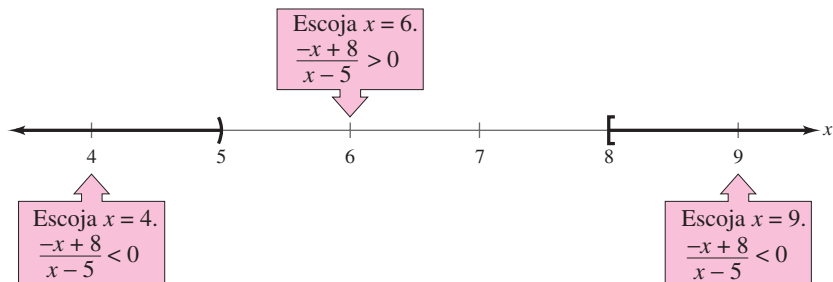


FIGURA 2.57

PUNTO de repaso

Ahora trate de hacer el Ejercicio 45.

Aplicaciones

Una aplicación común de las desigualdades proviene de finanzas y se relaciona con utilidades, ingresos y costos. La fórmula que relaciona estas tres cantidades es

$$\text{Utilidad} = \text{Ingreso} - \text{Costo}$$

$$U = I - C.$$

Ejemplo 6 Aumentar la utilidad para un producto

El departamento de mercadotecnia de un fabricante de calculadoras ha determinado que la demanda de un nuevo modelo es

$$p = 100 - 0.00001x, \quad 0 \leq x \leq 10\,000\,000 \quad \text{Ecuación de la demanda}$$

donde p es el precio por calculadora (en dólares) y x representa el número de calculadoras vendidas. (Si este modelo es preciso, nadie estaría dispuesto a pagar \$100 por la calculadora. En el otro extremo, la compañía no podría vender más de 10 millones de calculadoras.) El ingreso por vender x calculadoras es

$$I = xp = x(100 - 0.00001x) \quad \text{Ecuación del ingreso}$$

como se ve en la Figura 2.58. El costo total de producir x calculadoras es \$10 por cada aparato, más el costo de desarrollo de \$2 500 000. Por tanto, el costo total es

$$C = 10x + 2\,500\,000. \quad \text{Ecuación del costo}$$

¿Qué precio debe cobrar la compañía por calculadora para obtener una utilidad de al menos \$190 000 000?

Solución

Modelo

verbal:

$$\text{Utilidad} = \text{Ingreso} - \text{Costo}$$

$$\text{Ecuación: } U = I - C$$

$$U = 100x - 0.00001x^2 - (10x + 2\,500\,000)$$

$$U = -0.00001x^2 + 90x - 2\,500\,000$$

Para contestar la pregunta, resuelva la desigualdad

$$P \geq 190\,000\,000$$

$$-0.00001x^2 + 90x - 2\,500\,000 \geq 190\,000\,000.$$

Cuando escriba la desigualdad en forma general, encuentre los números de referencia y los intervalos de prueba y luego verifique un valor en cada intervalo de prueba, y puede hallar que la solución es

$$3\,500\,000 \leq x \leq 5\,500\,000$$

como se ve en la Figura 2.59. Sustituir los valores de x en la ecuación original del precio muestra que los precios de

$$\$45.00 \leq p \leq \$65.00$$

Dará una utilidad de al menos \$190 000 000.

PUNTO de repaso ➔ Ahora trate de hacer el Ejercicio 75.

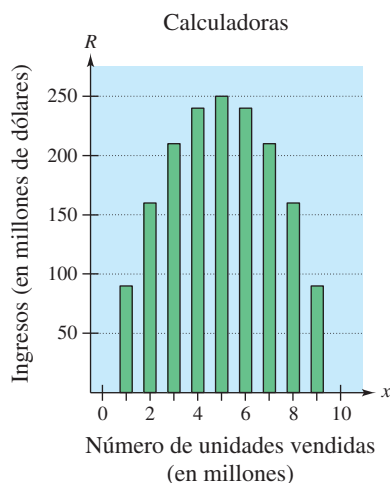


FIGURA 2.58

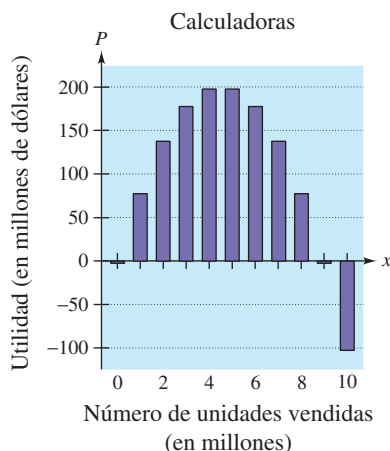


FIGURA 2.59

Otra aplicación común de las desigualdades es hallar el dominio de una expresión que contenga una raíz cuadrada, como se ve en el Ejemplo 7.

Ejemplo 7 Hallar el dominio de una expresión

Encuentre el dominio de $\sqrt{64 - 4x^2}$.

Solución algebraica

Recuerde que el dominio de una expresión es el conjunto de todos los valores de x para los cuales la expresión está definida. Como $\sqrt{64 - 4x^2}$ está definida (tiene valores reales) sólo si $64 - 4x^2$ es no negativa, el dominio está dado por $64 - 4x^2 \geq 0$.

$$64 - 4x^2 \geq 0 \quad \text{Escribir en forma general.}$$

$$16 - x^2 \geq 0 \quad \text{Dividir cada lado entre 4.}$$

$$(4 - x)(4 + x) \geq 0 \quad \text{Escribir en forma factorizada.}$$

Por tanto, la desigualdad tiene dos números de referencia: $x = -4$ y $x = 4$. Puede usar ambos para probar la desigualdad como sigue.

Números de referencia: $x = -4, x = 4$

Intervalos de prueba: $(-\infty, -4), (-4, 4), (4, \infty)$

Prueba: ¿Para qué valores de x es $\sqrt{64 - 4x^2} \geq 0$?

Una prueba muestra que la desigualdad se satisface en el *intervalo cerrado* $[-4, 4]$. Por tanto, el dominio de la expresión $\sqrt{64 - 4x^2}$ es el intervalo $[-4, 4]$.

PUNTO de repaso ➔ Ahora trate de hacer el Ejercicio 59.

Solución gráfica

Empiece por trazar la gráfica de la ecuación $y = \sqrt{64 - 4x^2}$, como se muestra en la Figura 2.60. De la gráfica, se puede determinar que los valores de x se extienden de -4 a 4 (incluidos -4 y 4). En consecuencia, el dominio de la expresión $\sqrt{64 - 4x^2}$ es el intervalo $[-4, 4]$.

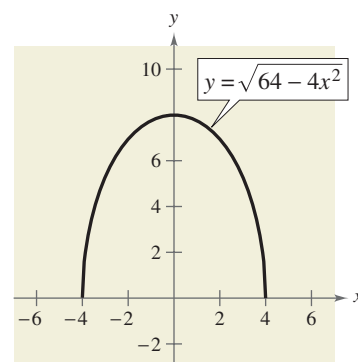


FIGURA 2.60



FIGURA 2.61

Para analizar un intervalo de prueba, escoja un valor representativo de x en el intervalo y evalúe la expresión en ese valor. Por citar un caso, en el Ejemplo 7, si sustituimos cualquier número del intervalo $[-4, 4]$ en la expresión $\sqrt{64 - 4x^2}$, obtendremos un número no negativo bajo el símbolo radical que se simplifica a un número real. Si sustituimos cualquier número de los intervalos $(-\infty, -4)$ y $(4, \infty)$, obtendremos un número complejo. Podría ser útil trazar una representación visual de los intervalos, como se muestra en la Figura 2.61.

DISCUSIÓN EN CLASE

Análisis de utilidad Considere la relación

$$P = I - C$$

descrita en la página 199. Escriba un párrafo que discuta por qué podría ser benéfico resolver $P < 0$ si el negocio fuera suyo. Use la situación descrita en el Ejemplo 6 para ilustrar su razonamiento.

2.7 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

VOCABULARIO: Llene los espacios en blanco.

- Entre dos ceros consecutivos, un polinomio debe ser enteramente _____ o enteramente _____.
- Para resolver una desigualdad polinomial, encuentre los números _____ del polinomio y úselos para crear _____ para la desigualdad.
- Los números de referencia de una expresión racional son su _____ y su _____.
- La fórmula que relaciona costo, ingresos y utilidades es _____.

HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 5-8, determine si cada valor de x es una solución de la desigualdad.

Desigualdad	Valores	
5. $x^2 - 3 < 0$	(a) $x = 3$	(b) $x = 0$
	(c) $x = \frac{3}{2}$	(d) $x = -5$
6. $x^2 - x - 12 \geq 0$	(a) $x = 5$	(b) $x = 0$
	(c) $x = -4$	(d) $x = -3$
7. $\frac{x+2}{x-4} \geq 3$	(a) $x = 5$	(b) $x = 4$
	(c) $x = -\frac{9}{2}$	(d) $x = \frac{9}{2}$
8. $\frac{3x^2}{x^2+4} < 1$	(a) $x = -2$	(b) $x = -1$
	(c) $x = 0$	(d) $x = 3$

En los Ejercicios 9-12, encuentre los números de referencia de la expresión.

9. $3x^2 - x - 2$	10. $9x^3 - 25x^2$
11. $\frac{1}{x-5} + 1$	12. $\frac{x}{x+2} - \frac{2}{x-1}$

En los Ejercicios 13-30, resuelva la desigualdad y grafique la solución en la recta numérica real.

- $x^2 < 9$
- $(x+2)^2 \leq 25$
- $x^2 + 4x + 4 \geq 9$
- $x^2 + x < 6$
- $x^2 + 2x - 3 < 0$
- $x^2 > 2x + 8$
- $3x^2 - 11x > 20$
- $-2x^2 + 6x + 15 \leq 0$
- $x^2 - 3x - 18 > 0$
- $x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \leq 0$
- $x^3 - 3x^2 - x > -3$
- $2x^3 + 13x^2 - 8x - 46 \geq 6$
- $4x^2 - 4x + 1 \leq 0$
- $x^2 + 3x + 8 > 0$
- $x^2 \leq 16$
- $(x-3)^2 \geq 1$
- $x^2 - 6x + 9 < 16$
- $x^2 + 2x > 3$

En los Ejercicios 31-36, resuelva la desigualdad y escriba el conjunto de solución en notación de intervalos.

- $4x^3 - 6x^2 < 0$
- $4x^3 - 12x^2 > 0$
- $x^3 - 4x \geq 0$
- $2x^3 - x^4 \leq 0$
- $(x-1)^2(x+2)^3 \geq 0$
- $x^4(x-3) \leq 0$



ANÁLISIS GRÁFICO En los Ejercicios 37-40, use una calculadora de gráficas para graficar la ecuación. Use la gráfica para aproximar los valores de x que satisfagan cada una de las desigualdades.

Ecuación	Desigualdades	
37. $y = -x^2 + 2x + 3$	(a) $y \leq 0$	(b) $y \geq 3$
38. $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$	(a) $y \leq 0$	(b) $y \geq 7$
39. $y = \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{2}x$	(a) $y \geq 0$	(b) $y \leq 6$
40. $y = x^3 - x^2 - 16x + 16$	(a) $y \leq 0$	(b) $y \geq 36$

En los Ejercicios 41-54, resuelva la desigualdad y grafique la solución en la recta numérica real.

- $\frac{4x-1}{x} > 0$
- $\frac{x^2-1}{x} < 0$
- $\frac{3x-5}{x-5} \geq 0$
- $\frac{5+7x}{1+2x} \leq 4$
- $\frac{x+6}{x+1} - 2 < 0$
- $\frac{x+12}{x+2} - 3 \geq 0$
- $\frac{2}{x+5} > \frac{1}{x-3}$
- $\frac{5}{x-6} > \frac{3}{x+2}$
- $\frac{1}{x-3} \leq \frac{9}{4x+3}$
- $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{x+3}$
- $\frac{x^2+2x}{x^2-9} \leq 0$
- $\frac{x^2+x-6}{x} \geq 0$
- $\frac{3}{x-1} + \frac{2x}{x+1} > -1$
- $\frac{3x}{x-1} \leq \frac{x}{x+4} + 3$



ANÁLISIS GRÁFICO En los Ejercicios 55-58, use una calculadora de gráficas para graficar la ecuación. Use la gráfica para aproximar los valores de x que satisfagan cada desigualdad.

- | Ecuación | Desigualdades |
|------------------------------|-------------------------------|
| 55. $y = \frac{3x}{x-2}$ | (a) $y \leq 0$ (b) $y \geq 6$ |
| 56. $y = \frac{2(x-2)}{x+1}$ | (a) $y \leq 0$ (b) $y \geq 8$ |
| 57. $y = \frac{2x^2}{x^2+4}$ | (a) $y \geq 1$ (b) $y \leq 2$ |
| 58. $y = \frac{5x}{x^2+4}$ | (a) $y \geq 1$ (b) $y \leq 0$ |

En los Ejercicios 59-64, encuentre el dominio de x en la expresión. Use una calculadora de gráficas para verificar su resultado.

- | | |
|----------------------------------|------------------------------|
| 59. $\sqrt{4-x^2}$ | 60. $\sqrt{x^2-4}$ |
| 61. $\sqrt{x^2-9x+20}$ | 62. $\sqrt{81-4x^2}$ |
| 63. $\sqrt{\frac{x}{x^2-2x-35}}$ | 64. $\sqrt{\frac{x}{x^2-9}}$ |

En los Ejercicios 65-70, resuelva la desigualdad. (Redondee sus respuestas a dos lugares decimales.)

- | | |
|---------------------------------|--------------------------------|
| 65. $0.4x^2 + 5.26 < 10.2$ | |
| 66. $-1.3x^2 + 3.78 > 2.12$ | |
| 67. $-0.5x^2 + 12.5x + 1.6 > 0$ | |
| 68. $1.2x^2 + 4.8x + 3.1 < 5.3$ | |
| 69. $\frac{1}{2.3x-5.2} > 3.4$ | 70. $\frac{2}{3.1x-3.7} > 5.8$ |

ALTURA DE UN PROYECTIL En los Ejercicios 71-72, use la ecuación de posición $s = -16t^2 + v_0t + s_0$, donde s representa la altura de un objeto (en pies), v_0 la rapidez inicial del objeto (en pies por segundo), s_0 la altura inicial del objeto (en pies) y t el tiempo (en segundos).

71. Un proyectil es disparado directamente hacia arriba desde el nivel del suelo ($s_0 = 0$) con una rapidez inicial de 160 pies por segundo.
- ¿En qué instante regresará al nivel del suelo?
 - ¿Cuándo excederá de 384 pies de altura?
72. Un proyectil es disparado directamente hacia arriba desde el nivel del suelo ($s_0 = 0$) con una rapidez inicial de 128 pies por segundo.
- ¿En qué instante regresará al nivel del suelo?
 - ¿Cuándo excederá de 128 pies de altura?
73. **GEOMETRÍA** Un campo deportivo rectangular con perímetro de 100 metros ha de tener un área de al menos 500 metros cuadrados. ¿Dentro de qué límites debe estar la longitud del rectángulo?

74. **GEOMETRÍA** Un estacionamiento rectangular con perímetro de 440 pies ha de tener un área de al menos 8000 pies cuadrados. ¿Dentro de qué límites debe estar la longitud del rectángulo?

75. **COSTO, INGRESO Y UTILIDAD** Las ecuaciones de ingreso y costo para un producto son $R = x(75 - 0.0005x)$ y $C = 30x + 250\,000$, donde R y C se miden en dólares y x representa el número de unidades vendidas. ¿Cuántas unidades deben ser vendidas para obtener una utilidad de al menos \$750 000? ¿Cuál es el precio por unidad?

76. **COSTO, INGRESO Y UTILIDAD** Las ecuaciones de ingreso y costo para un producto son

$$R = x(50 - 0.0002x) \quad y \quad C = 12x + 150\,000$$

donde R y C se miden en dólares y x representa el número de unidades vendidas. ¿Cuántas unidades deben ser vendidas para obtener una utilidad de al menos \$1 650 000? ¿Cuál es el precio por unidad?



77. **INSCRIPCIONES ESCOLARES** Los números N (en millones) de estudiantes inscritos en escuelas en Estados Unidos de 1995 a 2006 se muestran en la tabla. (Fuente: U.S. Census Bureau)

Año	Número, N
1995	69.8
1996	70.3
1997	72.0
1998	72.1
1999	72.4
2000	72.2
2001	73.1
2002	74.0
2003	74.9
2004	75.5
2005	75.8
2006	75.2

- Use una calculadora de gráficas para crear una gráfica de dispersión de los datos. Con t represente el año, con $t = 5$ correspondiente a 1995.
- Use el comando *regression* de una calculadora de gráficas para hallar un modelo cuártico para los datos.
- Grafique el modelo y la gráfica de dispersión en la misma pantalla. ¿Qué tan bien se ajusta el modelo a los datos?
- De acuerdo con el modelo, ¿durante cuáles años excederá de 74 millones el número de estudiantes inscritos en escuelas?
- ¿Es válido el modelo para predicciones de largo plazo de inscripción de estudiantes en escuelas? Explique.

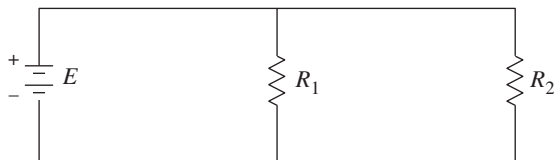
78. CARGA SEGURA La máxima carga segura uniformemente distribuida en una sección de un pie, de una viga de madera de dos pulgadas de ancho, está aproximada por el modelo $\text{Carga} = 168.5d^2 - 472.1$, donde d es la profundidad de la viga.

- (a) Evalúe el modelo para $d = 4$, $d = 6$, $d = 8$, $d = 10$ y $d = 12$. Use los resultados para crear una gráfica de barras.
- (b) Determine la profundidad mínima de la viga que soportará con seguridad una carga de 2000 libras.

79. RESISTORES Cuando dos resistores de resistencias R_1 y R_2 están conectados en paralelo (vea figura), la resistencia total R satisface la ecuación

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Encuentre R_1 para un circuito paralelo en el que $R_2 = 2$ ohms y R debe ser al menos de 1 ohm.



80. SALARIOS DE MAESTROS Los salarios medios S (en miles de dólares) de profesores en Estados Unidos, de 2000 a 2007, se muestran en la tabla siguiente.

 Año	Salario, S
2000	42.2
2001	43.7
2002	43.8
2003	45.0
2004	45.6
2005	45.9
2006	48.2
2007	49.3

Un modelo que aproxima estos datos está dado por

$$S = \frac{42.6 - 1.95t}{1 - 0.06t}$$

donde t representa el año, con $t = 0$ correspondiente a 2000. (Fuente: Educational Research Service, Arlington, VA)

- (a) Use una calculadora de gráficas para crear una gráfica de dispersión de los datos. A continuación grafique el modelo en la misma pantalla.
- (b) ¿Qué tan bien se ajusta el modelo a los datos? Explique.

- (c) De acuerdo con el modelo, en qué año pasará de \$60 000 el salario para profesores?
- (d) ¿El modelo es válido para predicciones de largo plazo de salarios de profesores? Explique.

