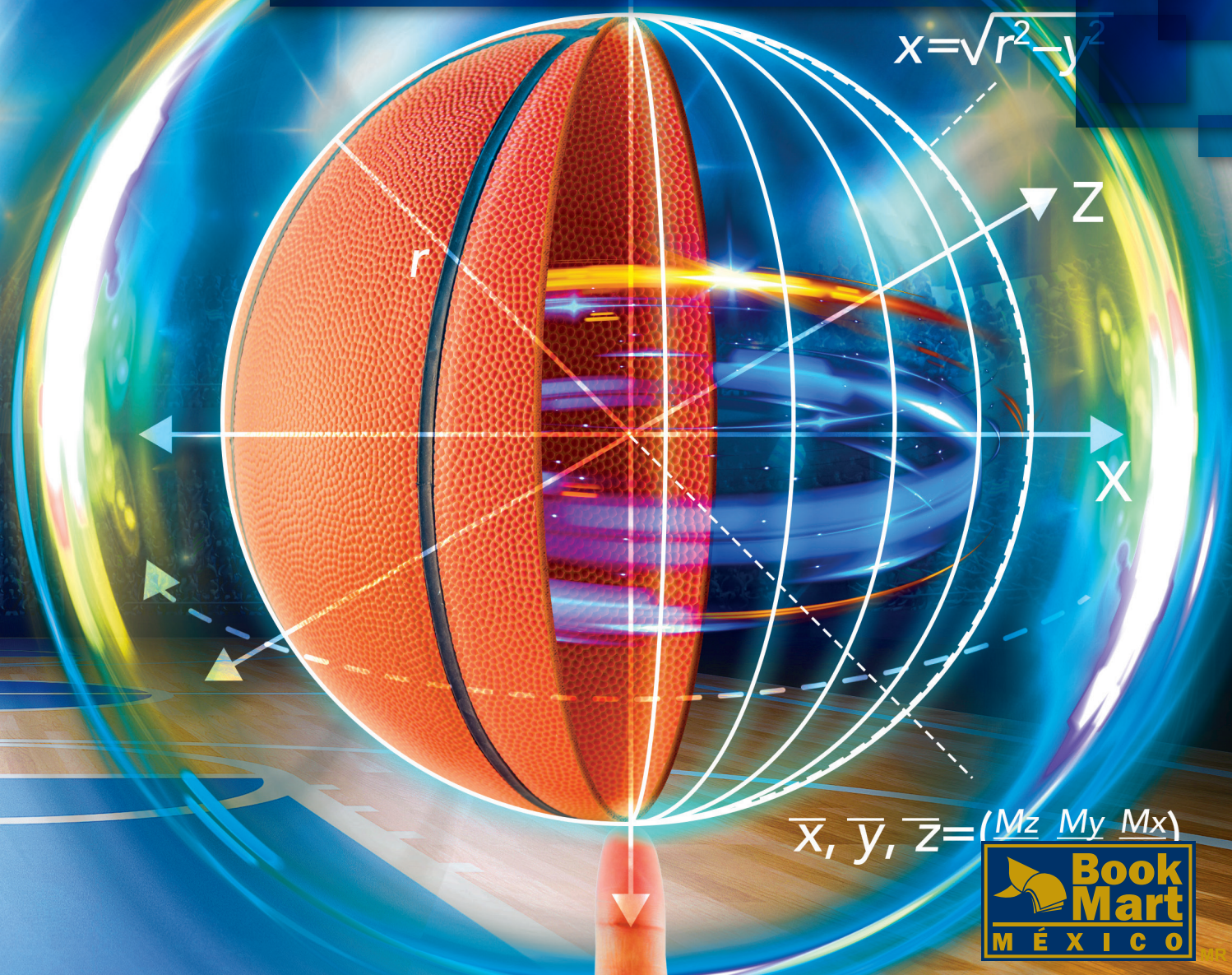




Cálculo integral

Lorenzo Escalante Pérez

$$x = \sqrt{r^2 - y^2}$$



- SABES_GTO
- sabes.gto
- sabes.guanajuato

sabes.edu.mx

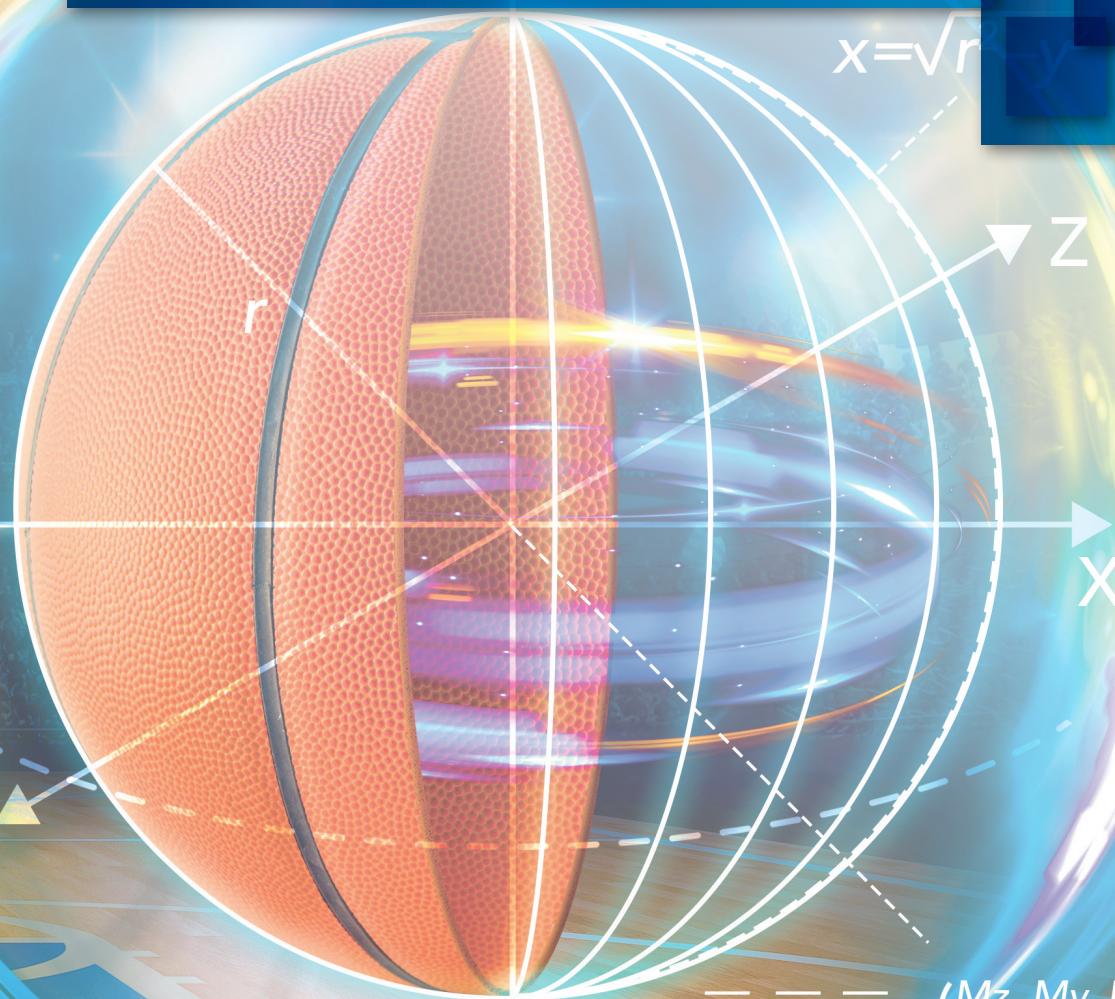


Secretaría
de Educación
de Guanajuato

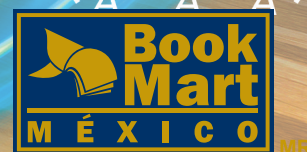


Cálculo integral

Lorenzo Escalante Pérez



$$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} = \left(\frac{Mz}{\Delta}, \frac{My}{\Delta}, \frac{Mx}{\Delta} \right)$$