EXPLORACIÓN

¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 81 y 82, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

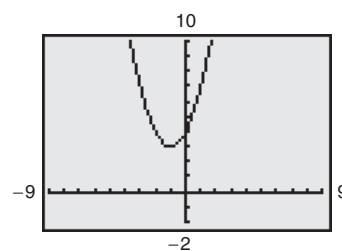
- 81.** Los ceros del polinomio $x^3 - 2x^2 - 11x + 12 \geq 0$ dividen la recta numérica real en cuatro intervalos de prueba.
- 82.** El conjunto solución de $\frac{3}{2}x^2 + 3x + 6 \geq 0$ es todo el conjunto de los números reales.

En los Ejercicios 83-86, (a) encuentre el(los) intervalo(s) para b tal que la ecuación tenga al menos una solución real y (b) escriba una conjetura acerca del(los) intervalo(s) basado en los valores de los coeficientes.

- 83.** $x^2 + bx + 4 = 0$ **84.** $x^2 + bx - 4 = 0$
85. $3x^2 + bx + 10 = 0$ **86.** $2x^2 + bx + 5 = 0$



87. ANÁLISIS GRÁFICO El estudiante puede usar calculadora de gráficas para verificar los resultados del Ejemplo 4. Por ejemplo, la gráfica de $y = x^2 + 2x + 4$ se muestra a continuación. Observe que los valores de y son mayores que 0 para todos los valores de x , como se indica en el Ejemplo 4(a). Use una calculadora de gráficas para graficar $y = x^2 + 2x + 1$, $y = x^2 + 3x + 5$ y $y = x^2 - 4x + 4$. Explique cómo se pueden usar las gráficas para verificar los resultados de los incisos (b), (c) y (d) del Ejemplo 4.



88. TOQUE FINAL Considere el polinomio

$$(x - a)(x - b)$$

y la recta numérica real que se muestra enseguida.



- (a) Identifique los puntos sobre la recta en los que el polinomio es cero.
- (b) En cada uno de los tres subintervalos de la recta, escriba el signo de cada factor y el signo del producto.
- (c) ¿En qué valores de x cambia de signos el polinomio?

2 RESUMEN DEL CAPÍTULO

¿Qué aprendió?

Explicación/Ejemplos

Ejercicios de repaso

Sección 2.1	Analizar gráficas de funciones cuadráticas (p. 126).	Sean a , b y c números reales con $a \neq 0$. La función dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$ se denomina función cuadrática. Su gráfica es una curva en forma de U llamada parábola.	1, 2
	Escribir funciones cuadráticas en forma estándar y usar los resultados para trazar gráficas de funciones (p. 129).	La función cuadrática $f(x) = a(x - h)^2 + k$, $a \neq 0$, está en forma estándar. La gráfica de f es una parábola cuyo eje es la recta vertical $x = h$ y cuyo vértice es (h, k) . Si $a > 0$, la parábola se abre hacia arriba; si $a < 0$, la parábola se abre hacia abajo.	3–20
	Encontrar valores mínimo y máximo de funciones cuadráticas en aplicaciones de la vida real (p. 131).	Considere $f(x) = ax^2 + bx + c$ con vértice $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(\frac{b}{2a}\right)\right)$. Si $a > 0$, f tiene un <i>mínimo</i> en $x = -b/(2a)$. Si $a < 0$, f tiene un <i>máximo</i> en $x = -b/(2a)$.	21–24
Sección 2.2	Usar transformaciones para trazar gráficas de funciones polinomiales (p. 136).	La gráfica de una función polinomial es continua (sin interrupciones, huecos ni intervalos) y sólo tiene cambios de dirección suaves y redondeados.	25–30
	Usar la prueba del coeficiente principal para determinar el comportamiento final de gráficas de funciones polinomiales (p. 138).	Considere la gráfica de $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$. Cuando n es impar: si $a_n > 0$, la gráfica baja por la izquierda y sube por la derecha; si $a_n < 0$, la gráfica sube por la izquierda y baja por la derecha. Cuando n es par: si $a_n > 0$, la gráfica sube por la izquierda y por la derecha; si $a_n < 0$, la gráfica baja por la izquierda y por la derecha.	31–34
	Hallar y usar ceros de funciones polinomiales como ayudas para el trazado (p. 139).	Si f es una función polinomial y a es un número real, lo que sigue es equivalente: (1) $x = a$ es un <i>cero</i> de f ; (2) $x = a$ es una <i>solución</i> de la ecuación $f(x) = 0$; (3) $(x - a)$ es un <i>factor</i> de $f(x)$, y (4) $(a, 0)$ es una intersección de la gráfica de f con el eje x .	35–44
	Usar el teorema de valor intermedio para ayudar a localizar ceros de funciones polinomiales (p. 143).	Sean a y b números reales tales que $a < b$. Si f es una función polinomial tal que $f(a) \neq f(b)$, entonces, en $[a, b]$ f toma todo valor entre $f(a)$ y $f(b)$.	45–48
Sección 2.3	Usar división larga para dividir polinomios entre otros polinomios (p. 150).	Dividendo Divisor $\begin{array}{r} x^2 + 3x + 5 \\ x + 1 \overline{) } \\ \underline{x + 1 } \\ 0x + 4 \\ \underline{0x + 1 } \\ 3 \end{array}$ Cociente Residuo Divisor $x^2 + 3x + 5 = (x + 1)(x + 2) + 3$	49–54
	Usar división sintética para dividir polinomios entre polinomios de la forma $(x - k)$ (p. 153).	Divisor: $x + 3$ $\begin{array}{r rrrrrr} -3 & 1 & 0 & -10 & -2 & 4 \\ & & -3 & 9 & 3 & -3 \\ \hline & 1 & -3 & -1 & 1 & 1 \end{array}$ Residuo: 1 Dividendo: $x^3 - 3x^2 - x + 1$	55–60
	Usar el teorema del residuo y el teorema del factor (p. 154).	El teorema del residuo: si un polinomio $f(x)$ se divide entre $x - k$, el residuo es $r = f(k)$. El teorema del factor: un polinomio $f(x)$ tiene un factor $(x - k)$ si y sólo si $f(k) = 0$.	61–66
	Usar la unidad imaginaria i para escribir números complejos (p. 159).	Si a y b son números reales, $a + bi$ es un número complejo. Dos números complejos $a + bi$ y $c + di$, escritos en forma estándar, son iguales entre sí si y sólo si $a = c$ y $b = d$.	67–70
Sección 2.4			

¿Qué aprendió?

Explicación/Ejemplos

Ejercicios de repaso

Sección 2.4	Sumar, restar y multiplicar números complejos (p. 160).	Suma: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$ Diferencia: $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$	71–78
	Usar conjugados complejos para escribir el cociente de dos números complejos en forma estándar (p. 162).	Los números $a + bi$ y $a - bi$ son conjugados complejos. Para escribir $(a + bi)/(c + di)$ en forma estándar, multiplique el numerador y el denominador por $c - di$.	79–82
	Hallar soluciones complejas de ecuaciones cuadráticas (p. 163).	Si a es un número positivo, la raíz cuadrada principal del número negativo $-a$ está definida como $\sqrt{-a} = \sqrt{a}i$.	83–86
Sección 2.5	Usar el teorema fundamental del álgebra para hallar el número de ceros de funciones polinomiales (p. 166).	El teorema fundamental del álgebra Si $f(x)$ es un polinomio de grado n , donde $n > 0$, entonces f tiene al menos un cero en el sistema de los números complejos.	87–92
	Hallar ceros racionales de funciones polinomiales (p. 167), y pares conjugados de ceros complejos (p. 170).	La prueba del cero racional relaciona los posibles ceros racionales de un polinomio con el coeficiente principal y con el término constante del polinomio. Sea $f(x)$ una función polinomial que tiene coeficientes reales. Si $a + bi$ ($b \neq 0$) es un cero de la función, el conjugado $a - bi$ también es un cero de la función.	93–102
	Hallar ceros de polinomios por factorización (p. 170).	Todo polinomio de grado $n > 0$ con coeficientes reales puede escribirse como producto de factores lineales y cuadráticos con coeficientes reales, donde los factores cuadráticos no tienen ceros reales.	103–110
	Usar la regla de Descartes de los signos (p. 173) y las reglas de cota superior e inferior (p. 174) para hallar ceros de polinomios.	Regla de Descartes de los signos Sea $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ un polinomio con coeficientes reales y $a_0 \neq 0$. 1. El número de <i>ceros reales positivos</i> de f es ya sea igual al número de variaciones en signo de $f(x)$ o menor que ese número por un entero par. 2. El número de <i>ceros reales negativos</i> de f es ya sea igual al número de variaciones en signo de $f(-x)$ o menor que ese número por un entero par.	111–114
Sección 2.6	Hallar los dominios (p. 181) y las asíntotas verticales y horizontales (p. 182) de funciones racionales.	El dominio de una función racional de x incluye todos los números reales excepto valores de x que hagan que el denominador sea igual a cero. La recta $x = a$ es una asíntota vertical de la gráfica de f si $f(x) \rightarrow \infty$ o $f(x) \rightarrow -\infty$ cuando $x \rightarrow a$, ya sea por la derecha o la izquierda. La recta $y = b$ es una asíntota horizontal de la gráfica de f si $f(x) \rightarrow b$ cuando $x \rightarrow \infty$ o $x \rightarrow -\infty$.	115–122
	Analizar y trazar gráficas de funciones racionales (p. 184) incluidas funciones con asíntotas oblicuas (p. 187).	Considere una función racional cuyo denominador es de grado 1 o mayor. Si el grado del numerador es exactamente uno más que el del denominador, la gráfica de la función tiene una asíntota oblicua.	123–138
	Usar funciones racionales para modelar y resolver problemas de la vida real (p. 188).	Una función racional se puede usar para modelar el costo de eliminar un determinado porcentaje de contaminantes de chimenea, en una compañía generadora de electricidad que quema carbón. (Vea Ejemplo 8.)	139–142
Sección 2.7	Resolver polinomios (p. 194) y resolver problemas reales (p. 198).	Use los conceptos de números de referencia e intervalos de prueba para resolver desigualdades tanto racionales como polinomiales.	143–150
	Usar desigualdades para modelar y resolver problemas de la vida real (p. 199).	Una aplicación común de las desigualdades relaciona la utilidad P , el ingreso R y el costo C . (Vea el Ejemplo 6.)	151, 152

2 EJERCICIOS DE REPASO

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios de números impares

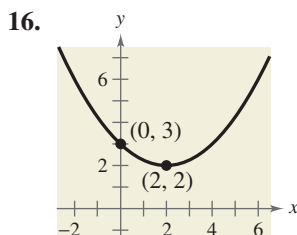
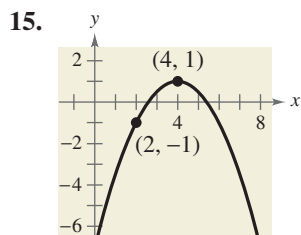
2.1 En los Ejercicios 1 y 2, grafique cada función. Compare la gráfica de cada función con la de $y = x^2$.

1. (a) $f(x) = 2x^2$
 (b) $g(x) = -2x^2$
 (c) $h(x) = x^2 + 2$
 (d) $k(x) = (x + 2)^2$
2. (a) $f(x) = x^2 - 4$
 (b) $g(x) = 4 - x^2$
 (c) $h(x) = (x - 3)^2$
 (d) $k(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1$

En los Ejercicios 3-14, escriba la función cuadrática en forma estándar y trace su gráfica. Identifique el vértice, eje de simetría e intersección(es) con el eje x .

3. $g(x) = x^2 - 2x$
4. $f(x) = 6x - x^2$
5. $f(x) = x^2 + 8x + 10$
6. $h(x) = 3 + 4x - x^2$
7. $f(t) = -2t^2 + 4t + 1$
8. $f(x) = x^2 - 8x + 12$
9. $h(x) = 4x^2 + 4x + 13$
10. $f(x) = x^2 - 6x + 1$
11. $h(x) = x^2 + 5x - 4$
12. $f(x) = 4x^2 + 4x + 5$
13. $f(x) = \frac{1}{3}(x^2 + 5x - 4)$
14. $f(x) = \frac{1}{2}(6x^2 - 24x + 22)$

En los Ejercicios 15-20, escriba la forma estándar de la ecuación de la parábola que tiene el vértice indicado y cuya gráfica pasa por el punto dado.



17. Vértice: $(1, -4)$; punto: $(2, -3)$
18. Vértice: $(2, 3)$; punto: $(-1, 6)$
19. Vértice: $(-\frac{3}{2}, 0)$; punto: $(-\frac{9}{2}, -\frac{11}{4})$
20. Vértice: $(3, 3)$; punto: $(\frac{1}{4}, \frac{4}{5})$

21. GEOMETRÍA El perímetro de un rectángulo es de 1000 metros.

- (a) Trace un diagrama que dé una representación visual del problema. Marque la longitud y el ancho como x y y , respectivamente.
- (b) Escriba y como función de x . Use el resultado para escribir el área como función de x .
- (c) De todos los rectángulos posibles con perímetros de 1000 metros, encuentre las dimensiones de uno con el área máxima

22. INGRESO MÁXIMO El ingreso total R ganado (en dólares) por producir una caja de regalo de caramelos, está dado por

$$R(p) = -10p^2 + 800p$$

donde p es el precio por unidad (en dólares).

- (a) Encuentre los ingresos cuando los precios por caja sean \$20, \$25 y \$30.
- (b) Encuentre el precio unitario que dé un ingreso máximo. ¿Cuál es el ingreso máximo? Explique sus resultados.

23. COSTO MÍNIMO Un fabricante de gaseosas tiene costos diarios de producción de

$$C = 70\,000 - 120x + 0.055x^2$$

donde C es el costo total (en dólares) y x es el número de unidades producidas. ¿Cuántas unidades deben producirse cada día para dar un costo mínimo?

24. SOCIOLOGÍA El promedio de edad del novio en un primer matrimonio, para una edad determinada de la novia, puede calcularse con el modelo

$$y = -0.107x^2 + 5.68x - 48.5, \quad 20 \leq x \leq 25$$

donde y es la edad del novio y x la de la novia. Trace una gráfica del modelo. ¿Para qué edad de la novia es 26 el promedio de edad del novio? (Fuente: U.S. Census Bureau)

2.2 En los Ejercicios 25-30, trace las gráficas de $y = x^n$ y la transformación.

25. $y = x^3$, $f(x) = -(x - 2)^3$
26. $y = x^3$, $f(x) = -4x^3$
27. $y = x^4$, $f(x) = 6 - x^4$
28. $y = x^4$, $f(x) = 2(x - 8)^4$
29. $y = x^5$, $f(x) = (x - 5)^5$
30. $y = x^5$, $f(x) = \frac{1}{2}x^5 + 3$

En los Ejercicios 31-34, describa el comportamiento a la derecha y a la izquierda de la gráfica de la función polinomial.

31. $f(x) = -2x^2 - 5x + 12$

32. $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + 2x$

33. $g(x) = \frac{3}{4}(x^4 + 3x^2 + 2)$

34. $h(x) = -x^7 + 8x^2 - 8x$

En los Ejercicios 35-40, encuentre todos los ceros reales de la función polinomial. Determine la multiplicidad de cada cero y el número de puntos extremos de la gráfica de la función. Use una calculadora de gráficas para verificar sus respuestas.

35. $f(x) = 3x^2 + 20x - 32$ 36. $f(x) = x(x + 3)^2$

37. $f(t) = t^3 - 3t$ 38. $f(x) = x^3 - 8x^2$

39. $f(x) = -18x^3 + 12x^2$ 40. $g(x) = x^4 + x^3 - 12x^2$

En los Ejercicios 41-44, trace la gráfica de la función al (a) aplicar la prueba del coeficiente principal, (b) hallar los ceros del polinomio, (c) determinar suficientes puntos de solución y (d) trazar una curva continua que pase por los puntos.

41. $f(x) = -x^3 + x^2 - 2$

42. $g(x) = 2x^3 + 4x^2$

43. $f(x) = x(x^3 + x^2 - 5x + 3)$

44. $h(x) = 3x^2 - x^4$



En los Ejercicios 45-48, (a) use el teorema de valor intermedio y el comando *table* de una calculadora de gráficas, para hallar intervalos de una unidad de largo, en los que se garantiza que la función polinomial tiene un cero. (b) Ajuste la tabla para aproximar los ceros de la función. Use el comando *zero* o *root* de la calculadora de gráficas para verificar sus resultados.

45. $f(x) = 3x^3 - x^2 + 3$

46. $f(x) = 0.25x^3 - 3.65x + 6.12$

47. $f(x) = x^4 - 5x - 1$

48. $f(x) = 7x^4 + 3x^3 - 8x^2 + 2$

2.3 En los Ejercicios 49-54, use división larga para dividir.

49. $\frac{30x^2 - 3x + 8}{5x - 3}$ 50. $\frac{4x + 7}{3x - 2}$

51. $\frac{5x^3 - 21x^2 - 25x - 4}{x^2 - 5x - 1}$

52. $\frac{3x^4}{x^2 - 1}$

53. $\frac{x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 6x + 3}{x^2 + 2}$

54. $\frac{6x^4 + 10x^3 + 13x^2 - 5x + 2}{2x^2 - 1}$

En los Ejercicios 55-58, use división sintética para dividir.

55. $\frac{6x^4 - 4x^3 - 27x^2 + 18x}{x - 2}$ 56. $\frac{0.1x^3 + 0.3x^2 - 0.5}{x - 5}$

57. $\frac{2x^3 - 25x^2 + 66x + 48}{x - 8}$ 58. $\frac{5x^3 + 33x^2 + 50x - 8}{x + 4}$

En los Ejercicios 59 y 60, use división sintética para determinar si los valores dados de x son ceros de la función.

59. $f(x) = 20x^4 + 9x^3 - 14x^2 - 3x$
(a) $x = -1$ (b) $x = \frac{3}{4}$ (c) $x = 0$ (d) $x = 1$

60. $f(x) = 3x^3 - 8x^2 - 20x + 16$
(a) $x = 4$ (b) $x = -4$ (c) $x = \frac{2}{3}$ (d) $x = -1$

En los Ejercicios 61 y 62, use el teorema del residuo y división sintética para hallar cada valor de la función.

61. $f(x) = x^4 + 10x^3 - 24x^2 + 20x + 44$
(a) $f(-3)$ (b) $f(-1)$

62. $g(t) = 2t^5 - 5t^4 - 8t + 20$
(a) $g(-4)$ (b) $g(\sqrt{2})$

En los Ejercicios 63-66, (a) verifique el(los) factor(es) dado(s) de la función f , (b) encuentre los factores restantes de f , (c) use sus resultados para escribir la factorización completa de f , (d) haga una lista de todos los ceros reales de f y (e) confirme sus resultados con una calculadora de gráficas para graficar la función.

Función	Factor(es)
63. $f(x) = x^3 + 4x^2 - 25x - 28$	$(x - 4)$
64. $f(x) = 2x^3 + 11x^2 - 21x - 90$	$(x + 6)$
65. $f(x) = x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 22x + 24$	$(x + 2)(x - 3)$
66. $f(x) = x^4 - 11x^3 + 41x^2 - 61x + 30$	$(x - 2)(x - 5)$

2.4 En los Ejercicios 67-60, escriba el número complejo en forma estándar.

67. $8 + \sqrt{-100}$ 68. $5 - \sqrt{-49}$
69. $i^2 + 3i$ 70. $-5i + i^2$

En los Ejercicios 71-78, realice la operación y escriba el resultado en forma estándar.

71. $(7 + 5i) + (-4 + 2i)$ 74. $(1 + 6i)(5 - 2i)$
72. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$ 76. $i(6 + i)(3 - 2i)$
73. $7i(11 - 9i)$ 77. $(8 - 5i)^2$ 78. $(4 + 7i)^2 + (4 - 7i)^2$
75. $(10 - 8i)(2 - 3i)$

En los Ejercicios 79 y 80, escriba el cociente en forma estándar.