SABES_GTO
 sabes.gto
 sabes.guanajuato

sabes.edu.mx



Secretaría
de Educación
de Guanajuato

Coordinación editorial
Angélica Inés Pérez Ariza

Editor en jefe
Rolando Roberto Linaldi Guzmán

Arte de portada
Osciel Máximo Fierro

Diagramación
José Miguel Ruiz Ventura

Fotografía
Shutterstock

Producción
Francisco Javier Martínez García

Lorenzo Escalante Pérez

Cálculo integral

1ª edición, 2020
D. R. © Book Mart, S. A. de C. V.

www.bookmart.com.mx

ISBN: 978-607-743-746-8

Miembro de la Cámara Nacional
de la Industria Editorial Mexicana

Registro número 3740

No está permitida la reproducción total o parcial de este libro ni su tratamiento informático ni la transmisión de ninguna forma o por cualquier medio, ya sea electrónico, mecánico, incluyendo fotocopiado, almacenamiento en cualquier sistema de recuperación de información o grabado sin el permiso previo y por escrito de los titulares del *copyright*.

La marca Book Mart es propiedad de Book Mart, S. A. de C. V.
Prohibida su reproducción total o parcial.

Impreso en México / *Printed in Mexico*

Presentación

Estimado estudiante:

Cuando hablamos de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC), una de las primeras imágenes que nos viene a la mente es la interactividad: aquella que se establece entre personas de distintos lugares, ciudades y países del mundo de las más variadas edades, instrucción escolar, condición social, valores e idiosincrasia; esa conexión que de forma instantánea, casi mágica, les permite ponerse en comunidad, a través de un dispositivo electrónico, para comunicarse e informarse; conocerse, socializar gustos, conocimientos y experiencias; participar en prácticas educativas mediante procesos de retroalimentación altamente estimulantes e interactivos; o bien, en términos más generales, apoyarse a menudo en situaciones de necesidad y compartir soluciones exitosas ante problemáticas personales y sociales variadas.

El texto que tienes en tus manos te llevará por un recorrido en que se aborda el tema del papel medular que las TIC desempeñan, a nivel global, en el avance de las sociedades, así como el papel que juegan en el campo educativo, como una plataforma ideal para la expresión de opiniones, evaluación de resultados en tiempo real, y el análisis de aciertos, errores, fortalezas y debilidades de la enseñanza-aprendizaje con la participación activa de los participantes.

Te invitamos a sumarte a nuestro esfuerzo para lograr que tus aprendizajes sean significativos y contribuyan a tu pleno desarrollo personal y social. Nuestro país tiene un importante reto educativo por delante, un reto que en este momento se concentra en ti. Por ello, nos complace enormemente acompañarte en este importante trayecto de tu educación media superior

¡Que lo disfrutes!
Cordialmente, Book Mart

$$x = \sqrt{r^2 - y^2}$$

$$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} = \left(\frac{M_z}{A}, \frac{M_y}{A}, \frac{M_x}{A} \right)$$

Conoce tu libro

Entrada de parcial

Al inicio encontrarás un panorama general de lo que aprenderás.

- Propósito general
- Contenidos
- Línea curricular
- Componente formativo
- Competencias
- Evidencias

Primer parcial

Propósito general de la unidad de aprendizaje curricular

- Resolver problemas en contextos lúta y extra matemáticos mediante el uso del cálculo integral.

Contenidos del parcial

Introducción al cálculo integral

1. Concepto de cálculo integral y primitiva de una función
2. Problemas que dieron origen al cálculo integral
3. Notación sigma
4. Suma de Riemann
5. Teorema fundamental del cálculo
6. La integral indefinida
7. Reglas básicas de integración

Línea curricular

- Matemáticas

Componente formativo

- Praxiológico
- Ciencias exactas y naturales

Competencias genéricas

Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.

Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.

Competencias disciplinares

M2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.

M6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.

Atributos

- Estructura ideas y argumentos de manera clara, coherente y sintética.
- Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.

Competencias disciplinares básicas

- Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.

Evidencias

- Presentación y exposición en PowerPoint sobre los problemas que dieron origen al cálculo integral.
- Solución de ejercicios aplicando las reglas básicas de integración.

¿Qué vamos a aprender?

El estudio del cálculo se divide en dos grandes ramas:

En este semestre nos enfocaremos al estudio del cálculo integral con su proceso natural que es la integración de funciones.

Estas ramas curriculares se encuentran conectadas y en ocasiones es difícil realizar una separación entre ellas, por eso la mayoría de las obras de cálculo contiene en un solo tomo el cálculo diferencial e integral. Para nuestro estudio y con fines didácticos pedagógicos las hemos separado en dos unidades curriculares, de manera que, a pesar de su extensión, podamos trabajarlas de forma adecuada en cada semestre.

Nos dedicaremos a analizar la introducción al cálculo integral en sus diferentes aplicaciones geométricas y analíticas, así como los métodos básicos de integración. También nos acercaremos al concepto básico de la integral indefinida, así como al de constante de integración, una vez analizados estos conceptos nos será factible continuar con algunas técnicas de integración. Esto es necesario ya que cuando nos toquemos con situaciones que generen integrales no tan sencillas es útil aplicar los métodos alternativos de integración.

Se notará sobre la constante de integración que tiene su caracterización analítica y gráfica, pues lo mismo ocurrirá con la integral. Por ello analizaremos el significado gráfico de la integral y en los siguientes parciales, las aplicaciones específicas a diferentes ramas.

En resumen, el cálculo integral también nos orienta hacia el entendimiento de diferentes procesos naturales, científicos y sociales, por lo que, sin importar tu orientación hacia los estudios superiores, te ofrecerá una nueva forma de ver, apreciar y utilizar las matemáticas.

Evaluación diagnóstica

Se ubica al inicio del parcial, y sirve para identificar tus conocimientos actuales. No cuenta para tu calificación.

Proyecto

En esta sección, que aparece al inicio y al final del parcial, se plantean proyectos mediante los que integrarás los conocimientos adquiridos a lo largo del parcial.

Evaluación diagnóstica

La idea fundamental de la evaluación diagnóstica es que puedas discernir, con la ayuda del instrumento respectivo, tus habilidades y áreas de mejora para que tengas una base sólida al inicio de este primer parcial.

En esta sección se te darán una serie de ejercicios o actividades a realizar de las cuales tendrás que efectuar de forma individual para que posteriormente junto con tu docente y compañeros de grupo te hagas una autoevaluación mediante la rúbrica que se te proporciona.

1. Aplica los teoremas de derivación correspondientes para hallar la primera derivada de cada una de las siguientes funciones.
 - a. $f(x) = 3x^3 - 2x^2 - 4$ + 2017
 - b. $f(x) = (3x - 4)^2$
 - c. $f(x) = \frac{1}{2}x^3$
 - d. $f(x) = 3 \operatorname{sen}(2x)$
2. Completa la siguiente tabla escribiendo en cada casilla correspondiente la derivada o la función que se derivó.

Función	Primera derivada
$f(x) = 4x^2 - x^3$	$f'(x) = 8x + 3$
$f(x) = 6x^2 + 4x^3 - x$	$f'(x) = 9x^2 + 5x$

Utiliza la siguiente lista de cotejo con el objetivo de señalar cuál saber posees o cuál habrá que darle un poco más de énfasis.

Saber	SI	No	Observaciones
Empleo el lenguaje de derivación de funciones algebraicas.			
Empleo el lenguaje de derivación de funciones trigonométricas.			
Realizo operaciones de derivadas básicas de forma algebraica.			
Realizo operaciones de derivadas básicas de forma trigonométrica.			

Proyecto

Proyecto:	Software de graficación e integración.
Problemas:	Utilizar un software para integrar funciones.
Duración:	(La que el docente determine)
Puntuación:	(La que el docente determine)
Competencias:	M2. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos. M3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
Actividades:	En equipos diseñados por el profesor descargarán de internet un programa informático gratuito que represente funciones determine las integrales definidas. En el mejor de los casos el profesor les proporcionará uno. Lo que se realizará es lo siguiente: - Realizar un consenso sobre cual software se va a utilizar, esto para que sea el único. - Al cabo del tiempo señalado por el docente (dentro del periodo que abarca el proyecto), deberán reconocer el manejo básico del software (con la ayuda sólo necesaria del docente), es decir, conocer sus principales características, posibles menús y funciones para realizar los cálculos y posibles gráficas. De forma que entre su equipo se ayuden a utilizar este software. - Su docente le indicará a cada equipo las funciones que representarán utilizando el software. Los resultados y gráficos los imprimirán o crearán frente a tu profesor para que compruebe el manejo básico del software. - Por último, su profesor les dará una serie de integrales definidas para determinar su valor. - Pueden exponer las gráficas y valores de las integrales definidas que les parezcan más relevantes.
Recursos:	Libro de texto, PC, software informático de graficación, hojas en blanco, impresora, libros de consulta en la biblioteca.
Normas:	Deberá de entregarse en la fecha indicada por el docente y en caso de que un miembro del equipo falte se resolverá con el criterio de tu profesor.

Para saber más

Ofrece información complementaria o datos curiosos sobre el tema.

Glosario

Proporciona la definición de palabras que tal vez no conozcas y que están relacionadas con el tema que se trata.

TIC

Códigos QR que te llevarán a un sitio electrónico en el que puedes obtener información adicional.

Introducción al cálculo integral

Actividad detonadora

Considera las funciones:

- a. $f(x) = x^2$ b. $g(x) = x^2 + 2$ c. $h(x) = x^2 - e^x + 10^x$

Cuando derivas estas funciones seguro notarás la relación:

$$f'(x) = g'(x) = h'(x) = 2x.$$

De aquí surge la pregunta: ¿existirá otra función que al derivarla pueda darnos la misma relación, a saber, $2x$? En caso afirmativo, ¿cuál o cuáles serían?

¿Existirá una forma general de representar a esa familia de funciones cuya derivada nos proporcione $2x$?

Discute esta situación con tus compañeros de manera que traten de representar esa forma general de modo gráfico. Comparen sus procesos y discutan sobre lo que sea necesario modificar.

Escribe los resultados obtenidos en tu cuaderno.

Si te preguntara cuál es la operación inversa a la adición o suma, seguro responderás que es la sustracción o resta. De modo similar si te cuestiono las operaciones inversas a la multiplicación y potenciación, es probable que respondas que son la división y radicación respectivamente.

La **diferencial** es un operador que si le "introducimos" una función se obtiene la derivada de dicha función.

Ahora si te cuestionara ¿cuál sería la operación inversa a la diferenciación o derivada?, ¿qué responderías y por qué?

Reflexiona con el grupo la respuesta a cada pregunta.

Actividad de aprendizaje 2

Después de llenar las líneas con sus resultados de la actividad anterior es necesario que con su profesor como mediador, realicen un debate sobre los mecanismos y pasos que cada una de las parejas realizó con el fin de llegar a un acuerdo parcial sobre el cálculo de áreas determinadas por curvas.

1. Escriban sus conclusiones.
2. Realicen una investigación en fuentes digitales sobre el origen del cálculo integral y cómo se relaciona con el cálculo diferencial. Presenten su investigación a su docente y demás compañeros de grupo.

Evidencia de aprendizaje 1

Realicen en equipo una presentación en PowerPoint sobre los problemas que originaron al cálculo integral. Al finalizar el profesor evaluará la exposición de cada equipo.

Notación sigma

El elemento a considerar en este caso es la **sumatoria**. Como su nombre lo indica, representa la suma de ciertos términos. Esta sumatoria se representa con la letra griega **sigma** Σ .

Por ejemplo, si deseáramos sumar los números $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, no habría el mayor problema en representar esta suma como $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$. El problema empieza a surgir cuando nos indican que representemos la suma de los primeros 2011 números. Qué tedioso sería hacer esto, ¿verdad? Es aquí donde entra la notación de sumatoria.

Esta operación la podríamos representar así:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2011} + a_{2012}$$

Donde los puntos suspensivos indican que las sumas siguen bajo ese mismo patrón desde el primer elemento hasta el elemento que ocupa la posición 2011. Entonces la representación como una sumatoria será de la manera siguiente:

$$\sum_{i=1}^{2011} a_i$$

Esto indica la suma previamente descrita, o sea:

$$\sum_{i=1}^{2011} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2011} + a_{2012}$$

Desarrollo de contenidos

Los contenidos se desarrollan, de maneras novedosas, cubriendo todos los contenidos específicos que plantea el programa de estudios para el parcial.

Actividad de aprendizaje

Por medio de ellas no sólo pondrás a prueba lo que has integrado a tu conocimiento, sino que desarrollarás un mayor aprendizaje.

Presentación del proyecto

Es momento de dar a conocer lo que has trabajado a lo largo de este parcial, a saber, tu producto del proyecto.