79. $\frac{6 + i}{4 - i}$ 80. $\frac{8 - 5i}{i}$

En los Ejercicios 81 y 82, realice la operación y escriba el resultado en forma estándar.

$$81. \frac{4}{2-3i} + \frac{2}{1+i} \qquad 82. \frac{1}{2+i} - \frac{5}{1+4i}$$

En los Ejercicios 83-86, encuentre todas las soluciones de la ecuación.

$$83. 5x^2 + 2 = 0 \qquad 84. 2 + 8x^2 = 0 \\ 85. x^2 - 2x + 10 = 0 \qquad 86. 6x^2 + 3x + 27 = 0$$

2.5 En los Ejercicios 87-92, encuentre todos los ceros de la función.

$$87. f(x) = 4x(x-3)^2 \qquad 88. f(x) = (x-4)(x+9)^2 \\ 89. f(x) = x^2 - 11x + 18 \qquad 90. f(x) = x^3 + 10x \\ 91. f(x) = (x+4)(x-6)(x-2i)(x+2i) \\ 92. f(x) = (x-8)(x-5)^2(x-3+i)(x-3-i)$$

En los Ejercicios 93 y 94, use la prueba del cero racional para hacer una lista de todos los posibles ceros racionales de f .

$$93. f(x) = -4x^3 + 8x^2 - 3x + 15 \\ 94. f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 5x^2 - 8$$

En los Ejercicios 95-100, encuentre todos los ceros racionales de la función.

$$95. f(x) = x^3 + 3x^2 - 28x - 60 \\ 96. f(x) = 4x^3 - 27x^2 + 11x + 42 \\ 97. f(x) = x^3 - 10x^2 + 17x - 8 \\ 98. f(x) = x^3 + 9x^2 + 24x + 20 \\ 99. f(x) = x^4 + x^3 - 11x^2 + x - 12 \\ 100. f(x) = 25x^4 + 25x^3 - 154x^2 - 4x + 24$$

En los Ejercicios 101 y 102, encuentre una función polinomial con coeficientes reales que tenga los ceros dados. (Hay numerosas respuestas correctas.)

$$101. \frac{2}{3}, 4, \sqrt{3}i \qquad 102. 2, -3, 1-2i$$

En los Ejercicios 103-106, use el cero dado para hallar todos los ceros de la función.

Función	Cero
103. $f(x) = x^3 - 4x^2 + x - 4$	i
104. $h(x) = -x^3 + 2x^2 - 16x + 32$	$-4i$
105. $g(x) = 2x^4 - 3x^3 - 13x^2 + 37x - 15$	$2+i$
106. $f(x) = 4x^4 - 11x^3 + 14x^2 - 6x$	$1-i$

En los Ejercicios 107-110, encuentre todos los ceros de la función y escriba el polinomio como producto de factores lineales.

$$107. f(x) = x^3 + 4x^2 - 5x$$

$$108. g(x) = x^3 - 7x^2 + 36$$

$$109. g(x) = x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 40x + 208$$

$$110. f(x) = x^4 + 8x^3 + 8x^2 - 72x - 153$$

En los Ejercicios 111 y 112, use la regla de Descartes de los signos para determinar el posible número de ceros positivos y negativos de la función.

$$111. g(x) = 5x^3 + 3x^2 - 6x + 9$$

$$112. h(x) = -2x^5 + 4x^3 - 2x^2 + 5$$

En los Ejercicios 113 y 114, use división sintética para verificar las cotas superior e inferior de los ceros reales de f .

$$113. f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 4x - 3 \\ (a) \text{ Superior: } x = 1 \quad (b) \text{ Inferior: } x = -\frac{1}{4} \\ 114. f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 14x + 8 \\ (a) \text{ Superior: } x = 8 \quad (b) \text{ Inferior: } x = -4$$

2.6 En los Ejercicios 115-118, encuentre el dominio de la función racional.

$$115. f(x) = \frac{3x}{x+10} \qquad 116. f(x) = \frac{4x^3}{2+5x} \\ 117. f(x) = \frac{8}{x^2-10x+24} \qquad 118. f(x) = \frac{x^2+x-2}{x^2+4}$$

En los Ejercicios 119-122, identifique cualesquiera asíntotas verticales u horizontales.

$$119. f(x) = \frac{4}{x+3} \qquad 120. f(x) = \frac{2x^2+5x-3}{x^2+2} \\ 121. h(x) = \frac{5x+20}{x^2-2x-24} \qquad 122. h(x) = \frac{x^3-4x^2}{x^2+3x+2}$$

En los Ejercicios 123-134, (a) exprese el dominio de la función, (b) identifique todas las intersecciones con los ejes coordenados, (c) encuentre cualesquiera asíntotas verticales y horizontales y (d) localice puntos de solución adicionales según sea necesario para trazar la gráfica de la función racional.

$$123. f(x) = \frac{-3}{2x^2} \qquad 124. f(x) = \frac{4}{x} \\ 125. g(x) = \frac{2+x}{1-x} \qquad 126. h(x) = \frac{x-4}{x-7} \\ 127. p(x) = \frac{5x^2}{4x^2+1} \qquad 128. f(x) = \frac{2x}{x^2+4} \\ 129. f(x) = \frac{x}{x^2+1} \qquad 130. h(x) = \frac{9}{(x-3)^2} \\ 131. f(x) = \frac{-6x^2}{x^2+1} \qquad 132. f(x) = \frac{2x^2}{x^2-4} \\ 133. f(x) = \frac{6x^2-11x+3}{3x^2-x} \qquad 134. f(x) = \frac{6x^2-7x+2}{4x^2-1}$$

En los Ejercicios 135-138, (a) exprese el dominio de la función, (b) identifique todas las intersecciones con los ejes coordenados, (c) identifique cualesquiera asíntotas verticales y diagonales y (d) determine puntos de solución adicionales según sea necesario para trazar la gráfica de la función racional.

$$135. f(x) = \frac{2x^3}{x^2 + 1} \quad 136. f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$$

$$137. f(x) = \frac{3x^3 - 2x^2 - 3x + 2}{3x^2 - x - 4}$$

$$138. f(x) = \frac{3x^3 - 4x^2 - 12x + 16}{3x^2 + 5x - 2}$$

139. COSTO PROMEDIO Un negocio tiene un costo de producción $C = 0.5x + 500$ por producir x unidades de un producto. El costo promedio por unidad, $\bar{C}$, está dado por

$$\bar{C} = \frac{C}{x} = \frac{0.5x + 500}{x}, \quad x > 0.$$

Determine el costo promedio por unidad cuando x aumente sin límite. (Encuentre la asíntota horizontal.)

140. CAPTURA DE DROGAS ILEGALES El costo C (en millones de dólares) para el gobierno federal, para capturar $p\%$ de una droga ilegal cuando entra al país, está dado por

$$C = \frac{528p}{100 - p}, \quad 0 \leq p < 100.$$



(a) Use una calculadora de gráficas para graficar la función de costo.

(b) Encuentre los costos de capturar 25%, 50% y 75% de la droga.

(c) De acuerdo con este modelo, ¿sería posible capturar 100% de la droga?



141. DISEÑO DE PÁGINA Una página que mide x pulgadas de ancho y y pulgadas de alto contiene 30 pulgadas cuadradas de material impreso. Los márgenes superior e inferior miden 2 pulgadas de profundidad y los márgenes de cada lado son de 2 pulgadas de ancho.

(a) Trace un diagrama que dé una representación visual del problema.

(b) Escriba una función para el área total A de la página en términos de x .

(c) Determine el dominio de la función con base en las restricciones físicas del problema.



(d) Use una calculadora de gráficas para graficar la función de área y aproxime las dimensiones de la página, para las cuales se usará la cantidad mínima de papel. Verifique numéricamente sus respuestas usando el comando *table* de la calculadora de gráficas.



142. FOTOSÍNTESIS La cantidad y de absorción de CO_2 (en miligramos por decímetro cuadrado por hora), a temperaturas óptimas y con abastecimiento natural de CO_2 se calcula con el modelo

$$y = \frac{18.47x - 2.96}{0.23x + 1}, \quad x > 0$$

donde x es la intensidad de luz (en watts por metro cuadrado). Use una calculadora de gráficas para graficar la función y determinar la cantidad limitante de absorción de CO_2 .

2.7 En los Ejercicios 143-150, resuelva la desigualdad.

$$143. 12x^2 + 5x < 2$$

$$144. 3x^2 + x \geq 24$$

$$145. x^3 - 16x \geq 0$$

$$146. 12x^3 - 20x^2 < 0$$

$$147. \frac{2}{x+1} \leq \frac{3}{x-1}$$

$$148. \frac{x-5}{3-x} < 0$$

$$149. \frac{x^2 - 9x + 20}{x} \leq 0$$

$$150. \frac{1}{x-2} > \frac{1}{x}$$

151. INVERSIÓN P dólares invertidos a una tasa de interés r compuesto anualmente aumenta a una cantidad

$$A = P(1 + r)^2$$

en 2 años. Una inversión de \$5000 ha de aumentar una cantidad mayor a \$5500 en 2 años. ¿La tasa de interés debe ser mayor a qué porcentaje?

152. POBLACIÓN DE UNA ESPECIE Un biólogo introduce 200 mariquitas en un sembradío. La población P de mariquitas se calcula con el modelo

$$P = \frac{1000(1 + 3t)}{5 + t}$$

donde t es el tiempo en días. Encuentre el tiempo necesario para que la población aumente a al menos 2000 mariquitas.

EXPLORACIÓN

¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 153 y 154, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

153. Un polinomio de cuarto grado con coeficientes reales puede tener -5 , $-8i$, $4i$ y 5 como sus ceros.

154. El dominio de una función racional nunca puede ser el conjunto de todos los números reales.

155. ESCRITURA Explique cómo determinar el valor máximo o mínimo de una función cuadrática.

156. ESCRITURA Explique las conexiones entre factores de un polinomio, ceros de una función polinomial, y soluciones de una ecuación polinomial.

157. ESCRITURA Describa qué significa la asíntota de una gráfica.

2 EXAMEN DEL CAPÍTULO

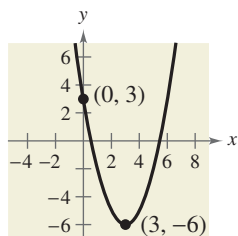
En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 2

Tome este examen como lo haría en clase. Cuando termine, verifique su trabajo contra las respuestas dadas al final del libro.

- Describe cómo difiere la gráfica de g respecto de la de $f(x) = x^2$.
 (a) $g(x) = 2 - x^2$ (b) $g(x) = (x - \frac{3}{2})^2$
- Encuentre una ecuación de la parábola mostrada en la figura de la izquierda.
- La trayectoria de una pelota está dada por $y = -\frac{1}{20}x^2 + 3x + 5$, donde y es la altura (en pies) de la pelota y x es la distancia horizontal (en pies) desde donde la pelota fue lanzada.
 (a) Encuentre la máxima altura de la pelota.
 (b) ¿Cuál número determina la altura a la que fue lanzada la pelota? ¿El cambio de este valor cambia las coordenadas de la máxima altura de la pelota? Explique.
- Determine el comportamiento a la derecha e izquierda de la gráfica de la función $h(t) = -\frac{3}{4}t^5 + 2t^2$. A continuación trace su gráfica.
- Divida usando división larga. 6. Divida usando división sintética.

$$\frac{3x^3 + 4x - 1}{x^2 + 1} \qquad \frac{2x^4 - 5x^2 - 3}{x - 2}$$
- Use división sintética para demostrar que $x = \frac{5}{2}$ es un cero de la función dada por $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 6x + 15$.
 Use el resultado para factorizar completamente la función polinomial y haga una lista de todos los ceros reales de la función.
- Realice cada una de las operaciones siguientes y escriba el resultado en forma estándar.
 (a) $10i - (3 + \sqrt{-25})$ (b) $(2 + \sqrt{3}i)(2 - \sqrt{3}i)$
- Escriba el cociente en forma estándar: $\frac{5}{2 + i}$.

En los Ejercicios 10 y 11, encuentre una función polinomial con coeficientes reales que tenga los ceros dados. (Hay numerosas respuestas correctas.)

10. 0, 3, $2 + i$

11. $1 - \sqrt{3}i$, 2, 2

En los Ejercicios 12 y 13, halle todos los ceros de la función.

12. $f(x) = 3x^3 + 14x^2 - 7x - 10$

13. $f(x) = x^4 - 9x^2 - 22x - 24$

En los Ejercicios 14-16, identifique cualesquiera intersecciones con los ejes coordenados y las asíntotas de la gráfica de la función. A continuación trace una gráfica de ésta.

14. $h(x) = \frac{4}{x^2} - 1$

15. $f(x) = \frac{2x^2 - 5x - 12}{x^2 - 16}$

16. $g(x) = \frac{x^2 + 2}{x - 1}$

En los Ejercicios 17 y 18, resuelva la desigualdad. Trace el conjunto solución sobre la recta numérica real.

17. $2x^2 + 5x > 12$

18. $\frac{2}{x} \leq \frac{1}{x + 6}$

DEMOSTRACIONES EN MATEMÁTICAS

Estas dos páginas contienen demostraciones de cuatro teoremas acerca de funciones polinomiales. Los primeros dos teoremas son de la Sección 2.3 y los segundos de la 2.5.

Teorema del residuo (p. 154)

Si un polinomio $f(x)$ está dividido por $x - k$, el residuo es

$$r = f(k).$$

Demostración

Del algoritmo de la división, tenemos

$$f(x) = (x - k)q(x) + r(x)$$

y debido a que ya sea $r(x) = 0$ o que el grado de $r(x)$ sea menor que el grado de $x - k$, sabemos que $r(x)$ debe ser una constante. Esto es, $r(x) = r$. Ahora, al evaluar $f(x)$ en $x = k$, tenemos

$$\begin{aligned} f(k) &= (k - k)q(k) + r \\ &= (0)q(k) + r = r. \end{aligned}$$

Para tener éxito en álgebra, es importante entender la conexión entre *factores* de un polinomio, *ceros* de una función polinomial y *soluciones* o *raíces* de una ecuación con polinomios. El teorema del factor es la base para esta conexión.

Teorema del factor (p. 154)

Un polinomio $f(x)$ tiene un factor $(x - k)$ si y sólo si $f(k) = 0$.

Demostración

Usando el algoritmo de la división con el factor $(x - k)$, tenemos

$$f(x) = (x - k)q(x) + r(x).$$

Por el teorema del residuo, $r(x) = r = f(k)$, y tenemos

$$f(x) = (x - k)q(x) + f(k)$$

donde $q(x)$ es un polinomio de menor grado que $f(x)$. Si $f(k) = 0$, entonces

$$f(x) = (x - k)q(x)$$

y vemos que $(x - k)$ es un factor de $f(x)$. Recíprocamente, si $(x - k)$ es un factor de $f(x)$, la división de $f(x)$ entre $(x - k)$ da un residuo de 0. En consecuencia, por el teorema del factor tenemos que $f(k) = 0$.

Teorema fundamental del álgebra

El teorema de factorización lineal está estrechamente relacionado con el teorema fundamental del álgebra. El teorema fundamental del álgebra tiene una larga e interesante historia. En los primeros trabajos con ecuaciones polinomiales, se pensaba que el teorema fundamental del álgebra no era verdadero, porque no se consideraban soluciones imaginarias. De hecho, en los primeros trabajos de matemáticos como Abu Al Juarizmi (hacia 800 d.C.) tampoco se consideraban soluciones negativas.

Una vez que se aceptaron los números imaginarios, varios matemáticos trataron de dar una demostración general del teorema fundamental del álgebra. Entre ellos estaba Gottfried von Leibniz (1702), Jean d'Alembert (1746), Leonhard Euler (1749), Joseph Louis Lagrange (1772) y Pierre Simon Laplace (1795). El matemático por lo general acreditado por la primera demostración correcta del teorema fundamental del álgebra es Carl Friedrich Gauss, quien la publicó en su tesis de doctorado en 1799.

Teorema de factorización lineal (p. 166)

Si $f(x)$ es un polinomio de grado n , donde $n > 0$, entonces f tiene precisamente n factores lineales

$$f(x) = a_n(x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_n)$$

donde $c_1, c_2, \dots, c_n$ son números complejos.

Demostración

Usando el teorema fundamental del álgebra, sabemos que f debe tener al menos un cero, c_1 . En consecuencia, $(x - c_1)$ es un factor de $f(x)$, y tendremos

$$f(x) = (x - c_1)f_1(x).$$

Si el grado de $f_1(x)$ es mayor a cero, de nuevo aplicamos el teorema fundamental del álgebra para concluir que f_1 debe tener un cero c_2 , lo cual implica que

$$f(x) = (x - c_1)(x - c_2)f_2(x).$$

Es evidente que el grado de $f_1(x)$ es $n - 1$, que el grado de $f_2(x)$ es $n - 2$, y que se puede aplicar repetidamente el teorema fundamental n veces hasta obtener

$$f(x) = a_n(x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_n)$$

donde a_n es el coeficiente principal del polinomio $f(x)$.

Factores de un polinomio (p. 170)

Todo polinomio de grado $n > 0$ con coeficientes reales puede escribirse como el producto de factores lineales y cuadráticos con coeficientes reales, donde los cuadráticos no tienen ceros reales.

Demostración

Para empezar, se usa el teorema de factorización lineal para concluir que $f(x)$ puede factorizarse *completamente* en la forma

$$f(x) = d(x - c_1)(x - c_2)(x - c_3) \cdots (x - c_n).$$

Si cada c_i es real, no hay nada más que demostrar. En cambio, si cualquier c_i es complejo ($c_i = a + bi$, $b \neq 0$), entonces, como los coeficientes de $f(x)$ son reales, sabemos que el conjugado $c_j = a - bi$ también es cero. Al multiplicar los factores correspondientes, obtenemos

$$\begin{aligned}(x - c_i)(x - c_j) &= [x - (a + bi)][x - (a - bi)] \\ &= x^2 - 2ax + (a^2 + b^2)\end{aligned}$$

donde cada uno de los coeficientes es real.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Este conjunto de ejercicios, difíciles y que invitan a meditar, amplía y explora más a fondo los conceptos aprendidos en este capítulo.

1. Demuestre que si $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, entonces $f(k) = r$, donde $r = ak^3 + bk^2 + ck + d$, usando división larga. En otras palabras, verifique el teorema del residuo para una función polinomial de tercer grado.
2. En el año 2000 a.C., los babilonios resolvieron ecuaciones polinomiales consultando para ello unas tablas de valores. Una de esas tablas dio los valores de $y^3 + y^2$. Para usar esta tabla, los babilonios a veces tenían que manipular la ecuación, como se ve a continuación.

$$ax^3 + bx^2 = c \quad \text{Ecuación original}$$

$$\frac{a^3 x^3}{b^3} + \frac{a^2 x^2}{b^2} = \frac{a^2 c}{b^3} \quad \text{Multiplicar cada lado por } \frac{a^2}{b^3}$$

$$\left(\frac{ax}{b}\right)^3 + \left(\frac{ax}{b}\right)^2 = \frac{a^2 c}{b^3} \quad \text{Reescribir.}$$

Entonces encontrarían $(a^2 c)/b^3$ en la columna $y^3 + y^2$ de la tabla. Como sabían que el correspondiente valor de y era igual a $(ax)/b$, pudieron concluir que $x = (by)/a$.