Recuerda que entre algunas de las normas que debes seguir están las siguientes:

- El producto final se entrega y presenta el día y hora acordado con tu docente.
- Todos los integrantes del equipo deben participar y demostrar cuál ha sido la aportación en el mismo.
- Este trabajo será evaluado mediante la rúbrica correspondiente de acuerdo a la ponderación que, entre ellas, una propuesta para solucionar el o los problemas expuestos.

He incorporado a mi saber

Rúbrica para la evaluación del proyecto

Inicial	Nivel de logro o desempeño			Estratégico
	Básico	Autónomo		
Conozco solo los elementos analíticos que componen una integral definida de acuerdo al contexto en que se me proporciona. Describo el funcionamiento muy escueto del software así como los elementos que lo componen.	Conozco solo los elementos gráficos que componen una integral definida de acuerdo al contexto en que se me proporciona. Describo el funcionamiento básico del software así como los elementos que lo componen.	Conozco algunos de los elementos analíticos y gráficos que componen una integral definida de acuerdo al contexto en que se me proporciona. Describo el funcionamiento básico del software así como los elementos que lo componen y reconozco otras aplicaciones opcionales.	Conozco todos los elementos analíticos y gráficos que componen una integral definida de acuerdo al contexto en que se me proporciona. Describo el funcionamiento completo del software así como los elementos que lo componen y reconozco otras aplicaciones opcionales.	
Represento de forma elemental las integrales definidas solicitadas sin realizarles ajustes opcionales para su mejor visualización.	Represento de forma adecuada las integrales definidas solicitadas y les realizo algunos ajustes con ayuda proporcionada.	Represento de forma adecuada las integrales definidas solicitadas a la vez de que puedo realizarles ciertos ajustes opcionales para su mejor visualización.	Represento de forma óptima las integrales definidas solicitadas a la vez de que puedo realizarles ciertos ajustes opcionales para su mejor visualización.	

Organizador para el portafolio de evidencias

Actividad de aprendizaje número	Evidencia o producto	No comprendí ni lo resolví	Comprendí y resolví parcialmente	Comprendí y resolví de forma correcta y completa
1	Identificación gráfica de la antiderivada.			
2	Determinación de los problemas o modelos que dieron origen al cálculo integral.			
3	Obtención de áreas de curvas mediante sumas de Riemman			
4	Obtención de integrales definidas mediante sumas de Riemman			
5	Aplicación del Teorema fundamental del cálculo.			
6	Reconocimiento de las diferentes reglas de integración inmediatas.			
7	Determinación de las constantes de integración.			

Autoevaluación

Mediante un análisis objetivo indica el nivel de logro obtenido a lo largo del viaje de este parcial de acuerdo a las competencias declaradas al inicio, así como del objetivo general. Apóyate de las siguientes preguntas, así como de la tabla que se te da posteriormente.

- ¿Cuáles son algunas de las competencias observé difíciles de desarrollar en este parcial?, ¿Por qué?
- ¿Qué logros se vieron truncados durante el desarrollo del parcial?

Rúbrica de evaluación del proyecto

Con este instrumento de evaluación tu docente calificará tu proyecto.

Organizador del portafolio de evidencias

Estas secciones te ayudarán a ti y al docente a generar una evaluación. Las actividades que deberás incluir en el portafolio de evidencias están marcadas con el icono.

Autoevaluación

En esta sección podrás reflexionar sobre tu desempeño en las actividades del parcial.

Contenido

Primer parcial..... 8

Introducción al cálculo integral	12
Concepto de cálculo integral y primitiva de una función.....	13
Problemas que dieron origen al cálculo integral	15
Notación sigma.....	17
Suma de Reimann.....	26
Teorema fundamental del cálculo.....	30
La integral indefinida	37
Concepto de integral indefinida.....	38
Reglas básicas de integración.....	46

Segundo parcial... 54

Técnicas de integración	58
Integración por sustitución.....	59
Integración por partes.....	59
Integral de funciones logarítmicas.....	64
Integral de funciones exponenciales.....	67
Técnicas de integración con funciones trigonométricas.....	69
Integración por fracciones parciales.....	77

Aplicaciones de la integración.....	92
Área de una región plana.....	93
Volúmenes de sólidos de revolución.....	102
Longitud de una o dos curvas en el plano.....	110
Aplicación de la integración en áreas como: física, economía y biología.....	112

Bibliografía.....	130
--------------------------	------------

Primer parcial

Propósito general de la unidad de aprendizaje curricular

- Resolver problemas en contextos intra y extra-matemáticos mediante el uso del cálculo integral.

Contenidos del parcial

- Introducción al cálculo integral
 1. Concepto de cálculo integral y primitiva de una función
 2. Problemas que dieron origen al cálculo integral
 3. Notación sigma
 4. Suma de Reimann
 5. Teorema fundamental del cálculo
- La integral indefinida
 6. Concepto de integral indefinida
 7. Reglas básicas de integración

Línea curricular

- Matemáticas

Componente formativo

- Propedéutico
- Ciencias exactas y naturales

Competencias genéricas

- G6.** Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.
- G8.** Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.

Atributos

- 6.4** Estructura ideas y argumentos de manera clara, coherente y sintética.
- 8.1** Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.

Competencias disciplinares básicas

- M3.** Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.

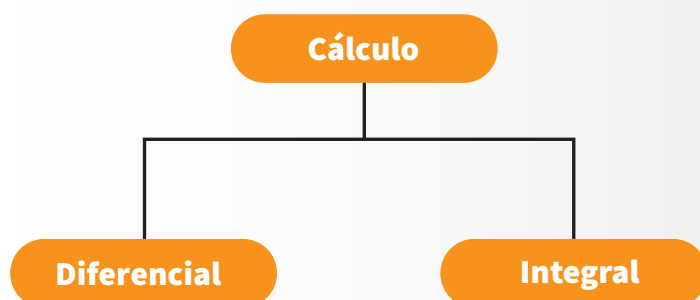
Evidencias

- Presentación y exposición en PowerPoint sobre los problemas que dieron origen al cálculo integral.
- Solución de ejercicios aplicando las reglas básicas de integración.

$$\int \sqrt{x} dx = \frac{(2ax + b)\sqrt{x}}{4a} + \frac{1}{2k}$$

¿Qué vamos a aprender?

El estudio del cálculo se divide en dos grandes ramas:



En este semestre nos enfocaremos al estudio del *cálculo integral* con su proceso natural que es la integración de funciones.

Estas ramas curriculares se encuentran conectadas y en ocasiones es difícil realizar una separación entre ellas, por eso la mayoría de las obras de cálculo contiene en un solo tomo el cálculo diferencial e integral. Para nuestro estudio y con fines didácticos-pedagógicos las hemos separado en dos unidades curriculares, de manera que, a pesar de su extensión, podamos trabajarlas de forma adecuada en cada semestre.