- (a) Calcule $y^3 + y^2$ para $y = 1, 2, 3, \dots, 10$. Registre los valores en una tabla.

Use la tabla del inciso (a) y el método citado líneas antes para resolver cada ecuación.

- (b) $x^3 + x^2 = 252$
- (c) $x^3 + 2x^2 = 288$
- (d) $3x^3 + x^2 = 90$
- (e) $2x^3 + 5x^2 = 2500$
- (f) $7x^3 + 6x^2 = 1728$
- (g) $10x^3 + 3x^2 = 297$

Usando los métodos de este capítulo, verifique su solución a cada ecuación.

3. En una fábrica de artículos de vidrio, se vierte vidrio de cobalto fundido en moldes para hacer pisapapeles. Cada molde es un prisma rectangular cuya altura es 3 pulgadas mayor que la longitud de cada lado de la base cuadrada. Una máquina vierte 20 pulgadas cúbicas de vidrio líquido en cada molde. ¿Cuáles son las dimensiones del molde?
4. Determine si la proposición es verdadera o falsa. Si es falsa, dé una o más razones del porqué.

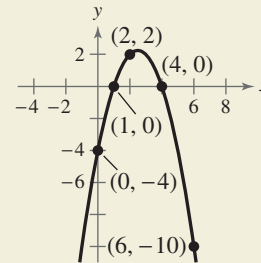
Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$, y sea $f(2) = -1$. Entonces

$$\frac{f(x)}{x+1} = q(x) + \frac{2}{x+1}$$

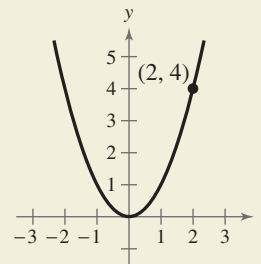
donde $q(x)$ es un polinomio de segundo grado.



5. La parábola que se muestra en la figura tiene una ecuación de la forma $y = ax^2 + bx + c$. Halle la ecuación de esta parábola con los siguientes métodos. (a) Encuentre la ecuación analíticamente. (b) Use el comando *regression* de una calculadora de gráficas para hallar la solución.



6. Uno de los temas fundamentales del cálculo es hallar la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto. Para ver cómo se hace esto, considere el punto $(2, 4)$ en la gráfica de la función cuadrática $f(x) = x^2$, que se muestra en la figura.



- (a) Encuentre la pendiente m_1 de la recta que enlaza $(2, 4)$ y $(3, 9)$. ¿La pendiente de la recta tangente en $(2, 4)$ es mayor o menor que la pendiente de la recta que pasa por $(2, 4)$ y $(3, 9)$?
- (b) Encuentre la pendiente m_2 de la recta que enlaza $(2, 4)$ y $(1, 1)$. ¿La pendiente de la recta tangente en $(2, 4)$ es mayor o menor que la pendiente de la recta que pasa por $(2, 4)$ y $(1, 1)$?
- (c) Encuentre la pendiente m_3 de la recta que enlaza $(2, 4)$ y $(2.1, 4.41)$. ¿La pendiente de la recta tangente en $(2, 4)$ es mayor o menor que la pendiente que pasa por $(2, 4)$ y $(2.1, 4.41)$?
- (d) Encuentre la pendiente m_h de la recta que enlaza $(2, 4)$ y $(2+h, f(2+h))$ en términos del número h diferente de cero.
- (e) Evalúe la fórmula de la pendiente de el inciso (d) para $h = -1, 1$ y 0.1 . Compare estos valores con los de los incisos (a)-(c).
- (f) ¿Qué se puede concluir que es la pendiente m_{tan} de la recta tangente en $(2, 4)$? Explique su respuesta.

7. Use la forma $f(x) = (x - k)q(x) + r$ para crear una función cúbica que (a) pase por el punto $(2, 5)$ y suba a la derecha y (b) pase por el punto $(-3, 1)$ y baje a la derecha. (Hay numerosas respuestas correctas.)

8. El inverso multiplicativo de z es un número complejo z_m tal que $z \cdot z_m = 1$. Encuentre el inverso multiplicativo de cada número complejo.

(a) $z = 1 + i$ (b) $z = 3 - i$ (c) $z = -2 + 8i$

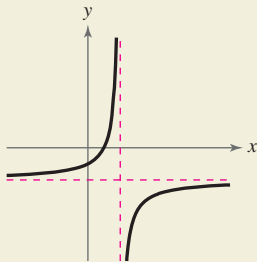
9. Demuestre que el producto de un número complejo $a + bi$ y su conjugado complejo es un número real.

10. Relacione la gráfica de la función racional dada por

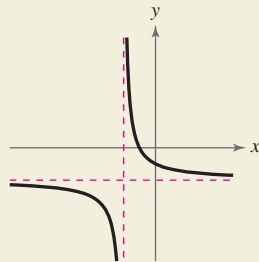
$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

con las condiciones dadas.

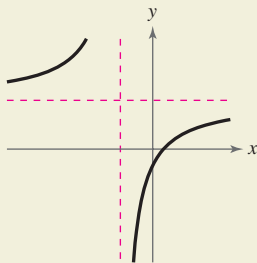
(a)



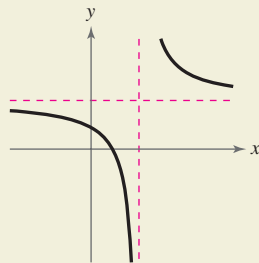
(b)



(c)



(d)



- (i) $a > 0$ (ii) $a > 0$ (iii) $a < 0$ (iv) $a > 0$
 $b < 0$ $b > 0$ $b > 0$ $b < 0$
 $c > 0$ $c < 0$ $c > 0$ $c > 0$
 $d < 0$ $d < 0$ $d < 0$ $d > 0$

11. Considere la función dada por

$$f(x) = \frac{ax}{(x - b)^2}$$

- (a) Determine el efecto en la gráfica de f si $b \neq 0$ y a se hace variar. Considere casos en los que a sea positiva y a sea negativa.
 (b) Determine el efecto en la gráfica de f si $a \neq 0$ y b se hace variar.



12. Los puntos extremos del intervalo en el cual una visión clara es posible se llaman *punto cercano* y *punto lejano* de la vista (vea figura). Con el aumento de edad, estos puntos normalmente cambian. La tabla muestra los puntos cercanos aproximados y (en pulgadas) para varias edades x (en años)

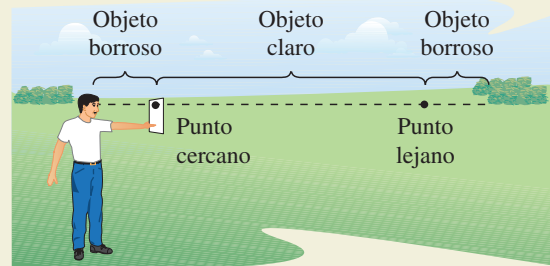


FIGURA PARA EL EJERCICIO 12



Edad, x	Punto cercano, y
16	3.0
32	4.7
44	9.8
50	19.7
60	39.4

- (a) Use el comando *regression* de una calculadora de gráficas para hallar un modelo cuadrático y_1 para los datos. Use la calculadora para determinar los datos y graficar el modelo en la misma pantalla.
 (b) Encuentre un modelo racional y_2 para los datos. Tome los recíprocos de los puntos cercanos para generar los puntos $(x, 1/y)$. Use el comando *regression* de una calculadora de gráficas para hallar un modelo lineal para los datos. La recta resultante tiene la forma

$$\frac{1}{y} = ax + b.$$

Despeje y . Use una calculadora de gráficas para determinar los datos y graficar el modelo en la misma pantalla.

- (c) Use el comando *table* de una calculadora de gráficas para crear una tabla que muestre el punto cercano pronosticado con base en cada modelo para cada una de las edades de la tabla original. ¿Qué tan bien se ajustan los modelos a los datos originales?
 (d) Use ambos modelos para calcular el punto cercano para una persona de 25 años de edad. ¿Cuál modelo es un mejor ajuste?
 (e) ¿Piensa usted que cualquiera de los modelos se puede usar para predecir el punto cercano para una persona de 70 años de edad? Explique.

Funciones exponenciales y logarítmicas

3

- 3.1 Funciones exponenciales y sus gráficas
- 3.2 Funciones logarítmicas y sus gráficas
- 3.3 Propiedades de los logaritmos
- 3.4 Ecuaciones exponenciales y logarítmicas
- 3.5 Modelos exponenciales y logarítmicos

En matemáticas

Las funciones exponenciales comprenden una base constante y un exponente variable. La inversa de la función exponencial es la función logarítmica.

En la vida real

Las funciones exponenciales y logarítmicas tienen uso generalizado para describir fenómenos económicos y físicos, como en el caso del interés compuesto, el crecimiento poblacional, la retención de memoria y la desintegración de material radiactivo. Por ejemplo, una función logarítmica se puede usar para relacionar el peso de un animal y su rapidez más baja al galopar. (Vea el Ejercicio 95, página 242.)



Juniora Bildarchiv / Alamy

EN CARRERAS

Hay numerosas carreras que usan funciones exponenciales y logarítmicas. A continuación se indican varias de ellas.

- Astrónomo,
Ejemplo 7, página 240
- Psicólogo,
Ejercicio 136, página 253
- Arqueólogo,
Ejemplo 3, página 258
- Científico forense,
Ejercicio 75, página 266

3.1 FUNCIONES EXPONENCIALES Y SUS GRÁFICAS

Lo que debe aprender

- Reconocer y evaluar funciones exponenciales con base a .
- Graficar funciones exponenciales y usar la propiedad biunívoca.
- Reconocer, evaluar y graficar funciones exponenciales con base e .
- Usar funciones exponenciales para modelar y resolver problemas de la vida real.

Por qué debe aprenderlo

Se pueden usar funciones exponenciales para modelar y resolver problemas de la vida real. Por ejemplo, en el Ejercicio 76 de la página 226 se usa una función exponencial para modelar la concentración de un medicamento en el torrente sanguíneo.



Funciones exponenciales

Hasta aquí, este texto ha trabajado principalmente con **funciones algebraicas**, que incluyen *funciones polinomiales* y *funciones racionales*. En este capítulo estudiaremos dos tipos de funciones no algebraicas: las exponenciales y las logarítmicas. Estas funciones son ejemplos de **funciones trascendentales**.

Definición de función exponencial

La **función exponencial** f con base a se denota por

$$f(x) = a^x$$

donde $a > 0$, $a \neq 1$ y x es cualquier número real.

La base $a = 1$ está excluida porque da $f(x) = 1^x = 1$. Ésta es una función constante, no una función exponencial.

Ya hemos evaluado a^x para valores enteros y racionales de x . Por ejemplo, sabemos que $4^3 = 64$ y $4^{1/2} = 2$. No obstante, para evaluar 4^x para cualquier número real x , es necesario interpretar formas con exponentes *irracionales*. Para fines de este texto, es suficiente considerar a la expresión

$$a^{\sqrt{2}} \quad (\text{donde } \sqrt{2} \approx 1.41421356)$$

como el número que tiene las aproximaciones sucesivamente más cercanas

$$a^{1.4}, a^{1.41}, a^{1.414}, a^{1.4142}, a^{1.41421}, \dots$$

Ejemplo 1 Evaluar funciones exponenciales

Use una calculadora para evaluar cada función en el valor indicado de x .

Función	Valor
a. $f(x) = 2^x$	$x = -3.1$
b. $f(x) = 2^{-x}$	$x = \pi$
c. $f(x) = 0.6^x$	$x = \frac{3}{2}$

Solución

Valor de la función	Tecleo en calculadora de gráficas	Pantalla
a. $f(-3.1) = 2^{-3.1}$	$2 \text{ (^)} (-) 3.1 \text{ (ENTER)}$	0.1166291
b. $f(\pi) = 2^{-\pi}$	$2 \text{ (^)} (-) \pi \text{ (ENTER)}$	0.1133147
c. $f(\frac{3}{2}) = (0.6)^{3/2}$	$.6 \text{ (^)} () 3 \text{ (÷)} 2 \text{ ()} \text{ (ENTER)}$	0.4647580

PUNTO de repaso ➔ Ahora trate de hacer el Ejercicio 7.

Cuando evalúe funciones exponenciales con calculadora, recuerde encerrar en paréntesis los exponentes fraccionarios. Como la calculadora sigue el orden de las operaciones, los paréntesis son cruciales para obtener el resultado correcto.

Gráficas de funciones exponenciales

Las gráficas de todas las funciones exponenciales tienen características semejantes, como se ilustra en los Ejemplos 2, 3 y 5.

Ejemplo 2 Gráficas de $y = a^x$

En el mismo plano de coordenadas, trace la gráfica de cada función.

- a. $f(x) = 2^x$ b. $g(x) = 4^x$

Solución

La tabla siguiente es una lista de algunos valores para cada función, y la Figura 3.1 muestra las gráficas de las dos funciones. Observe que ambas gráficas son crecientes. Además, la gráfica de $g(x) = 4^x$ crece con más rapidez que la de $f(x) = 2^x$.

x	-3	-2	-1	0	1	2
2^x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
4^x	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	1	4	16

PUNTO de repaso → Ahora trate de hacer el Ejercicio 17.

La tabla del Ejemplo 2 fue evaluada manualmente. Se podría, desde luego, usar una calculadora de gráficas para construir tablas incluso con más valores.

Ejemplo 3 Gráficas de $y = a^{-x}$

En el mismo plano de coordenadas, trace la gráfica de cada función.

- a. $F(x) = 2^{-x}$ b. $G(x) = 4^{-x}$

Solución

La tabla siguiente es una lista de algunos valores para cada función, y la Figura 3.2 muestra las gráficas de las dos funciones. Observe que ambas gráficas son decrecientes. Además, la gráfica de $G(x) = 4^{-x}$ decrece con más rapidez que la de $F(x) = 2^{-x}$.

x	-2	-1	0	1	2	3
2^{-x}	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
4^{-x}	16	4	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{64}$

PUNTO de repaso → Ahora trate de hacer el Ejercicio 19.

En el Ejemplo 3, observe que al usar una de las propiedades de los exponentes, las funciones $F(x) = 2^{-x}$ and $G(x) = 4^{-x}$ se pueden reescribir con exponentes positivos.

$$F(x) = 2^{-x} = \frac{1}{2^x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x \quad \text{y} \quad G(x) = 4^{-x} = \frac{1}{4^x} = \left(\frac{1}{4}\right)^x$$

Ayuda de álgebra

En la Sección 1.2 puede repasar las técnicas para trazar la gráfica de una ecuación.

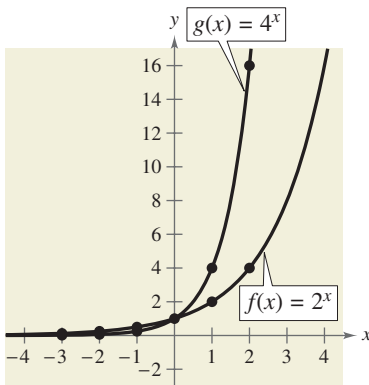


FIGURA 3.1

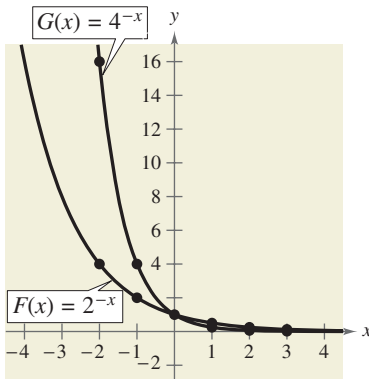


FIGURA 3.2

Si se comparan las funciones de los Ejemplos 2 y 3, observe que

$$F(x) = 2^{-x} = f(-x) \quad \text{y} \quad G(x) = 4^{-x} = g(-x).$$

En consecuencia, la gráfica de F es una reflexión (en el eje y) de la gráfica de f . Las gráficas de G y g tienen la misma relación. Las gráficas de las Figura 3.1 y 3.2 son típicas de las funciones exponenciales $y = a^x$ y $y = a^{-x}$. Tienen una intersección con el eje y y una asíntota horizontal (el eje x), y son continuas. Las características básicas de estas funciones exponenciales se resumen en las Figuras 3.3 y 3.4.

Tip de estudio

Observe que el rango de una función exponencial es $(0, \infty)$, lo cual significa que $a^x > 0$ para todos los valores de x .

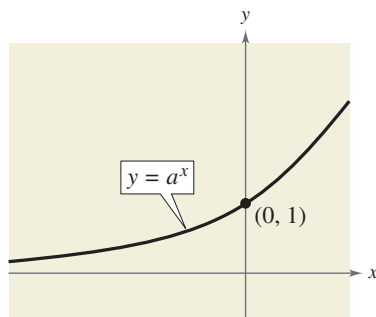


FIGURA 3.3

- Gráfica de $y = a^x$, $a > 1$
- Dominio: $(-\infty, \infty)$
- Rango: $(0, \infty)$
- Intersección con el eje y : $(0, 1)$
- Creciente
- El eje x es una asíntota horizontal ($a^x \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow -\infty$).
- Continua

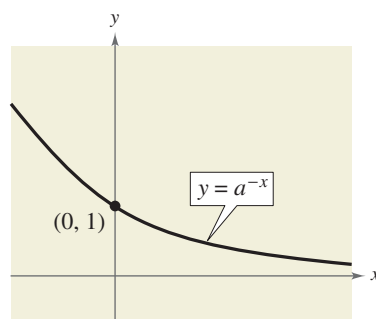


FIGURA 3.4

- Gráfica de $y = a^{-x}$, $a > 1$
- Dominio: $(-\infty, \infty)$
 - Rango: $(0, \infty)$
 - Intersección con el eje y : $(0, 1)$
 - Decreciente
 - El eje x es una asíntota horizontal ($a^{-x} \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \infty$).
 - Continua

De las Figuras 3.3 y 3.4 se puede ver que la gráfica de una función exponencial es siempre creciente o siempre decreciente. En consecuencia, las gráficas pasan la prueba de la recta horizontal y, por tanto, las funciones son uno a uno biunívocas. Se puede usar la siguiente **propiedad biunívoca** para resolver ecuaciones exponenciales sencillas.

Para $a > 0$ y $a \neq 1$, $a^x = a^y$ si y sólo si $x = y$.

Propiedad biunívoca

Ejemplo 4 Usar la propiedad biunívoca

a. $9 = 3^{x+1}$
 $3^2 = 3^{x+1}$
 $2 = x + 1$
 $1 = x$

b. $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 8 \Rightarrow 2^{-x} = 2^3 \Rightarrow x = -3$

Ecuación original

$$9 = 3^2$$

Propiedad biunívoca

Despeje x .

PUNTO de repaso

Ahora trate de hacer el Ejercicio 51.

En el siguiente ejemplo, observe cómo se puede usar la gráfica de $y = a^x$ para trazar las gráficas de funciones de la forma $f(x) = b \pm a^{x+c}$.

Ayuda de álgebra

En la Sección 1.7 puede repasar las técnicas para transformar la gráfica de una función.

Ejemplo 5 Transformaciones de gráficas de funciones exponenciales

Cada una de las gráficas siguientes es una transformación de la gráfica de $f(x) = 3^x$.