Nos dedicaremos a analizar la introducción al cálculo integral en sus diferentes aplicaciones geométricas y analíticas, así como los métodos básicos de integración. También nos acercaremos al concepto básico de la integral indefinida, así como al de constante de integración, una vez analizados estos conceptos nos será factible continuar con algunas técnicas de integración. Esto es necesario ya que cuando nos topemos con situaciones que generen integrales no tan sencillas es útil aplicar los métodos alternativos de integración.

Se notará sobre la constante de integración que tiene su caracterización analítica y gráfica; pues lo mismo ocurrirá con la integral. Por ello analizaremos el significado gráfico de la integral y en los siguientes parciales, las aplicaciones específicas a diferentes ramas.

En resumen, el cálculo integral también nos orienta hacia el entendimiento de diferentes procesos naturales, científicos y sociales, por lo que, sin importar tu orientación hacia los estudios superiores, te ofrecerá una nueva forma de ver, apreciar y utilizar las matemáticas.

Evaluación diagnóstica

La idea fundamental de la evaluación diagnóstica es que puedas discernir, con la ayuda del instrumento respectivo, tus habilidades y áreas de mejora para que tengas una base sólida al inicio de este primer parcial.

◀ En esta sección se te darán una serie de ejercicios o actividades a realizar de las cuales tendrás que efectuar de forma individual para que posteriormente junto con tu docente y compañeros de grupo te hagas una autoevaluación mediante la rúbrica que se te proporciona.

1. Aplica los teoremas de derivación correspondientes para hallar la primera derivada de cada una de las siguientes funciones.
 - a. $f(x) = 3x^3 - 2x^2 - x + 2017$
 - b. $f(x) = (3x - 4)^2$
 - c. $f(x) = \frac{2x-3}{x+3}$
 - d. $f(x) = 3 \text{ sen}(2x)$
2. Completa la siguiente tabla escribiendo en cada casilla correspondiente la derivada o la función que se derivó.

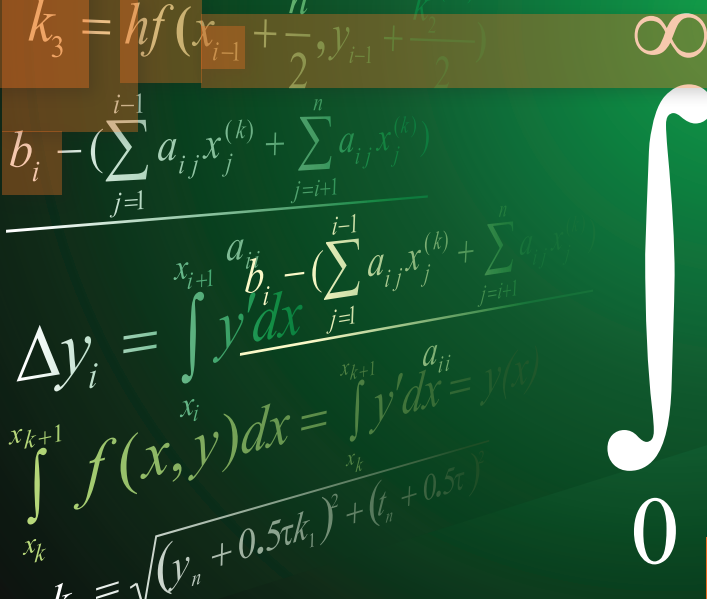
Función	Primera derivada
$f(x) = 4x^3 - x^2$	
	$f'(x) = 6x + 3$
$f(x) = 6x^{-3} + 4x^3 - x$	
	$f'(x) = -9x^2 + 5x$

◀ Utiliza la siguiente lista de cotejo con el objetivo de señalar cuál saber posees o cuál habrá que darle un poco más de énfasis.

Saber	Si	No	Observaciones
Empleo el lenguaje de derivación de funciones algebraicas.			
Empleo el lenguaje de derivación de funciones trigonométricas.			
Realizo operaciones de derivadas básicas de forma algebraica.			
Realizo operaciones de derivadas básicas de forma trigonométrica.			

Project

Project:	Graphics and integration software.
Problem:	Use of software for functions integration.
Length:	(It is determined by the teacher)
Score:	(It is determined by the teacher)
Competences:	G8. Participates and collaborates effectively in different teams. M3. Explains and interprets the gathered results by using mathematic processes and he / she contrasts them with established models or real situations.
Activities:	<p>In teams formed by the teacher, download free software from the Internet that represents the functions of definite integrals. In the best case, the teacher provides one. This is going to be elaborated:</p> <ul style="list-style-type: none">• Make a consensus about what software is going to be used.• According to the time determined by the teacher (within the period of the project), the students will recognize the basic uses of the software (the teacher will help when necessary), it means, to identify its main characteristics, possible menus and functions to make calculations and possible graphs. So that the members of the team help each other.• The teacher will indicate each team the functions that will be represented using the software. The results and graphs will be printed to make the professor check the basic management of the software.• Finally, the teacher will provide a group of definite integrals to determine their value.• You can make a presentation about the graphs and values of the definite integrals that seem more relevant.
Resources:	Student's Book, PC, graphics software, blank sheets, printer, reference books.
Regulations:	This work must be handed in on the date indicated by the teacher. In case a member of the team is missing, the solution will be provided by the teacher.



Introducción al cálculo integral

🔥 Actividad detonadora

◀ Considera las funciones:

a. $f(x) = x^2$

b. $g(x) = x^2 + 2$

c. $h(x) = x^2 - e^\pi + 10^6$

Cuando derivas estas funciones seguro notarás la relación:

$$f'(x) = g'(x) = h'(x) = 2x.$$

De aquí surge la pregunta: ¿existirá otra función que al derivarla pueda darnos la misma relación, a saber, $2x$? En caso afirmativo, ¿cuál o cuáles serían?

¿Existirá una forma general de representar a esa familia de funciones cuya derivada nos proporcione $2x$?

Discute esta situación con tus compañeros de manera que traten de representar esa forma general de modo gráfico. Comparen sus procesos y discutan sobre lo que sea necesario modificar.

Escribe los resultados obtenidos en tu cuaderno.

Si te preguntara cuál es la operación inversa a la adición o suma, seguro responderás que es la sustracción o resta. De modo similar si te cuestiono las operaciones inversas a la multiplicación y potenciación, es probable que respondas que son la división y radicación respectivamente.

La **diferencial** es un operador que si le “introducimos” una función se obtiene la derivada de dicha función.

Ahora si te cuestionara ¿cuál sería la operación inversa a la diferenciación o derivada?, ¿qué responderías y por qué?

◀ Reflexiona con el grupo la respuesta a cada pregunta.

Concepto de cálculo integral y primitiva de una función

Definición. Una función F se llama **antiderivada** o **primitiva** de la función f en un intervalo del eje X , si $F'(x) = f(x)$, para todo valor de x en ese intervalo.

A este respecto considera la función:

$$F(x) = x^3 - 4x^2 - x.$$

Entonces se determina que $F'(x) = 3x^2 - 8x - 1$. Por lo tanto, si tomamos

$$f(x) = 3x^2 - 8x - 1.$$

Estaríamos llegando a que:

$$F'(x) = f(x).$$

Con lo que, de acuerdo a la definición previa, F es la antiderivada de f .