- Como $g(x) = 3^{x+1} = f(x+1)$, la gráfica de g se puede obtener al desplazar la gráfica de f una unidad a la *izquierda*, como se muestra en la Figura 3.5.
- Como $h(x) = 3^x - 2 = f(x) - 2$, la gráfica de h se puede obtener al desplazar la gráfica de f dos unidades *hacia abajo*, como se muestra en la Figura 3.6.
- Como $k(x) = -3^x = -f(x)$, la gráfica de f se puede obtener al *reflejar* la gráfica de f en el eje x , como se ve en la Figura 3.7.
- Debido a que $j(x) = 3^{-x} = f(-x)$, la gráfica de j se puede obtener al reflejar la gráfica de f en el eje y , como se ve en la Figura 3.8.

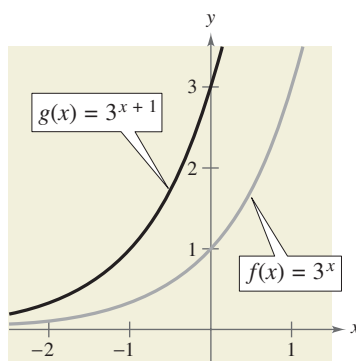


FIGURA 3.5 Desplazamiento horizontal

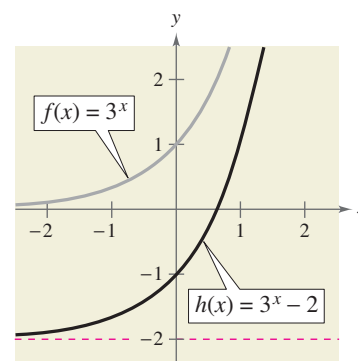


FIGURA 3.6 Desplazamiento vertical

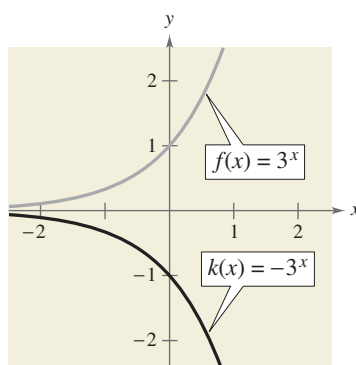


FIGURA 3.7 Reflexión en el eje x

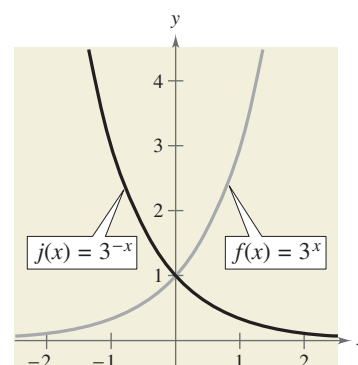


FIGURA 3.8 Reflexión en el eje y

PUNTO de repaso ➔ Ahora trate de hacer el Ejercicio 23.

Observe que las transformaciones en las Figuras 3.5, 3.7 y 3.8 conservan el eje x como una asíntota horizontal, pero la transformación de la Figura 3.6 da una nueva asíntota horizontal de $y = -2$. También, asegúrese de observar la forma en que la intersección con el eje y es afectada por cada transformación.

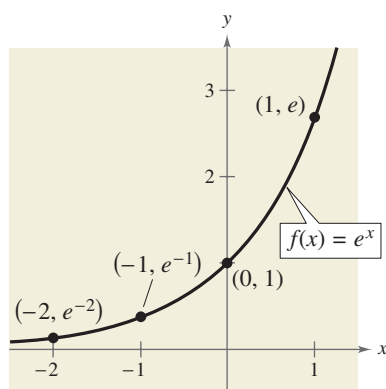


FIGURA 3.9

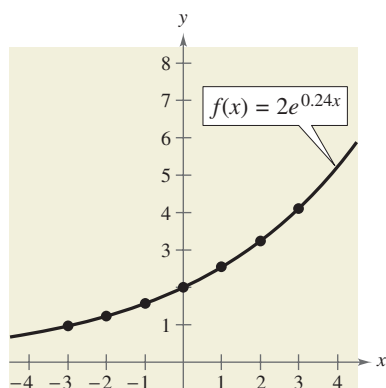


FIGURA 3.10

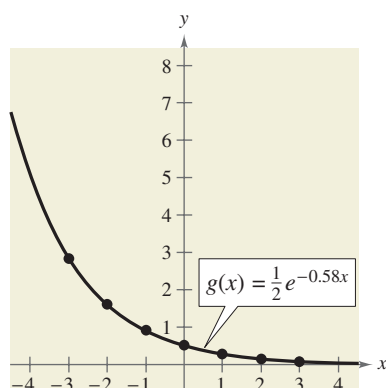


FIGURA 3.11

Base natural e

En numerosas aplicaciones, la opción más adecuada para una base es el número irracional

$$e \approx 2.718281828 \dots$$

Este número se denomina **base natural**. La función dada por $f(x) = e^x$ recibe el nombre de **función exponencial natural**. Su gráfica se ilustra en la Figura 3.9. Asegúrese de ver que para la función exponencial $f(x) = e^x$, e sea la constante 2.718281828..., mientras x sea la variable.

Ejemplo 6 Evaluar la función exponencial natural

Use calculadora para evaluar la función dada por $f(x) = e^x$ en cada valor indicado de x .

- $x = -2$
- $x = -1$
- $x = 0.25$
- $x = -0.3$

Solución

Valor de la función	Tecleo en calculadora de gráficas	Pantalla
a. $f(-2) = e^{-2}$	e^x $(-)$ 2 ENTER	0.1353353
b. $f(-1) = e^{-1}$	e^x $(-)$ 1 ENTER	0.3678794
c. $f(0.25) = e^{0.25}$	e^x 0.25 ENTER	1.2840254
d. $f(-0.3) = e^{-0.3}$	e^x $(-)$ 0.3 ENTER	0.7408182

PUNTO de repaso Ahora trate de hacer el Ejercicio 33.

Ejemplo 7 Graficar funciones exponenciales naturales

Trace la gráfica de cada una de las funciones exponenciales naturales.

- $f(x) = 2e^{0.24x}$
- $g(x) = \frac{1}{2}e^{-0.58x}$

Solución

Para trazar estas dos gráficas se puede usar una calculadora de gráficas para construir una tabla de valores, como se muestra a continuación. Después de construir la tabla, determine los puntos y enlázelos con curvas lisas como se ve en las Figuras 3.10 y 3.11. Observe que la gráfica en la Figura 3.10 es creciente, mientras que la gráfica de la Figura 3.11 es decreciente.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	0.974	1.238	1.573	2.000	2.542	3.232	4.109
$g(x)$	2.849	1.595	0.893	0.500	0.280	0.157	0.088

PUNTO de repaso Ahora trate de hacer el Ejercicio 41.

Aplicaciones

Uno de los ejemplos más conocidos de crecimiento exponencial es una inversión que gana *interés capitalizado continuamente*. Con el uso de funciones exponenciales se puede *desarrollar* una fórmula para interés compuesto n veces por año y demostrar la forma en que lleva a capitalización continua.

Suponga que un capital inicial P se invierte a una tasa de interés anual r , capitalizado una vez al año. Si el interés se suma al capital inicial al término del año, el nuevo saldo P_1 es

$$\begin{aligned} P_1 &= P + Pr \\ &= P(1 + r). \end{aligned}$$

Esta forma de multiplicar el capital inicial previo por $1 + r$ se repite entonces cada año sucesivo, como se muestra a continuación.

Año	Saldo después de cada capitalización
0	$P = P$
1	$P_1 = P(1 + r)$
2	$P_2 = P_1(1 + r) = P(1 + r)(1 + r) = P(1 + r)^2$
3	$P_3 = P_2(1 + r) = P(1 + r)^2(1 + r) = P(1 + r)^3$
$\vdots$	$\vdots$
t	$P_t = P(1 + r)^t$

Para acomodar una capitalización más frecuente (trimestral, mensual o diaria) del interés, sea n el número de capitalizaciones por año y sea t el número de años. Entonces la tasa por capitalización es r/n y el saldo de la cuenta después de t años es

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}.$$

Cantidad (saldo) con n capitalizaciones por año

Si se hace que el número n de capitalizaciones aumente sin límite, el proceso se aproxima a lo que se llama **capitalización continua**. En la fórmula para n capitalizaciones por año, sea $m = n/r$. Esto produce

m	$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$
1	2
10	2.59374246
100	2.704813829
1000	2.716923932
10 000	2.718145927
100 000	2.718268237
1 000 000	2.718280469
10 000 000	2.718281693
$\downarrow$	$\downarrow$
∞	e

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

Cantidad con n capitalizaciones por año

$$= P\left(1 + \frac{r}{mr}\right)^{mrt}$$

Sustituir mr por n .

$$= P\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{mrt}$$

Simplificar.

$$= P\left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right]^{rt}$$

Propiedad de los exponentes

Cuando m aumenta sin límite, la tabla de la izquierda muestra que $[1 + (1/m)]^m \rightarrow e$ cuando $m \rightarrow \infty$. De esto se puede concluir que la fórmula para capitalización continua es

$$A = Pe^{rt}.$$

Sustituir e por $(1 + 1/m)^m$.



ATENCIÓN

Asegúrese de ver que la tasa de interés anual debe escribirse en forma decimal. Por ejemplo, 6% debe escribirse como 0.06.

Fórmulas para interés compuesto

Después de t años, el saldo A en una cuenta con capital inicial P y tasa anual de interés r (en forma decimal) está dado por las fórmulas siguientes.

1. Para n capitalizaciones por año: $A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$
2. Para capitalización continua: $A = Pe^{rt}$

Ejemplo 8 Interés compuesto

Se invierte un total de \$12 000 a una tasa anual de interés de 9%. Encuentre el saldo después de 5 años si se capitaliza

- a. Trimestralmente.
- b. Mensualmente.
- c. Continuamente

Solución

- a. Para capitalización trimestral, tenemos $n = 4$. Por tanto, en 5 años a 9% el saldo es

$$\begin{aligned} A &= P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} && \text{Fórmula para interés compuesto} \\ &= 12\,000\left(1 + \frac{0.09}{4}\right)^{4(5)} && \text{Sustituir } P, r, n \text{ y } t. \\ &\approx \$18\,726.11. && \text{Usar calculadora.} \end{aligned}$$

- b. Para capitalización mensual, tenemos $n = 12$. Por tanto, en 5 años a 9%, el saldo es

$$\begin{aligned} A &= P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} && \text{Fórmula para interés compuesto} \\ &= 12\,000\left(1 + \frac{0.09}{12}\right)^{12(5)} && \text{Sustituir } P, r, n \text{ y } t. \\ &\approx \$18\,788.17. && \text{Usar calculadora.} \end{aligned}$$

- c. Para capitalización continua el saldo es

$$\begin{aligned} A &= Pe^{rt} && \text{Fórmula para capitalización continua} \\ &= 12\,000e^{0.09(5)} && \text{Sustituya } P, r \text{ y } t. \\ &\approx \$18\,819.75. && \text{Use calculadora.} \end{aligned}$$

PUNTO de repaso ➡ Ahora trate de hacer el Ejercicio 59.

En el Ejemplo 8, observe que la capitalización continua da más que la trimestral o la mensual. Esto es típico de los dos tipos de capitalización, es decir, para un principal, tasa de interés y tiempo determinados, la capitalización continua siempre dará un saldo más grande que capitalizar n veces por año.

Ejemplo 9 Desintegración radiactiva

La *vida media* del radio (^{226}Ra) es de unos 1599 años. Esto es, para una cantidad determinada de radio, habrá *la mitad* de la cantidad original después de 1599 años. Después de otros 1599 años quedará un cuarto de la cantidad original y así sucesivamente. Con y represente la masa, en gramos, de una cantidad de radio. La cantidad presente después de t años, entonces, es $y = 25\left(\frac{1}{2}\right)^{t/1599}$.

- ¿Cuál es la masa inicial (cuando $t = 0$)?
- ¿Cuánta de la masa inicial está presente después de 2500 años?

Solución algebraica

$$\begin{aligned} \text{a. } y &= 25\left(\frac{1}{2}\right)^{t/1599} && \text{Escribir la ecuación original.} \\ &= 25\left(\frac{1}{2}\right)^{0/1599} && \text{Sustituir 0 por } t. \\ &= 25 && \text{Simplificar.} \end{aligned}$$

Así, la masa inicial es de 25 gramos.

$$\begin{aligned} \text{b. } y &= 25\left(\frac{1}{2}\right)^{t/1599} && \text{Escribir la ecuación original.} \\ &= 25\left(\frac{1}{2}\right)^{2500/1599} && \text{Sustituir 2500 por } t. \\ &\approx 25\left(\frac{1}{2}\right)^{1.563} && \text{Simplificar.} \\ &\approx 8.46 && \text{Usar calculadora.} \end{aligned}$$

Por tanto, habrá unos 8.46 gramos después de 2500 años.

PUNTO de repaso → Ahora trate de hacer el Ejercicio 73.

Solución gráfica

Use una calculadora de gráficas para graficar $y = 25\left(\frac{1}{2}\right)^{t/1599}$.

- Use el comando *value* o los comandos *zoom* y *trace* de la calculadora de gráficas para determinar que cuando $x = 0$, el valor de y es 25, como se ve en la Figura 3.12. En consecuencia, la masa inicial es 25 gramos.
- Use el comando *value* o los comandos *zoom* y *trace* de la calculadora de gráficas para determinar que cuando $x = 2500$, el valor de y es 8.46, como se ve en la Figura 3.13. En consecuencia, habrá unos 8.46 gramos después de 2500 años.

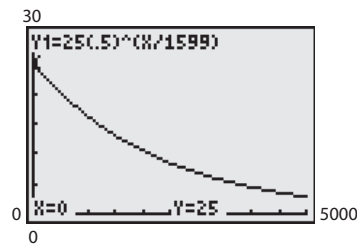


FIGURA 3.12

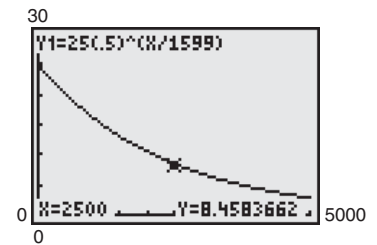


FIGURA 3.13

DISCUSIÓN EN CLASE

Identificación de funciones exponenciales ¿Cuál de las siguientes funciones generó las dos tablas mostradas a continuación? Discuta cómo determinarlo. ¿Qué tienen en común estas funciones? ¿Algunas de ellas son iguales? Si es así, explique por qué.

a. $f_1(x) = 2^{(x+3)}$

b. $f_2(x) = 8\left(\frac{1}{2}\right)^x$

c. $f_3(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{(x-3)}$

d. $f_4(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 7$

e. $f_5(x) = 7 + 2^x$

f. $f_6(x) = 8(2^x)$

x	-1	0	1	2	3
$g(x)$	7.5	8	9	11	15

x	-2	-1	0	1	2
$h(x)$	32	16	8	4	2

Genere dos funciones exponenciales diferentes de las formas $y = a(b)^x$ y $y = c^x + d$ con intersecciones con el eje y en $(0, -3)$.

3.1 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.**VOCABULARIO:** Llene los espacios en blanco.

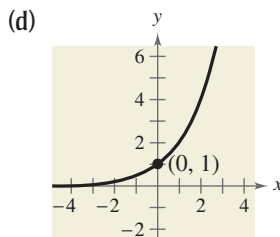
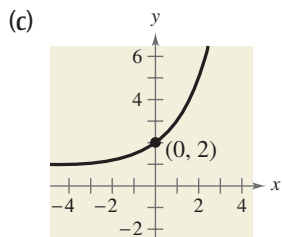
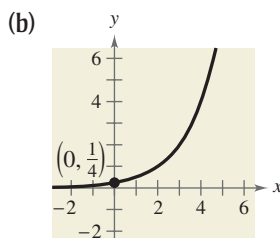
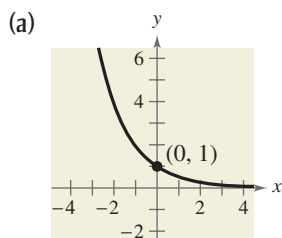
- Las funciones con polinomios y racionales son ejemplos de funciones _____.
- Las funciones exponenciales y logarítmicas son ejemplos de funciones no algebraicas, también llamadas funciones _____.
- Usted puede usar la propiedad _____ para resolver ecuaciones exponenciales sencillas.
- La función exponencial dada por $f(x) = e^x$ se denomina función _____, y la base e recibe el nombre de base _____.
- Para hallar la cantidad A en una cuenta después de t años con capital P y una tasa r anual de interés capitalizada n veces por año se puede usar la fórmula _____.
- Para hallar la cantidad A en una cuenta después de t años con capital P y una tasa r anual de interés capitalizada continuamente se puede usar la fórmula _____.

HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 7-12, evalúe la función al valor indicado de x . Redondee su resultado a tres lugares decimales.

Función	Valor
7. $f(x) = 0.9^x$	$x = 1.4$
8. $f(x) = 2.3^x$	$x = \frac{3}{2}$
9. $f(x) = 5^x$	$x = -\pi$
10. $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{5x}$	$x = \frac{3}{10}$
11. $g(x) = 5000(2^x)$	$x = -1.5$
12. $f(x) = 200(1.2)^{12x}$	$x = 24$

En los Ejercicios 13-16, relacione la función exponencial con su gráfica. [Las gráficas están marcadas (a), (b), (c) y (d).]



- $f(x) = 2^x$
- $f(x) = 2^{-x}$
- $f(x) = 2^x + 1$
- $f(x) = 2^{x-2}$

En los Ejercicios 17-22, use una calculadora de gráficas para construir una tabla de valores para la función. A continuación trace la gráfica de ésta.

- $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
- $f(x) = 6^{-x}$
- $f(x) = 2^{x-1}$
- $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$
- $f(x) = 6^x$
- $f(x) = 4^{x-3} + 3$

En los Ejercicios 23-28, use la gráfica de f para describir la transformación que dé la gráfica de g .

- $f(x) = 3^x$, $g(x) = 3^x + 1$
- $f(x) = 4^x$, $g(x) = 4^{x-3}$
- $f(x) = 2^x$, $g(x) = 3 - 2^x$
- $f(x) = 10^x$, $g(x) = 10^{-x+3}$
- $f(x) = \left(\frac{7}{2}\right)^x$, $g(x) = -\left(\frac{7}{2}\right)^{-x}$
- $f(x) = 0.3^x$, $g(x) = -0.3^x + 5$

En los Ejercicios 29-32, use una calculadora de gráficas para graficar la función exponencial.

- $y = 2^{-x^2}$
- $y = 3^{-|x|}$
- $y = 3^{x-2} + 1$
- $y = 4^{x+1} - 2$

En los Ejercicios 33-38, evalúe la función en el valor indicado de x . Redondee su resultado a tres lugares decimales.

Función	Valor
33. $h(x) = e^{-x}$	$x = \frac{3}{4}$
34. $f(x) = e^x$	$x = 3.2$
35. $f(x) = 2e^{-5x}$	$x = 10$
36. $f(x) = 1.5e^{x/2}$	$x = 240$
37. $f(x) = 5000e^{0.06x}$	$x = 6$
38. $f(x) = 250e^{0.05x}$	$x = 20$



En los Ejercicios 39-44, use una calculadora de gráficas para construir una tabla de valores para la función. A continuación trace la gráfica de la función.

39. $f(x) = e^x$ 40. $f(x) = e^{-x}$
 41. $f(x) = 3e^{x+4}$ 42. $f(x) = 2e^{-0.5x}$
 43. $f(x) = 2e^{x-2} + 4$ 44. $f(x) = 2 + e^{x-5}$



En los Ejercicios 45-50, use una calculadora de gráficas para graficar la función exponencial.