Pero si consideramos la función:

$$G(x) = x^3 - 4x^2 - x + 1.$$

Notarías que:

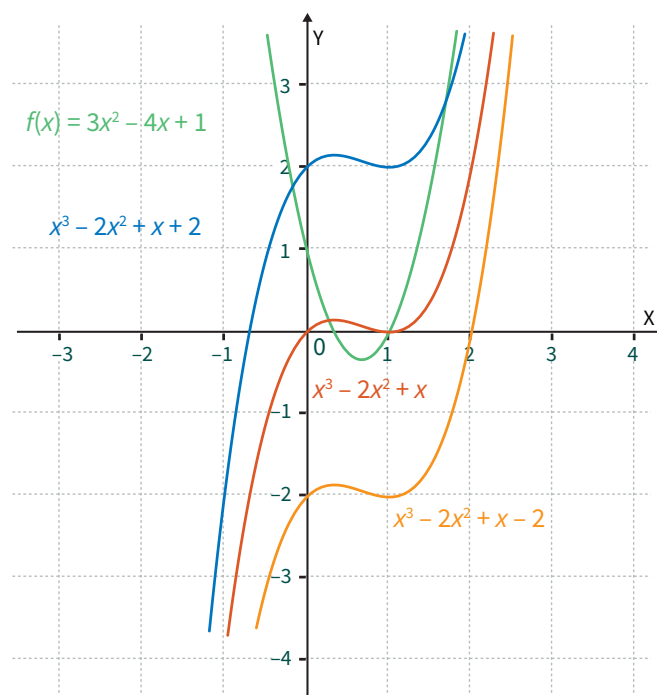
$$G'(x) = f(x).$$

Por lo tanto, existe más de una antiderivada para la función $f(x)$. Estas antiderivadas difieren por una constante, de manera que la familia de las antiderivadas de la función dada estaría establecida por

$$F(x) + C$$

Esta afirmación se demostrará más adelante en un teorema.

Teniendo en cuenta esta afirmación te presento una interpretación gráfica de la función f y tres de sus antiderivadas que componen la familia dada por $x^3 - 2x^2 + x + C$.



Interpretación gráfica de la constante C en una familia de antiderivadas de la función $f(x)$.

Teorema 1.1. Si F es una antiderivada de f en un intervalo I , entonces cada antiderivada de f en I está definida por:

$$F(x) + C.$$

En donde C representa una constante arbitraria llamada **constante de integración**. Todas las antiderivadas de f en ese intervalo se pueden adquirir al darle valores peculiares a C .

Procedamos con su demostración.

Demostración

Consideremos a G como otra antiderivada de f en el intervalo I , entonces se tiene que $G'(x) = f(x)$, para toda x en I . Además, como se sabe que F es antiderivada de f , en ese mismo intervalo se concluye que $F'(x) = f(x)$, de este modo al realizar la igualdad se obtendrá:

$$F'(x) = G'(x).$$

Es decir:

$$F'(x) - G'(x) = 0.$$

Para toda x en I .

Ahora tomemos la función definida en I :

$$H(x) = F(x) - G(x).$$

Al realizar su derivada se llegará a que $H'(x) = F'(x) - G'(x) = 0$, con lo que afirmamos que $H'(x) = 0$, o sea, existe una constante k , tal que en el intervalo se tiene:

$$H(x) = k.$$

Ya que la derivada de una constante es cero. De esta manera:

$$\text{Si } k = F(x) - G(x), \text{ entonces } F(x) = G(x) + k.$$

O bien:

$$G(x) = F(x) + C.$$

Como G representa a cualquier antiderivada de f en I , entonces toda antiderivada de f puede obtenerse a partir de la relación $F(x) + C$, con C constante.

Definición. El proceso por el cual se obtiene el conjunto de todas las antiderivadas de una función $f(x)$ se denomina **antiderivación** o **antidiferenciación**. Esta operación se representa con el símbolo \int y esto se escribe como:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

En el teorema anterior, el símbolo $\int f(x)dx$ se denomina **integral indefinida** de f . $F(x) + C$ se llama **antiderivada general** de f y f misma es el **integrand**. Además, como se tiene que $\int f(x)dx = F(x) + C$, en donde $F'(x) = f(x)$, se observa que la *antiderivación es la operación inversa a la derivación*. Es decir:

$$\int F'(x)dx = F(x) + C.$$

Por ello los teoremas se pueden demostrar o deducir a partir de la diferenciación vista antes.

Actividad de aprendizaje 1

◀ Realiza las actividades.

1. Lleva a cabo una investigación sobre la forma gráfica que determina la antiderivada de una función conocida. ¿Qué se requiere para dar con esta? Llega a una conclusión.
2. Proporciona unos 3 ejemplos de tu teoría o de los apuntes que hayas recabado a lo largo de tu investigación. (Puedes usar un programa informático o graficador con la finalidad de que tus representaciones sean las más exactas y reales posibles).
3. De acuerdo con los datos recabados en la investigación prepáralos como evidencia.

Problemas que dieron origen al cálculo integral

En cálculo diferencial logramos contextualizar la derivada de forma gráfica como la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto dado (además de poder verse también como la velocidad de un objeto que sigue una trayectoria específica en un instante de tiempo fijo). De forma similar la integración tiene relación con un proceso que has realizado de forma mecánica desde tus estudios en primaria.

En esta sección nos avocaremos a la interpretación gráfica de la integral en un intervalo y a los conceptos necesarios para su correcta comprensión.

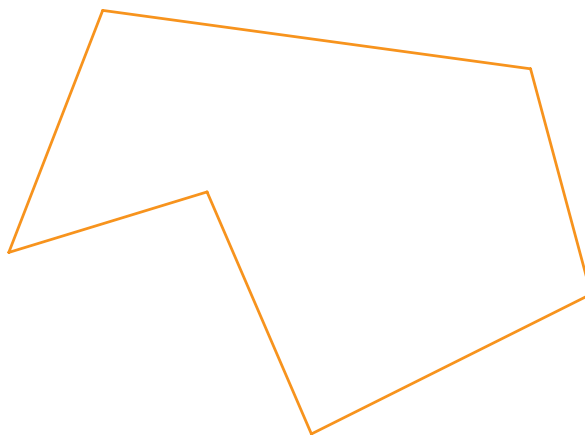
Para dar inicio te propongo que desarrolles la actividad que se te presenta a continuación con relación a determinación de áreas.

En parejas desarrollen la actividad descrita a continuación de manera que justifiquen todos sus procesos realizados con el fin de que mantengan una actitud coherente con los que proponen.

Ya has manejado desde estudios iniciales el concepto de área, tal como el área de un triángulo que es el producto de su base por su altura, el área de un rectángulo el cual resulta del producto de su largo y ancho, así como el área de un polígono regular que resulta del producto de su perímetro por su apotema entre dos.