45. $y = 1.08^{-5x}$ 46. $y = 1.08^{5x}$
 47. $s(t) = 2e^{0.12t}$ 48. $s(t) = 3e^{-0.2t}$
 49. $g(x) = 1 + e^{-x}$ 50. $h(x) = e^{x-2}$

En los Ejercicios 51-58, use la propiedad biunívoca para despejar x de la ecuación.

51. $3^{x+1} = 27$ 52. $2^{x-3} = 16$
 53. $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 32$ 54. $5^{x-2} = \frac{1}{125}$
 55. $e^{3x+2} = e^3$ 56. $e^{2x-1} = e^4$
 57. $e^{x^2-3} = e^{2x}$ 58. $e^{x^2+6} = e^{5x}$

INTERÉS COMPUESTO En los Ejercicios 59-62, complete la tabla para determinar el saldo A de P dólares invertidos a una tasa r durante t años y capitalizado n veces por año.

n	1	2	4	12	365	Continua
A						

59. $P = \$1500$, $r = 2\%$, $t = 10$ años
 60. $P = \$2500$, $r = 3.5\%$, $t = 10$ años
 61. $P = \$2500$, $r = 4\%$, $t = 20$ años
 62. $P = \$1000$, $r = 6\%$, $t = 40$ años

INTERÉS COMPUESTO En los Ejercicios 63-66, complete la tabla para determinar el saldo A de \$12 000 invertidos a una tasa r durante t años, capitalizados continuamente.

t	10	20	30	40	50
A					

63. $r = 4\%$ 64. $r = 6\%$
 65. $r = 6.5\%$ 66. $r = 3.5\%$

67. FONDOS EN FIDEICOMISO El día en que nace un niño se hace un depósito de \$30 000 en un fondo en fideicomiso que paga 5% de interés, capitalizado continuamente. Determine el saldo en esta cuenta el día que el niño cumple 25 años.

68. FONDOS EN FIDEICOMISO Se hace un depósito de \$5000 en un fondo en fideicomiso que paga 7.5% de

interés capitalizado continuamente. Se especifica que el saldo se dará a la universidad de la cual es egresado el donador, después que el dinero haya ganado interés durante 50 años. ¿Cuánto recibirá la universidad?

69. INFLACIÓN Si la tasa anual de inflación promedia 4% en los siguientes 10 años, los costos C aproximados de artículos o servicios durante cualquier año en esa década estarán modelados por $C(t) = P(1.04)^t$, donde t es el tiempo en años y P es el costo presente. El precio de un cambio de aceite para un auto es actualmente de \$23.95. Calcule el precio que tendrá dentro de 10 años.

70. VIRUS DE COMPUTADORA El número V de computadoras infectadas por un virus aumenta de acuerdo con el modelo $V(t) = 100e^{4.6052t}$, donde t es el tiempo en horas. Encuentre el número de computadoras infectadas después de (a) 1 hora, (b) 1.5 horas, y (c) 2 horas.



71. CRECIMIENTO POBLACIONAL Las poblaciones de California proyectadas para los años 2015 a 2030 se pueden modelar con $P = 34.696e^{0.0098t}$, donde P es la población (en millones) y t es el tiempo (en años), con $t = 15$ correspondiente a 2015. (Fuente: U.S. Census Bureau)

- (a) Use una calculadora de gráficas para graficar la función para los años 2015 a 2030.
 (b) Use el comando *table* de una calculadora de gráficas para crear una tabla de valores para el mismo periodo que el del inciso (a).
 (c) De acuerdo con el modelo, ¿cuándo pasará de 50 millones la población de California?

72. POBLACIÓN La población P (en millones) de Italia de 1990 a 2008 se puede aproximar con el modelo $P = 56.8e^{0.0015t}$, donde t representa el año, con $t = 0$ correspondiente a 1990. (Fuente: U.S. Census Bureau, International Data Base)

- (a) De acuerdo con el modelo, ¿la población de Italia es creciente o decreciente? Explique.
 (b) Encuentre la población de Italia en 2000 y 2008.
 (c) Use el modelo para predecir la población de Italia en 2015 y 2020.

73. DESINTEGRACIÓN RADIATIVA Con Q represente una masa de plutonio radiactivo (^{239}Pu) (en gramos), cuya vida media es de 24 100 años. La cantidad de plutonio presente después de t años es $Q = 16\left(\frac{1}{2}\right)^{t/24\,100}$.

- (a) Determine la cantidad inicial (cuando $t = 0$).
 (b) Determine la cantidad presente después de 75 000 años.



(c) Use una calculadora de gráficas para graficar la función en el intervalo $t = 0$ a $t = 150\,000$.

74. DESINTEGRACIÓN RADIATIVA Con Q represente una masa de carbono 14 (^{14}C) (en gramos), cuya vida

media es 5715 años. La cantidad de carbono 14 presente después de t años es $Q = 10\left(\frac{1}{2}\right)^{t/5715}$.

- Determine la cantidad inicial (cuando $t = 0$).
- Determine la cantidad presente después de 2000 años.
- Trace la gráfica de esta función en el intervalo $t = 0$ a $t = 10\,000$.

75. DEPRECIACIÓN Después de t años, el valor de una camioneta de conversión con silla de ruedas que originalmente costó \$30 500 se deprecia de modo que cada año vale $\frac{7}{8}$ de su valor del año previo.

- Encuentre un modelo para $V(t)$, el valor de la camioneta después de t años.
- Determine el valor de la camioneta 4 años después de su compra.

76. CONCENTRACIÓN DE MEDICAMENTO Inmediatamente después de una inyección, la concentración de un medicamento en el torrente sanguíneo es de 300 miligramos por mililitro. Después de t horas, la concentración es 75% del nivel de la hora previa.

- Encuentre un modelo para $C(t)$, la concentración del medicamento después de t horas.
- Determine la concentración del medicamento después de 8 horas.

EXPLORACION

¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 77 y 78, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

- La recta $y = -2$ es una asíntota para la gráfica de $f(x) = 10^x - 2$.
- $e = \frac{271\,801}{99\,990}$

PIÉNSELO En los Ejercicios 79-82, use propiedades de los exponentes para determinar cuáles funciones (si las hay) son iguales.

- | | |
|---|--------------------------------|
| 79. $f(x) = 3^{x-2}$ | 80. $f(x) = 4^x + 12$ |
| $g(x) = 3^x - 9$ | $g(x) = 2^{2x+6}$ |
| $h(x) = \frac{1}{9}(3^x)$ | $h(x) = 64(4^x)$ |
| 81. $f(x) = 16(4^{-x})$ | 82. $f(x) = e^{-x} + 3$ |
| $g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{x-2}$ | $g(x) = e^{3-x}$ |
| $h(x) = 16(2^{-2x})$ | $h(x) = -e^{x-3}$ |

83. Grafique las funciones dadas por $y = 3^x$ y $y = 4^x$ y use las gráficas para resolver cada desigualdad.

- $4^x < 3^x$
- $4^x > 3^x$



84. Use una calculadora de gráficas para graficar cada función. Use la gráfica para hallar dónde la función es cre-

ciente y decreciente, y aproxime cualesquier valores relativos máximos o mínimos.

- $f(x) = x^2 e^{-x}$
- $g(x) = x^{2^{3-x}}$



85. ANÁLISIS GRÁFICO Use una calculadora de gráficas para graficar $y_1 = (1 + 1/x)^x$ y $y_2 = e$ en la misma pantalla. Usando el comando *trace*, explique qué ocurre a la gráfica de y_1 cuando x aumenta.



86. ANÁLISIS GRÁFICO Use una calculadora de gráficas para graficar

$$f(x) = \left(1 + \frac{0.5}{x}\right)^x \quad \text{y} \quad g(x) = e^{0.5}$$

en la misma pantalla. ¿Cuál es la relación entre f y g cuando x aumenta o disminuye sin límite?



87. ANÁLISIS GRÁFICO Use una calculadora de gráficas para graficar cada par de funciones en la misma pantalla. Describa cualesquiera similitudes y diferencias en las gráficas.

- $y_1 = 2^x, y_2 = x^2$
- $y_1 = 3^x, y_2 = x^3$

88. PIÉNSELO ¿Cuáles funciones son exponenciales?

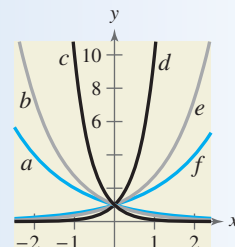
- $3x$
- $3x^2$
- 3^x
- 2^{-x}

89. INTERÉS COMPUESTO Use la fórmula

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

para calcular el saldo de una cuenta cuando $P = \$3000$, $r = 6\%$ y $t = 10$ años, y la capitalización se hace (a) diaria, (b) por hora, (c) por minuto, y (d) por segundo. ¿Aumentar el número de capitalizaciones por año resulta en un crecimiento ilimitado del saldo de la cuenta? Explique.

90. TOQUE FINAL La figura siguiente muestra las gráficas de $y = 2^x$, $y = e^x$, $y = 10^x$, $y = 2^{-x}$, $y = e^{-x}$ y $y = 10^{-x}$. Relacione cada función con su gráfica. [Las gráficas están marcadas de la (a) a la (f).] Explique su razonamiento.



PROYECTO: POBLACIÓN POR MILLA CUADRA

Para trabajar una aplicación extendida que analiza la población por milla cuadrada de un país, visite el sitio web del texto en academic.cengage.com. (Fuente de Datos: U.S. Census Bureau)

3.2 FUNCIONES LOGARÍTMICAS Y SUS GRÁFICAS

Lo que debe aprender

- Reconocer y evaluar funciones logarítmicas con base a .
- Graficar funciones logarítmicas.
- Reconocer, evaluar y graficar funciones logarítmicas naturales.
- Usar funciones logarítmicas para modelar y resolver problemas de la vida real.

Por qué debe aprenderlo

Con frecuencia se usan funciones logarítmicas para modelar observaciones científicas. Por ejemplo, en el Ejercicio 97 de la página 236 se utilizó una función logarítmica para modelar la memoria humana.



© Ariel Skelley/Corbis

Funciones logarítmicas

En la Sección 1.9 usted estudió el concepto de función inversa. Ahí, aprendió que si una función es biunívoca, esto es, si la función tiene la propiedad de que ninguna recta horizontal interseca su gráfica más de una vez, la función debe tener una inversa. Si observa de nuevo las gráficas de las funciones exponenciales introducidas en la Sección 3.1, verá que toda función de la forma $f(x) = a^x$ pasa la prueba de la recta horizontal y por tanto debe tener una inversa. Esta función inversa se denomina **función logarítmica con base a** .

Definición de función logarítmica con base a

Para $x > 0$, $a > 0$ y $a \neq 1$,

$$y = \log_a x \text{ si y sólo si } x = a^y.$$

La función dada por

$$f(x) = \log_a x \quad \text{léase como "logaritmo base } a \text{ de } x".$$

se llama **la función logarítmica con base a** .

Las ecuaciones

$$y = \log_a x \quad \text{y} \quad x = a^y$$

son equivalentes. La primera ecuación está en forma logarítmica y la segunda en forma exponencial. Por ejemplo, la ecuación logarítmica $2 = \log_3 9$ se puede reescribir en forma exponencial como $9 = 3^2$. La ecuación exponencial $5^3 = 125$ se puede reescribir en forma logarítmica como $\log_5 125 = 3$.

Al evaluar logaritmos, recuerde que *un logaritmo es un exponente*. Esto significa que $\log_a x$ es el exponente al que a debe elevarse para obtener x . Por ejemplo, $\log_2 8 = 3$ porque 2 debe elevarse a la tercera potencia para dar 8.

Ejemplo 1 Evaluar logaritmos

Use la definición de función logarítmica para evaluar cada uno de los siguientes logaritmos al valor indicado de x .

a. $f(x) = \log_2 x$, $x = 32$

b. $f(x) = \log_3 x$, $x = 1$

c. $f(x) = \log_4 x$, $x = 2$

d. $f(x) = \log_{10} x$, $x = \frac{1}{100}$

Solución

a. $f(32) = \log_2 32 = 5$

porque $2^5 = 32$.

b. $f(1) = \log_3 1 = 0$

porque $3^0 = 1$.

c. $f(2) = \log_4 2 = \frac{1}{2}$

porque $4^{1/2} = \sqrt{4} = 2$.

d. $f\left(\frac{1}{100}\right) = \log_{10} \frac{1}{100} = -2$

porque $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$.

PUNTO de repaso ➔ Ahora trate de hacer el Ejercicio 23.

La función logarítmica con base 10 se llama **función logarítmica común**. Está denotada por $\log_{10}$ o simplemente por $\log$. En casi todas las calculadoras esta función está denotada por **LOG**. El Ejemplo 2 muestra cómo usar una calculadora para evaluar funciones logarítmicas comunes. En la siguiente sección, aprenderá a usar una calculadora para resolver logaritmos a cualquier base.

Ejemplo 2 Evaluar logaritmos comunes en una calculadora

Use calculadora para evaluar la función dada por $f(x) = \log x$ en cada valor de x .

- a. $x = 10$ b. $x = \frac{1}{3}$ c. $x = 2.5$ d. $x = -2$

Solución

Valor de la función	Tecleo en calculadora de gráficas	Pantalla
a. $f(10) = \log 10$	LOG 10 ENTER	1
b. $f(\frac{1}{3}) = \log \frac{1}{3}$	LOG (1 ÷ 3) ENTER	-0.4771213
c. $f(2.5) = \log 2.5$	LOG 2.5 ENTER	0.3979400
d. $f(-2) = \log(-2)$	LOG (-) 2 ENTER	ERROR

Observe que la calculadora exhibe un mensaje de error (o un número complejo) cuando el usuario trata de evaluar $\log(-2)$. La razón de esto es que no hay una potencia de número real a la cual 10 se pueda elevar para obtener -2 .

PUNTO de repaso ➔ Ahora trate de hacer el Ejercicio 29.

Las siguientes propiedades se obtienen directamente de la definición de la función logarítmica con base a

Propiedades de los logaritmos.

- $\log_a 1 = 0$ porque $a^0 = 1$.
- $\log_a a = 1$ porque $a^1 = a$.
- $\log_a a^x = x$ y $a^{\log_a x} = x$ Propiedades inversas
- Si $\log_a x = \log_a y$, entonces $x = y$. Propiedad biunívoca

Ejemplo 3 Usar las propiedades de los logaritmos

- a. Simplificar: $\log_4 1$ b. Simplificar: $\log_{\sqrt{7}} \sqrt{7}$ c. Simplificar: $6^{\log_6 20}$

Solución

- a. Usando la propiedad 1, se deduce que $\log_4 1 = 0$.
b. Usando la propiedad 2, se puede concluir que $\log_{\sqrt{7}} \sqrt{7} = 1$.
c. Usando la propiedad inversa (propiedad 3), se deduce que $6^{\log_6 20} = 20$.

PUNTO de repaso ➔ Ahora trate de hacer el Ejercicio 33.

Es posible usar la propiedad biunívoca (propiedad 4) para resolver ecuaciones logarítmicas sencillas, como se muestra en el Ejemplo 4.

Ejemplo 4 Usar la propiedad biunívoca

a. $\log_3 x = \log_3 12$

Ecuación original

$x = 12$

Propiedad biunívoca

b. $\log(2x + 1) = \log 3x \Rightarrow 2x + 1 = 3x \Rightarrow 1 = x$

c. $\log_4(x^2 - 6) = \log_4 10 \Rightarrow x^2 - 6 = 10 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$

PUNTO de repaso

Ahora trate de hacer el Ejercicio 85.

Gráficas de funciones logarítmicas

Para trazar la gráfica de $y = \log_a x$, se puede usar el hecho de que las gráficas de funciones inversas son reflexiones una de la otra en la recta $y = x$.

Ejemplo 5 Gráficas de funciones exponenciales y logarítmicas

En el mismo plano de coordenadas, trace la gráfica de cada función.

a. $f(x) = 2^x$

b. $g(x) = \log_2 x$

Solución

a. Para $f(x) = 2^x$, construya una tabla de valores. Al determinar estos puntos y enlazarlos con una curva lisa, se obtiene la gráfica que se muestra en la Figura 3.14.

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x) = 2^x$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

b. Como $g(x) = \log_2 x$ es la función inversa de $f(x) = 2^x$, la gráfica de g se obtiene al localizar los puntos $(f(x), x)$ y enlazarlos con una curva lisa. La gráfica de g es una reflexión de la gráfica de f en la recta $y = x$, como se ve en la Figura 3.14.

PUNTO de repaso

Ahora trate de hacer el Ejercicio 37.

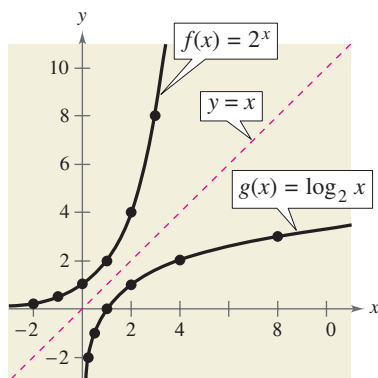


FIGURA 3.14

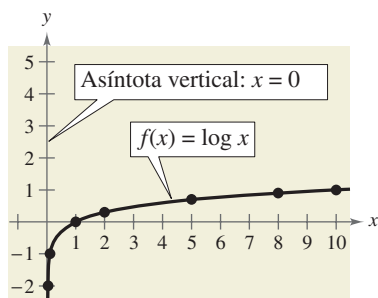


FIGURA 3.15

Ejemplo 6 Trazar la gráfica de una función logarítmica

Trace la gráfica de la función logarítmica común $f(x) = \log x$. Identifique la asíntota vertical.

Solución

Empiece por construir una tabla de valores. Observe que algunos de ellos se pueden obtener sin calculadora si se usa la propiedad inversa de los logaritmos. Otros requieren calculadora. A continuación, determine los puntos y enlázelos con una curva lisa, como se ve en la Figura 3.15. La asíntota vertical es $x = 0$ (eje y).

	Sin calculadora				Con calculadora		
x	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$	1	10	2	5	8
$f(x) = \log x$	-2	-1	0	1	0.301	0.699	0.903

PUNTO de repaso

Ahora trate de hacer el Ejercicio 43

La naturaleza de la gráfica de la Figura 3.15 es típica de funciones de la forma $f(x) = \log_a x$, $a > 1$. Tienen una intersección con el eje x y una asíntota vertical. Observe la lentitud con la que la gráfica sube para $x > 1$. Las características básicas de las gráficas logarítmicas se resumen en la Figura 3.16.

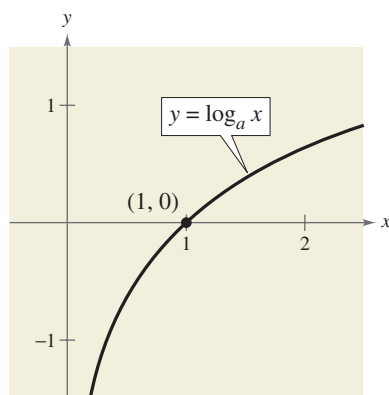


FIGURA 3.16

Gráfica de $y = \log_a x$, $a > 1$

- Dominio: $(0, \infty)$
- Rango: $(-\infty, \infty)$
- Intersección con el eje x : $(1, 0)$
- Creciente
- Biunívoca; por tanto, tiene una función inversa
- El eje y es una asíntota vertical ($\log_a x \rightarrow -\infty$ cuando $x \rightarrow 0^+$).
- Continua
- Reflexión de la gráfica de $y = a^x$ alrededor de la recta $y = x$

Las características básicas de la gráfica de $f(x) = a^x$ se muestran a continuación para ilustrar la relación inversa entre $f(x) = a^x$ y $g(x) = \log_a x$.

- Dominio: $(-\infty, \infty)$ • Rango: $(0, \infty)$
- Intersección con el eje y : $(0, 1)$ • Eje x es una asíntota horizontal ($a^x \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow -\infty$).

En el siguiente ejemplo, la gráfica de $y = \log_a x$ se usa para trazar las gráficas de funciones de la forma $f(x) = b \pm \log_a(x + c)$. Nótese la forma en que el desplazamiento horizontal de la gráfica resulta en un desplazamiento horizontal de la asíntota vertical.

Tip de estudio

Usted puede usar sus conocimientos de transformaciones para identificar asíntotas verticales de funciones logarítmicas. Por ejemplo, en el Ejemplo 7(a), la gráfica de $g(x) = f(x - 1)$ desplaza la gráfica de $f(x)$ una unidad a la derecha. Por tanto, la asíntota vertical de $g(x)$ es $x = 1$, una unidad a la derecha de la asíntota vertical de la gráfica de $f(x)$.

Ayuda de álgebra

En la Sección 1.7 puede repasar las técnicas de desplazamiento, reflexión y alargamiento de gráficas.

Ejemplo 7 Desplazamiento de gráficas de funciones logarítmicas

La gráfica de cada una de las funciones es similar a la gráfica de $f(x) = \log x$.

- Como $g(x) = \log(x - 1) = f(x - 1)$, la gráfica de g se puede obtener al desplazar la gráfica de f una unidad a la derecha, como se ilustra en la Figura 3.17.
- Como $h(x) = 2 + \log x = 2 + f(x)$, la gráfica de h se puede obtener al desplazar la gráfica de f dos unidades hacia arriba, como se ilustra en la Figura 3.18.

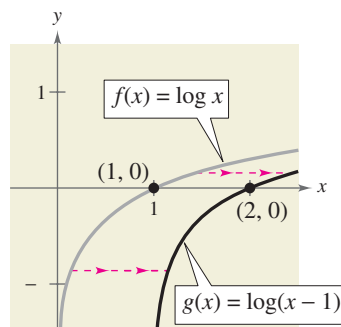


FIGURA 3.17

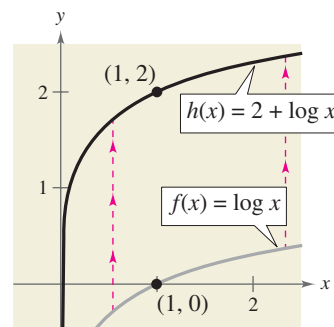
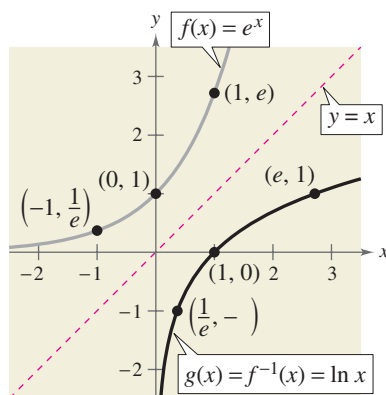


FIGURA 3.18

Función logaritmo natural

Si vemos de nuevo la gráfica de la función exponencial natural introducida en la página 230, en la Sección 3.1, veremos que $f(x) = e^x$ es biunívoca y, por tanto, tiene una función inversa. Esta función inversa se denomina **función logaritmo natural** y está denotada por el símbolo especial $\ln x$, que se lee como “el log natural de x ” o “ele ene de x .” Observe que el logaritmo natural se escribe sin base; se entiende que la base es e .



Reflexión de la gráfica de $f(x) = e^x$ alrededor de la recta $y = x$

FIGURA 3.19

Función logaritmo natural

La función definida por

$$f(x) = \log_e x = \ln x, \quad x > 0$$

se llama **función logaritmo natural**.

La definición citada líneas antes implica que la función logaritmo natural y la función exponencial natural son inversas una de la otra. Por tanto, toda ecuación logarítmica se puede escribir en una forma exponencial equivalente, y toda ecuación exponencial se puede escribir en forma logarítmica. Esto es, $f(x) = e^x$ y $g(x) = \ln x$ son ecuaciones equivalentes.

Como las funciones dadas por $f(x) = e^x$ y $g(x) = \ln x$ son funciones inversas una de la otra, sus gráficas son reflexiones una de la otra en la recta $y = x$. Esta propiedad reflexiva está ilustrada en la Figura 3.19.

En casi todas las calculadoras, el logaritmo natural está denotado por $\boxed{\text{LN}}$, como se ilustra en el Ejemplo 8.

Ejemplo 8 Evaluar la función logaritmo natural

Use una calculadora para evaluar la función dada por $f(x) = \ln x$ para cada valor de x .

- $x = 2$
- $x = 0.3$
- $x = -1$
- $x = 1 + \sqrt{2}$

Solución

Valor de la función	Tecleo en calculadora de gráficas	Pantalla
a. $f(2) = \ln 2$	$\boxed{\text{LN}} \ 2 \ \boxed{\text{ENTER}}$	0.6931472
b. $f(0.3) = \ln 0.3$	$\boxed{\text{LN}} \ .3 \ \boxed{\text{ENTER}}$	-1.2039728
c. $f(-1) = \ln(-1)$	$\boxed{\text{LN}} \ \boxed{(-)} \ 1 \ \boxed{\text{ENTER}}$	ERROR
d. $f(1 + \sqrt{2}) = \ln(1 + \sqrt{2})$	$\boxed{\text{LN}} \ \boxed{1} \ \boxed{+} \ \boxed{\sqrt{}} \ 2 \ \boxed{\text{ENTER}}$	0.8813736

PUNTO de repaso ➔ Ahora trate de hacer el Ejercicio 67.

ATENCIÓN

Observe que como cada función logarítmica, el dominio de la función logaritmo natural es el conjunto de los números reales positivos; asegúrese de ver que $\ln x$ no está definido para cero o para números negativos.

En el Ejemplo 8, asegúrese de ver que $\ln(-1)$ da un mensaje de error en casi todas las calculadoras. (Algunas pueden exhibir un número complejo.) Esto ocurre porque el dominio de $\ln x$ es el conjunto de los números reales positivos (vea Figura 3.19). Por tanto, $\ln(-1)$ no está definido.

Las cuatro propiedades de los logaritmos citadas en la página 228 también son válidas para logaritmos naturales.

Propiedades de los logaritmos naturales

1. $\ln 1 = 0$ porque $e^0 = 1$.
2. $\ln e = 1$ porque $e^1 = e$.
3. $\ln e^x = x$ si $e^{\ln x} = x$ Propiedades inversas
4. Si $\ln x = \ln y$, entonces $x = y$. Propiedad biunívoca

Ejemplo 9 Usar las propiedades de los logaritmos naturales

Use las propiedades de los logaritmos naturales para simplificar cada expresión.

- a. $\ln \frac{1}{e}$ b. $e^{\ln 5}$ c. $\frac{\ln 1}{3}$ d. $2 \ln e$

Solución

- a. $\ln \frac{1}{e} = \ln e^{-1} = -1$ Propiedad inversa b. $e^{\ln 5} = 5$ Propiedad inversa
 c. $\frac{\ln 1}{3} = \frac{0}{3} = 0$ Propiedad 1 d. $2 \ln e = 2(1) = 2$ Propiedad 2

PUNTO de repaso

Ahora trate de hacer el Ejercicio 71.

Ejemplo 10 Hallar el dominio de funciones logarítmicas

Halle el dominio de cada función.

- a. $f(x) = \ln(x - 2)$ b. $g(x) = \ln(2 - x)$ c. $h(x) = \ln x^2$

Solución

- a. Como $\ln(x - 2)$ está definido sólo si $x - 2 > 0$, se deduce que el dominio de f es $(2, \infty)$. La gráfica de f se muestra en la Figura 3.20.
 b. Como $\ln(2 - x)$ está definido sólo si $2 - x > 0$, se deduce que el dominio de g es $(-\infty, 2)$. La gráfica de g se muestra en la Figura 3.21.
 c. Como $\ln x^2$ está definido sólo si $x^2 > 0$, se deduce que el dominio de h es todos los números reales excepto $x = 0$. La gráfica de h se muestra en la Figura 3.22.

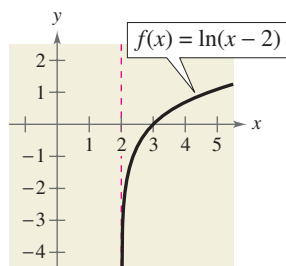


FIGURA 3.20

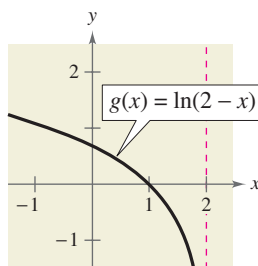


FIGURA 3.21

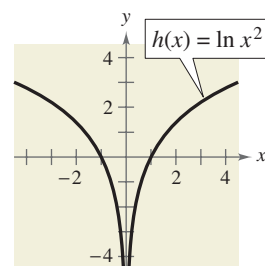


FIGURA 3.22

PUNTO de repaso

Ahora trate de hacer el Ejercicio 75.

Aplicación

Ejemplo 11 Modelo de la memoria humana

Los estudiantes que participan en un experimento de psicología asistieron a varias conferencias sobre un tema y se les dio un examen. Cada mes, durante un año después del examen, los estudiantes fueron sometidos al examen nuevamente para ver cuánto recordaban del material. El promedio de calificaciones para el grupo está dado por el modelo de memoria humana $f(t) = 75 - 6 \ln(t + 1)$, $0 \leq t \leq 12$, donde t es el tiempo en meses.

- ¿Cuál fue el promedio de calificaciones en el examen original ($t = 0$)?
- ¿Cuál fue el promedio de calificaciones al término de $t = 2$ meses?
- ¿Cuál fue el promedio de calificaciones al término de $t = 6$ meses?

Solución algebraica

- a. El promedio de calificaciones original fue

$$\begin{aligned} f(0) &= 75 - 6 \ln(0 + 1) && \text{Sustituir 0 por } t. \\ &= 75 - 6 \ln 1 && \text{Simplificar.} \\ &= 75 - 6(0) && \text{Propiedad de logaritmos naturales} \\ &= 75. && \text{Solución} \end{aligned}$$

- b. Después de 2 meses el promedio fue

$$\begin{aligned} f(2) &= 75 - 6 \ln(2 + 1) && \text{Sustituir 2 por } t. \\ &= 75 - 6 \ln 3 && \text{Simplificar.} \\ &\approx 75 - 6(1.0986) && \text{Usar calculadora.} \\ &\approx 68.4. && \text{Solución} \end{aligned}$$

- c. Tras 6 meses el promedio fue

$$\begin{aligned} f(6) &= 75 - 6 \ln(6 + 1) && \text{Sustituir 6 por } t. \\ &= 75 - 6 \ln 7 && \text{Simplificar.} \\ &\approx 75 - 6(1.9459) && \text{Usar calculadora.} \\ &\approx 63.3. && \text{Solución} \end{aligned}$$

PUNTO de repaso → Ahora trate de hacer el Ejercicio 97.

Solución gráfica

Use una calculadora de gráficas para graficar el modelo $y = 75 - 6 \ln(x + 1)$. A continuación use el comando *value* o *trace* para aproximar lo siguiente.

- Cuando $x = 0$, $y = 75$ (vea Figura 3.23). Por tanto, el promedio de calificaciones original fue 75.
- Cuando $x = 2$, $y \approx 68.4$ (vea Figura 3.24). Por tanto, el promedio de calificaciones después de 2 meses fue de unos 68.4, aproximadamente.
- Cuando $x = 6$, $y \approx 63.3$ (vea Figura 3.25). Por tanto, el promedio de calificaciones después de 6 meses fue de alrededor de 63.3.

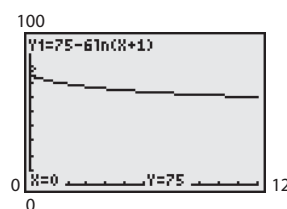


FIGURA 3.23

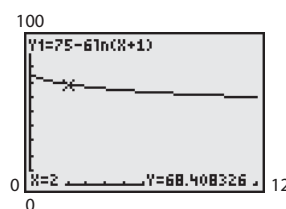


FIGURA 3.24

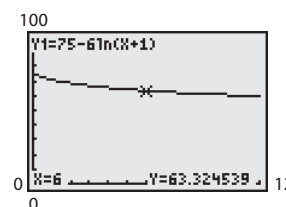


FIGURA 3.25

DISCUSIÓN EN CLASE

Análisis de un modelo de memoria humana Use una calculadora de gráficas para determinar el tiempo en meses cuando el promedio de calificaciones del Ejemplo 11 fue 60. Explique su método para resolver el problema. Describa otra forma en que se pueda usar una calculadora de gráficas para determinar la respuesta.

3.2 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

VOCABULARIO: Llene los espacios en blanco.

- La función inversa de la función exponencial dada por $f(x) = a^x$ se llama función _____ con base a .
- La función logarítmica común tiene base _____.
- La función logarítmica dada por $f(x) = \ln x$ se denomina función logarítmica _____ y tiene base _____.
- Las propiedades inversas de los logaritmos y exponenciales expresan que $\log_a a^x = x$ y _____.
- La propiedad biunívoca de los logaritmos naturales expresa que si $\ln x = \ln y$, entonces _____.
- El dominio de la función logaritmo natural es el conjunto de los _____.

HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 7-14, escriba la ecuación logarítmica en forma exponencial. Por ejemplo, la forma exponencial de $\log_5 25 = 2$ es $5^2 = 25$.

- $\log_4 16 = 2$
- $\log_7 343 = 3$
- $\log_9 \frac{1}{81} = -2$
- $\log \frac{1}{1000} = -3$
- $\log_{32} 4 = \frac{2}{5}$
- $\log_{16} 8 = \frac{3}{4}$
- $\log_{64} 8 = \frac{1}{2}$
- $\log_8 4 = \frac{2}{3}$

En los Ejercicios 15-22, escriba la ecuación exponencial en forma logarítmica. Por ejemplo, la forma logarítmica de $2^3 = 8$ es $\log_2 8 = 3$.

- $5^3 = 125$
- $13^2 = 169$
- $81^{1/4} = 3$
- $9^{3/2} = 27$
- $6^{-2} = \frac{1}{36}$
- $4^{-3} = \frac{1}{64}$
- $24^0 = 1$
- $10^{-3} = 0.001$

En los Ejercicios 23-28, evalúe la función en el valor indicado de x sin usar calculadora.

Función	Valor
23. $f(x) = \log_2 x$	$x = 64$
24. $f(x) = \log_{25} x$	$x = 5$
25. $f(x) = \log_8 x$	$x = 1$
26. $f(x) = \log x$	$x = 10$
27. $g(x) = \log_a x$	$x = a^2$
28. $g(x) = \log_b x$	$x = b^{-3}$



En los Ejercicios 29-32, use una calculadora para evaluar $f(x) = \log x$ en el valor de x indicado. Redondee el resultado a tres lugares decimales.

- $x = \frac{7}{8}$
- $x = \frac{1}{500}$
- $x = 12.5$
- $x = 96.75$

En los Ejercicios 33-36, use las propiedades de los logaritmos para simplificar la expresión.

- $\log_{11} 11^7$
- $\log_{3.2} 1$

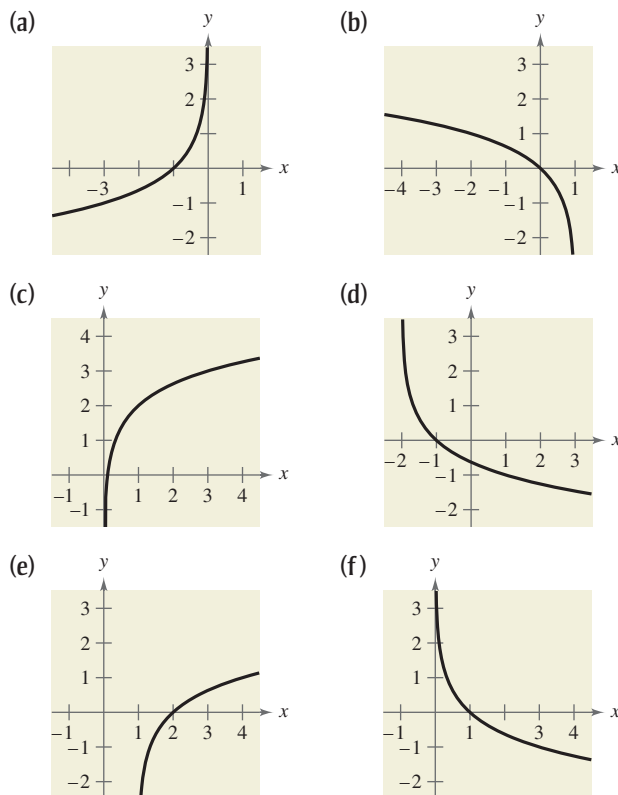
35. $\log_{\pi} \pi$

36. $9^{\log_9 15}$

En los Ejercicios 37-44, encuentre el dominio, la intersección con el eje x y la asíntota vertical de la función logarítmica y trace su gráfica.

- $f(x) = \log_4 x$
- $g(x) = \log_6 x$
- $y = -\log_3 x + 2$
- $h(x) = \log_4(x - 3)$
- $f(x) = -\log_6(x + 2)$
- $y = \log_5(x - 1) + 4$
- $y = \log\left(\frac{x}{7}\right)$
- $y = \log(-x)$

En los Ejercicios 45-50, use la gráfica de $g(x) = \log_3 x$ para relacionar la función dada con su gráfica. A continuación describa la relación entre las gráficas de f y g . [Las gráficas están marcadas (a),(b),(c),(d),(e) y (f).]



45. $f(x) = \log_3 x + 2$ 46. $f(x) = -\log_3 x$
 47. $f(x) = -\log_3(x + 2)$ 48. $f(x) = \log_3(x - 1)$
 49. $f(x) = \log_3(1 - x)$ 50. $f(x) = -\log_3(-x)$

En los Ejercicios 51-58, escriba la ecuación logarítmica en forma exponencial.

51. $\ln \frac{1}{2} = -0.693 \dots$ 52. $\ln \frac{2}{5} = -0.916 \dots$
 53. $\ln 7 = 1.945 \dots$ 54. $\ln 10 = 2.302 \dots$
 55. $\ln 250 = 5.521 \dots$ 56. $\ln 1084 = 6.988 \dots$
 57. $\ln 1 = 0$ 58. $\ln e = 1$

En los Ejercicios 59-66, escriba la ecuación exponencial en forma logarítmica.

59. $e^4 = 54.598 \dots$ 60. $e^2 = 7.3890 \dots$
 61. $e^{1/2} = 1.6487 \dots$ 62. $e^{1/3} = 1.3956 \dots$
 63. $e^{-0.9} = 0.406 \dots$ 64. $e^{-4.1} = 0.0165 \dots$
 65. $e^x = 4$ 66. $e^{2x} = 3$



En los Ejercicios 67-70, use una calculadora para evaluar la función en el valor de x indicado. Redondee el resultado a tres lugares decimales.

Función	Valor
67. $f(x) = \ln x$	$x = 18.42$
68. $f(x) = 3 \ln x$	$x = 0.74$
69. $g(x) = 8 \ln x$	$x = 0.05$
70. $g(x) = -\ln x$	$x = \frac{1}{2}$

En los Ejercicios 71-74, evalúe $g(x) = \ln x$ en el valor de x indicado sin usar calculadora.