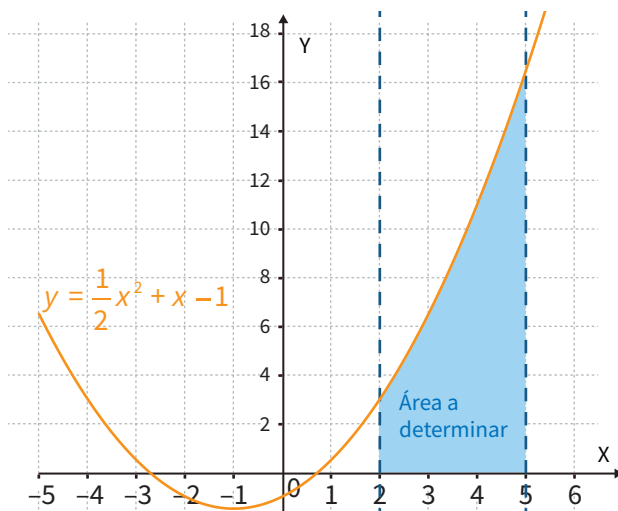
En binas planteen y desarrollen un plan para determinar:

1. El área del siguiente polígono irregular:



Polígono irregular de 6 lados.

2. El área determinada por el eje X, las rectas $x = 2$, $x = 5$ y la gráfica de la función $y = \frac{1}{2}x^2 + x - 1$.



Región de área a determinar.

Pueden usar los medios necesarios y materiales como reglas, calculadoras, etcétera. para realizar los cálculos pertinentes.

A continuación, discutan los procedimientos requeridos para el cálculo de las dos áreas.

Actividad de aprendizaje 2

◀ Después de llenar las líneas con sus resultados de la actividad anterior es necesario que con su profesor como mediador, realicen un debate sobre los mecanismos y pasos que cada una de las parejas realizó con el fin de llegar a un acuerdo parcial sobre el cálculo de áreas determinadas por curvas.

1. Escriban sus conclusiones.
2. Realicen una investigación en fuentes digitales sobre el origen del cálculo integral y cómo se relaciona con el cálculo diferencial. Presenten su investigación a su docente y demás compañeros de grupo.

Evidencia de aprendizaje 1

◀ Realicen en equipo una presentación en PowerPoint sobre los problemas que originaron al cálculo integral. Al finalizar el profesor evaluará la exposición de cada equipo.

Notación sigma

El elemento a considerar en este caso es la **sumatoria**. Como su nombre lo indica, representa la suma de ciertos términos. Esta sumatoria se representa con la letra griega **sigma** Σ .

Por ejemplo, si deseáramos sumar los números a_1, a_2, a_3 y a_4 , no habría el mayor problema en representar esta suma como $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$. El problema empieza a surgir cuando nos indican que representemos la suma de los primeros 2011 números. Qué tedioso sería hacer esto ¿verdad? Es aquí donde entra la notación de sumatoria.

Esta operación la podríamos representar así:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2010} + a_{2011}.$$

Donde los puntos suspensivos indican que las sumas siguen bajo ese mismo patrón desde el primer elemento hasta el elemento que ocupa la posición 2011. Entonces la representación como una sumatoria será de la manera siguiente:

$$\sum_{i=1}^{2011} a_i.$$

Esto indica la suma previamente descrita, o sea:

$$\sum_{i=1}^{2011} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2010} + a_{2011}.$$

Para saber más

El índice de la suma puede ser representado por cualquier otra letra ya que representa un número ficticio, es decir las siguientes

sumatoria $\sum_{i=m}^n a_i$ representa

lo mismo que $\sum_{k=m}^n a_k$.

En esta representación podemos dar la definición siguiente.

Definición. La suma de los n términos $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$ se describe por

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n.$$

En donde i se denomina índice de la sumatoria, el **límite inferior** es en este caso 1 y el límite superior de la suma es en este caso n .

Algunos ejemplos de sumatorias serían los siguientes casos:

a. $\sum_{i=1}^3 i = 1 + 2 + 3$

b. $\sum_{j=3}^7 2^j = 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7$

c. $\sum_{k=m}^n \frac{1}{p}(b_k - 1) = \frac{1}{p}(b_m - 1) + \frac{1}{p}(b_{m+1} - 1) + \frac{1}{p}(b_{m+2} - 1) + \dots + \frac{1}{p}(b_{n-1} - 1) + \frac{1}{p}(b_n - 1)$

Para el empleo correcto de las sumatorias se requiere conocer las propiedades en las cuales se rigen, razón por la cual las describo a continuación.

Propiedades básicas de las sumatorias

• $\sum_{i=1}^n ca_i = c \sum_{i=1}^n a_i$, donde c es una constante. • $\sum_{i=1}^n (a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^n a_i \pm \sum_{i=1}^n b_i$.

En algunos momentos se requerirá el empleo de ciertas sumatorias que tienen una estructura fija, éstas las describo a continuación.

• $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$

• $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

• $\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

• $\sum_{i=1}^n i^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$

Veamos algunas aplicaciones de estas propiedades.

Ejemplo

Determinaremos la suma descrita en cada inciso.

a. $\sum_{k=2}^5 3[5(k)+1]$

b. $\sum_{k=0}^3 (k-1)(k+1)$

c. $\sum_{k=1}^n i(3i-2)$

Sigue los pasos presentados y argumenta qué propiedad se utilizó en cada caso.

a.
$$\sum_{k=2}^5 3[5(k)+1] = 3 \sum_{k=2}^5 [5(k)+1] = 3\{[5(2)+1]+[5(3)+1]+[5(4)+1]+[5(5)+1]\}$$

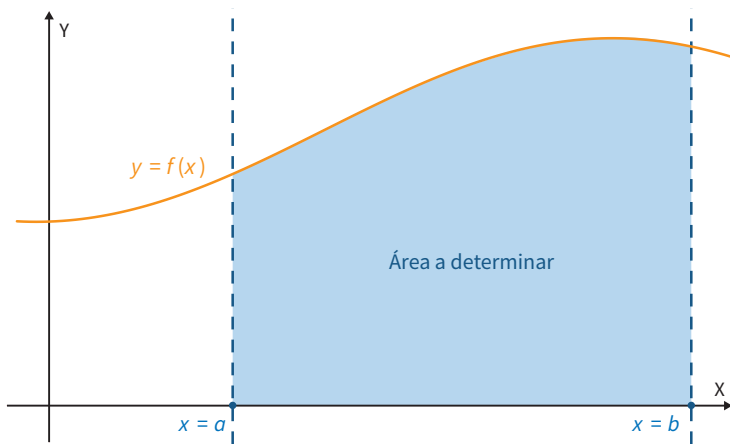
$$= 3\{11+16+21+26\} = 3\{74\} = 222$$

b.
$$\sum_{k=0}^3 (k-1)(k+1) = (-1)(1) + (0)(2) + (1)(3) + (2)(4) = 10$$

c.
$$\sum_{k=1}^p k(3k-2) = \sum_{k=1}^p (3k^2 - 2k) = 3 \sum_{k=1}^p k^2 - 2 \sum_{k=1}^p i = 3 \frac{p(p+1)(2p+1)}{6} - 2 \frac{p(p+1)}{2} = \frac{2p^3 + p^2 - p}{2}$$

Ya he señalado de forma implícita que el cálculo de un área comprendida por una curva delimitada por otras da origen a la interpretación geométrica de la integral. Ahora corresponde presentarte una serie de situaciones que te llevará a la conexión de lo que describo.