71. $x = e^5$ 72. $x = e^{-4}$
 73. $x = e^{-5/6}$ 74. $x = e^{-5/2}$

En los Ejercicios 75-78, encuentre el dominio, la intersección con el eje x y la asíntota vertical de la función logarítmica y trace su gráfica.

75. $f(x) = \ln(x - 4)$ 76. $h(x) = \ln(x + 5)$
 77. $g(x) = \ln(-x)$ 78. $f(x) = \ln(3 - x)$



En los Ejercicios 79-84, use una calculadora de gráficas para graficar la función. Asegúrese de usar una pantalla apropiada.

79. $f(x) = \log(x + 9)$ 80. $f(x) = \log(x - 6)$
 81. $f(x) = \ln(x - 1)$ 82. $f(x) = \ln(x + 2)$
 83. $f(x) = \ln x + 8$ 84. $f(x) = 3 \ln x - 1$

En los Ejercicios 85-92, use la propiedad biunívoca para despejar x de la ecuación.

85. $\log_5(x + 1) = \log_5 6$ 86. $\log_2(x - 3) = \log_2 9$
 87. $\log(2x + 1) = \log 15$ 88. $\log(5x + 3) = \log 12$
 89. $\ln(x + 4) = \ln 12$ 90. $\ln(x - 7) = \ln 7$
 91. $\ln(x^2 - 2) = \ln 23$ 92. $\ln(x^2 - x) = \ln 6$

93. PAGO MENSUAL El modelo

$$t = 16.625 \ln\left(\frac{x}{x - 750}\right), \quad x > 750$$

aproxima la duración de una hipoteca para viviendas de \$150 000 a 6% en términos de pago mensual. En el modelo, t es la duración de la hipoteca en años y x el pago mensual en dólares.

- (a) Use el modelo para aproximar las duraciones de una hipoteca de \$150 000 a 6% cuando el pago mensual es de \$897.72 y cuando es de \$1659.24.
 (b) Aproxime las cantidades totales pagadas en el plazo de la hipoteca con un pago mensual de \$897.72 y con uno de \$1659.24.
 (c) Aproxime los cargos totales por intereses para un pago mensual de \$897.72 y para uno de \$1659.24.
 (d) ¿Cuál es la asíntota vertical para el modelo? Interprete su significado en el contexto del problema.

94. INTERÉS COMPUESTO Un capital inicial P , invertido al $5\frac{1}{2}\%$ y capitalizado continuamente aumenta a una cantidad K veces el capital inicial original después de t años, donde t está dado por $t = (\ln K)/0.055$.

- (a) Complete la tabla e interprete sus resultados.

K	1	2	4	6	8	10	12
t							

- (b) Trace una gráfica de la función.

95. TELEVISIÓN POR CABLE El número de sistemas C de televisión por cable (en miles) en cierto país, de 2001 a 2006, puede aproximarse con el modelo

$$C = 10.355 - 0.298t \ln t, \quad 1 \leq t \leq 6$$

donde t representa el año, con $t = 1$ correspondiente a 2001. (Fuente: Warren Communication News)

- (a) Complete la tabla.

t	1	2	3	4	5	6
C						



- (b) Use una calculadora de gráficas para graficar la función.
 (c) ¿El modelo puede usarse para predecir los números de sistemas de televisión por cable después de 2006? Explique.

- 96. POBLACIÓN** El tiempo t en años para que la población mundial se duplique, si es creciente a un ritmo r continuo, está dado por $t = (\ln 2)/r$.

(a) Complete la tabla e interprete sus resultados.

r	0.005	0.010	0.015	0.020	0.025	0.030
t						

(b) Use una calculadora de gráficas para graficar la función.

- 97. MODELO DE MEMORIA HUMANA** A unos estudiantes de matemáticas se les aplicó un examen y, a continuación, cada mes se les aplicó otro examen equivalente. El promedio de calificaciones para el grupo está dado por el modelo de memoria humana $f(t) = 80 - 17 \log(t + 1)$, $0 \leq t \leq 12$, donde t es el tiempo en meses.

- (a) Use una calculadora de gráficas para graficar el modelo en el dominio especificado.
- (b) ¿Cuál fue el promedio de calificaciones en el examen original ($t = 0$)?
- (c) ¿Cuál fue el promedio de calificaciones después de 4 meses?
- (d) ¿Cuál fue el promedio de calificaciones después de 10 meses?

- 98. INTENSIDAD DEL SONIDO** La relación entre el número de decibels β y la intensidad I de un sonido, en watts por metro cuadrado, es

$$\beta = 10 \log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right).$$

- (a) Determine el número de decibels de un sonido con una intensidad de 1 watt por metro cuadrado.
- (b) Determine el número de decibels de un sonido con una intensidad de 10^{-2} watts por metro cuadrado.
- (c) La intensidad del sonido en el inciso (a) es 100 veces más que el del inciso (b). ¿El número de decibels es 100 veces mayor? Explique.

EXPLORACIÓN

¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 99 y 100, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

- 99.** Puede determinar la gráfica de $f(x) = \log_6 x$ al graficar $g(x) = 6^x$ y reflejarla alrededor del eje x .
- 100.** La gráfica de $f(x) = \log_3 x$ contiene el punto $(27, 3)$.

En los Ejercicios 101-104, trace las gráficas de f y g y describa la relación entre ellas. ¿Cuál es la relación entre las funciones f y g ?

- 101.** $f(x) = 3^x$, $g(x) = \log_3 x$
- 102.** $f(x) = 5^x$, $g(x) = \log_5 x$
- 103.** $f(x) = e^x$, $g(x) = \ln x$

104. $f(x) = 8^x$, $g(x) = \log_8 x$

- 105. PIÉNSELO** Complete la tabla para $f(x) = 10^x$.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$					

Complete la tabla para $f(x) = \log x$.

x	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$	1	10	100
$f(x)$					

Compare las dos tablas. ¿Cuál es la relación entre $f(x) = 10^x$ y $f(x) = \log x$?

- 106. ANÁLISIS GRÁFICO** Use una calculadora de gráficas para graficar f y g en la misma pantalla y determine cuál crece a un ritmo mayor cuando x se aproxima a $+\infty$. ¿Qué puede concluir acerca del ritmo de crecimiento de la función logarítmica natural?

- (a) $f(x) = \ln x$, $g(x) = \sqrt{x}$
- (b) $f(x) = \ln x$, $g(x) = \sqrt[4]{x}$

- 107.** (a) Complete la tabla para la función dada por $f(x) = (\ln x)/x$.

x	1	5	10	10^2	10^4	10^6
$f(x)$						

- (b) Use la tabla del inciso (a) para determinar qué valor de $f(x)$ se aproxima cuando x aumenta sin límite.
- (c) Use una calculadora de gráficas para confirmar el resultado del inciso (b).

- 108. TOQUE FINAL** La tabla de valores se obtuvo al evaluar una función. Determine cuál de los enunciados puede ser verdadero y cuál debe ser falso.

x	y
1	0
2	1
8	3

- (a) y es una función exponencial de x .
- (b) y es una función logarítmica de x .
- (c) x es una función exponencial de y .
- (d) y es una función lineal de x .

- 109. ESCRITURA** Explique por qué $\log_a x$ está definido sólo para $0 < a < 1$ y $a > 1$.

- En los Ejercicios 110 y 111, (a) use una calculadora de gráficas para graficar la función, (b) use la gráfica para determinar los intervalos en los que la función es creciente y decreciente y (c) aproxime cualesquier valores relativos máximo o mínimo de la función.

110. $f(x) = |\ln x|$ **111.** $h(x) = \ln(x^2 + 1)$

3.3 PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

Lo que debe aprender

- Usar la fórmula de cambio de base para reescribir y evaluar expresiones logarítmicas.
- Usar propiedades de los logaritmos para evaluar o reescribir expresiones logarítmicas.
- Usar propiedades de los logaritmos para expandir o condensar expresiones logarítmicas.
- Usar funciones logarítmicas para modelar y resolver problemas de la vida real.

Por qué debe aprenderlo

Se pueden usar funciones logarítmicas para modelar y resolver problemas de la vida real. Por ejemplo, en los Ejercicios 87-90 en la página 242 se usa una función logarítmica para modelar la relación entre el número de decibeles y la intensidad de un sonido.



Cambio de base

Casi todas las calculadoras tienen sólo dos tipos de teclas de logaritmos, una para logaritmos comunes (base 10) y una para logaritmos naturales (base e). Aun cuando los logaritmos comunes y los naturales son los que se usan con más frecuencia, ocasionalmente es necesario evaluar logaritmos con otras bases. Para hacer esto se puede usar la siguiente **fórmula de cambio de base**.

Fórmula de cambio de base

Sean a , b y x números reales positivos tales que $a \neq 1$ y $b \neq 1$. Entonces $\log_a x$ se puede convertir a una base diferente como sigue.

Base b	Base 10	Base e
$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$	$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$	$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$

Una forma de ver la fórmula de cambio de base es que los logaritmos de base a son simplemente *múltiplos constantes* de logaritmos con base b . El multiplicador constante es $1/(\log_b a)$.

Ejemplo 1 Cambiar bases usando logaritmos comunes

a. $\log_4 25 = \frac{\log 25}{\log 4}$ $\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$

$\approx \frac{1.39794}{0.60206}$ Usar calculadora.

≈ 2.3219 Simplificar.

b. $\log_2 12 = \frac{\log 12}{\log 2} \approx \frac{1.07918}{0.30103} \approx 3.5850$

PUNTO de repaso → Ahora trate de hacer el Ejercicio 7(a).

Ejemplo 2 Cambiar bases usando logaritmos naturales

a. $\log_4 25 = \frac{\ln 25}{\ln 4}$ $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$

$\approx \frac{3.21888}{1.38629}$ Usar calculadora.

≈ 2.3219 Simplificar.

b. $\log_2 12 = \frac{\ln 12}{\ln 2} \approx \frac{2.48491}{0.69315} \approx 3.5850$

PUNTO de repaso → Ahora trate de hacer el Ejercicio 7(b).

Propiedades de los logaritmos

De la sección anterior, usted ya sabe que la función logarítmica con base a es la *función inversa* de la función exponencial con base a . En consecuencia, tiene sentido que las propiedades de los exponentes deben tener propiedades correspondientes que comprendan los logaritmos. Por ejemplo, la propiedad exponencial $a^0 = 1$ tiene la correspondiente propiedad logarítmica $\log_a 1 = 0$.

ATENCIÓN

No hay una propiedad general que se pueda usar para reescribir $\log_a(u \pm v)$. Específicamente, $\log_a(u + v)$ no es igual a $\log_a u + \log_a v$.

Propiedades de los logaritmos

Sea a un número positivo tal que $a \neq 1$, y sea n un número real. Si u y v son números reales positivos, las siguientes propiedades son verdaderas.

	Logaritmo con base a	Logaritmo natural
1. Propiedad del producto:	$\log_a(uv) = \log_a u + \log_a v$	$\ln(uv) = \ln u + \ln v$
2. Propiedad del cociente:	$\log_a \frac{u}{v} = \log_a u - \log_a v$	$\ln \frac{u}{v} = \ln u - \ln v$
3. Propiedad de la potencia:	$\log_a u^n = n \log_a u$	$\ln u^n = n \ln u$

Para demostraciones de las propiedades citadas líneas antes, vea la página 276.

Ejemplo 3 Usar propiedades de los logaritmos

Escriba cada logaritmo en términos de $\ln 2$ y $\ln 3$.

a. $\ln 6$ b. $\ln \frac{2}{27}$

Solución

a. $\ln 6 = \ln(2 \cdot 3)$ Reescribir 6 como $2 \cdot 3$.
 $= \ln 2 + \ln 3$ Propiedad del producto

b. $\ln \frac{2}{27} = \ln 2 - \ln 27$ Propiedad del cociente
 $= \ln 2 - \ln 3^3$ Reescribir 27 como 3^3 .
 $= \ln 2 - 3 \ln 3$ Propiedad de la potencia

PUNTO de repaso ➔ Ahora trate de hacer el Ejercicio 27.

Ejemplo 4 Uso de propiedades de los logaritmos

Encuentre el valor exacto de cada expresión sin usar calculadora.

a. $\log_5 \sqrt[3]{5}$ b. $\ln e^6 - \ln e^2$

Solución

a. $\log_5 \sqrt[3]{5} = \log_5 5^{1/3} = \frac{1}{3} \log_5 5 = \frac{1}{3}(1) = \frac{1}{3}$

b. $\ln e^6 - \ln e^2 = \ln \frac{e^6}{e^2} = \ln e^4 = 4 \ln e = 4(1) = 4$

PUNTO de repaso ➔ Ahora trate de hacer el Ejercicio 29.

NOTA HISTÓRICA



The Granger Collection

John Napier, matemático escocés, inventó los logaritmos como medio para simplificar algunos de los tediosos cálculos de su tiempo. Empezando en 1594, Napier trabajó durante 20 años en la invención de logaritmos. Napier tuvo éxito sólo parcial en su búsqueda por simplificar tediosos cálculos, pero el invento de los logaritmos fue un paso adelante y recibió inmediato reconocimiento.

Reescritura de expresiones logarítmicas

Las propiedades de los logaritmos son útiles para reescribir expresiones logarítmicas en formas que simplifican las operaciones de álgebra. Esto es cierto porque estas propiedades convierten formas complicadas de productos, cocientes y exponenciales en más sencillas sumas, diferencias y productos, respectivamente.

Ejemplo 5 Expandir expresiones logarítmicas

Expanda cada expresión logarítmica.

a. $\log_4 5x^3y$ b. $\ln \frac{\sqrt{3x-5}}{7}$

Solución

$$\begin{aligned} \text{a. } \log_4 5x^3y &= \log_4 5 + \log_4 x^3 + \log_4 y \\ &= \log_4 5 + 3 \log_4 x + \log_4 y \end{aligned}$$

Propiedad del producto

Propiedad de la potencia

$$\begin{aligned} \text{b. } \ln \frac{\sqrt{3x-5}}{7} &= \ln \frac{(3x-5)^{1/2}}{7} \\ &= \ln(3x-5)^{1/2} - \ln 7 \\ &= \frac{1}{2} \ln(3x-5) - \ln 7 \end{aligned}$$

Reescribir usando exponente racional.

Propiedad del cociente

Propiedad de la potencia

PUNTO de repaso → Ahora trate de hacer el Ejercicio 53.

En el Ejemplo 5, las propiedades de los logaritmos se usaron para *expandir* expresiones logarítmicas. En el Ejemplo 6, este procedimiento se invierte y las propiedades de los logaritmos se usan para *condensar* expresiones logarítmicas.

Ejemplo 6 Condensar expresiones logarítmicas

Condense cada expresión logarítmica.

a. $\frac{1}{2} \log x + 3 \log(x+1)$ b. $2 \ln(x+2) - \ln x$
c. $\frac{1}{3} [\log_2 x + \log_2(x+1)]$

Solución

$$\begin{aligned} \text{a. } \frac{1}{2} \log x + 3 \log(x+1) &= \log x^{1/2} + \log(x+1)^3 \\ &= \log[\sqrt{x}(x+1)^3] \end{aligned}$$

Propiedad de la potencia

Propiedad del producto

$$\begin{aligned} \text{b. } 2 \ln(x+2) - \ln x &= \ln(x+2)^2 - \ln x \\ &= \ln \frac{(x+2)^2}{x} \end{aligned}$$

Propiedad de la potencia

Propiedad del cociente

$$\begin{aligned} \text{c. } \frac{1}{3} [\log_2 x + \log_2(x+1)] &= \frac{1}{3} \{\log_2[x(x+1)]\} \\ &= \log_2[x(x+1)]^{1/3} \\ &= \log_2 \sqrt[3]{x(x+1)} \end{aligned}$$

Propiedad del producto

Propiedad de la potencia

Reescribir con un radical.

PUNTO de repaso → Ahora trate de hacer el Ejercicio 75.

Ayuda de álgebra

En el Apéndice A.2 puede repasar la escritura de radicales y exponentes racionales.

Aplicación

Un método para determinar la forma en que los valores de x y y para un conjunto de datos no lineales están relacionados es tomar el logaritmo natural de cada uno de esos valores. Si los puntos se grafican y caen sobre una recta, entonces se puede determinar que los valores de x y y están relacionados por la ecuación

$$\ln y = m \ln x$$

donde m es la pendiente de la recta.

Ejemplo 7 Hallar un modelo matemático

La tabla siguiente muestra la distancia media del Sol x y el periodo y (el tiempo que tarda un planeta en girar en órbita alrededor de ese astro) por cada uno de los seis planetas más cercanos al Sol. En la tabla, la distancia media está dada en términos de unidades astronómicas (donde la distancia media de la Tierra está definida como 1.0) y el periodo está dado en años. Encuentre una ecuación que relacione y y x

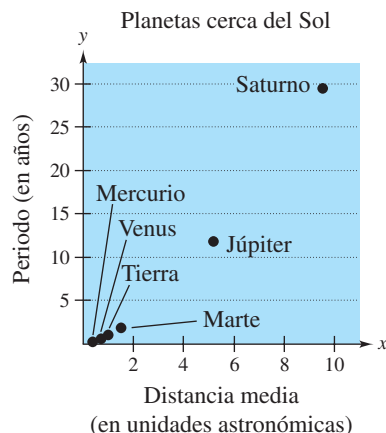


FIGURA 3.26



Planeta	Distancia media, x	Período, y
Mercurio	0.387	0.241
Venus	0.723	0.615
Tierra	1.000	1.000
Marte	1.524	1.881
Júpiter	5.203	11.860
Saturno	9.537	29.460

Solución

Los puntos de la tabla superior están graficados en la Figura 3.26. De esta figura no es claro cómo hallar una ecuación que relacione y y x . Para resolver este problema, tome el logaritmo natural de cada uno de los valores de x y y de la tabla. Esto produce los siguientes resultados

Planeta	Mercurio	Venus	Tierra	Marte	Júpiter	Saturno
$\ln x$	-0.949	-0.324	0.000	0.421	1.649	2.255
$\ln y$	-1.423	-0.486	0.000	0.632	2.473	3.383

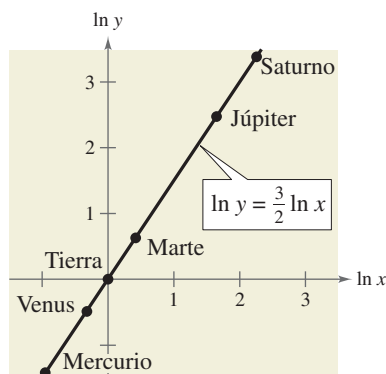


FIGURA 3.27

Ahora, al graficar los puntos en la segunda tabla se puede ver que los seis parecen estar en una recta (vea Figura 3.27). Escoja dos puntos cualesquiera para determinar la pendiente de la recta. Usando los puntos (0.421, 0.632) y (0, 0) se puede determinar que la pendiente de la recta es

$$m = \frac{0.632 - 0}{0.421 - 0} \approx 1.5 = \frac{3}{2}.$$

Por la forma punto-pendiente, la ecuación de la recta es $Y = \frac{3}{2}X$, donde $Y = \ln y$ y $X = \ln x$. Por tanto, se puede concluir que $\ln y = \frac{3}{2} \ln x$.

PUNTO de repaso Ahora trate de hacer el Ejercicio 91.