Supongamos que se tiene una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ con ecuación $y = f(x)$ y una región se halla delimitada por la curva, el eje X y las rectas $x = a$ y $x = b$ como se representa a continuación.



Área delimitada por las rectas y curvas descritas.

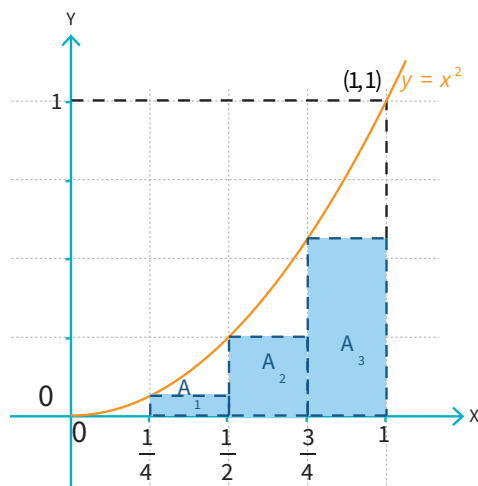
La interrogante que surge es: ¿cómo determinar el valor del área A representada en la figura?

O en el mejor de los casos ¿cómo aproximar numéricamente el valor que represente al área indicada?

Para comenzar con estos conceptos consideremos la función $y = x^2$ con las rectas $x = 0$, $x = 1$ y el eje X . Lo que buscamos es crear rectángulos con la misma base de longitud desde 0 hasta 1 y cuyas alturas respectivas sean las intersecciones de los vértices izquierdos de los rectángulos con la curva o, en su defecto, los lados derechos de los vértices. Calculamos las áreas de los rectángulos y determinamos la suma de ellos con lo cual estaremos aproximando el área de la región sombreada.

Para iniciar tomemos cuatro rectángulos de la misma longitud con lo cual serán de base igual a $\Delta x = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4}$. Denotamos los extremos de los cuatro intervalos por $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{3}{4}$ y $x_4 = 1$.

Ahora representamos los rectángulos de base $\frac{1}{4}$ y cuya altura respectiva será la intersección del vértice superior izquierdo con la curva. En este caso serán solo 3 de ellos. Esto se representa en la figura.



Rectángulos contenidos dentro de la curva.

Claramente el área real de la región es mayor que el área que resulte de sumar las áreas de cada rectángulo.

Es decir $A > A_1 + A_2 + A_3$.

Notamos que cada área parcial queda dado por:

$$A_1 = bh = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{64}, \quad A_2 = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{16} \quad \text{y} \quad A_3 = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{64}.$$

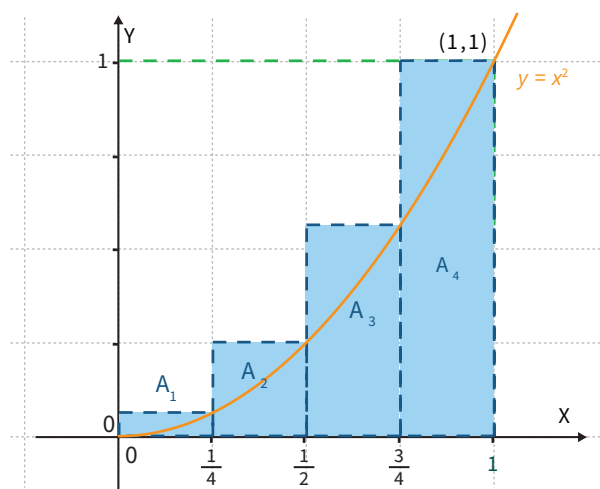
De manera que:

$$A > A_1 + A_2 + A_3 = \sum_{i=1}^3 A_i = \frac{14}{64}.$$

O sea:

$$A > \frac{14}{64} = 0.21875.$$

De forma análoga podemos calcular el área generada con rectángulos cuyos vértices superiores derechos coincidan con la curva. De forma gráfica quedarían cuatro rectángulos:



Rectángulos que contienen a la curva.

En este caso se concluye que $A < A_1 + A_2 + A_3 + A_4$ en donde:

$$A_1 = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{64}, \quad A_2 = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{16}, \quad A_3 = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{64} \text{ y } A_4 = \left(\frac{1}{4}\right)(1)^2 = \frac{1}{4}.$$

De manera que $A < A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = \sum_{i=1}^4 A_i = \frac{15}{32}$.

O sea

$$A < \frac{15}{32} = 0.46875.$$

Combinando ambas desigualdades notamos que:

$$0.21875 < A < 0.46875.$$

Este resultado se ha obtenido tras realizar una subdivisión del intervalo $[0, 1]$ en cuatro partes de igual longitud. Si tuviéramos la oportunidad de realizar una cantidad mayor divisiones rectangulares entonces mejor será nuestra estimación del área real debajo de la curva así como por encima de ella.

Te presento una tabla con los resultados obtenidos tras un largo proceso de cálculo aproximado de áreas. Cada división más fina nos arroja un resultado cada vez más exacto.

n	
10	$0.2850000 < A < 0.3850000$
20	$0.3087500 < A < 0.3587500$
30	$0.3168519 < A < 0.3501852$
50	$0.3234000 < A < 0.3434000$
100	$0.3283500 < A < 0.3383500$
1000	$0.3328335 < A < 0.3338335$

El promedio de estas últimas aproximaciones, cuando $n = 1000$, nos dará 0.3338335 , lo cual es un valor cercano a $1/3$. Si pudiéramos obtener una cantidad n de rectángulos entonces el área calculada se determina por $\sum_{i=1}^n A_i$, pero cuando n crece indefinidamente podremos justificar el siguiente límite:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A_i = \frac{1}{3}.$$

De forma general podemos relacionar lo que se hizo con una función continua $y = f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ en donde suponemos que la región R está contenida por la curva, el eje X y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$.

Primero se define una región de polígonos que contenida en R . Esto mediante la división del intervalo cerrado $[a, b]$ en n subintervalos de igual longitud, digamos:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

De este modo los extremos de estos subintervalos serán:

$$a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \text{ y } x_n = b.$$

Estos subintervalos son:

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-2}, x_{n-1}] \text{ y } [x_{n-1}, x_n].$$

Siguiendo este orden el i -ésimo intervalo es:

$$[x_{i-1}, x_i].$$

Acto seguido, al ser la función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ entonces lo será en cada uno de los subintervalos. Así, para cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ existe un valor c_i con el cual f tiene un mínimo absoluto ahí, digamos $f(c_i)$, esa altura es la que se considera para cada rectángulo respectivo en su intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ con base Δx .

Por último, cada uno de los rectángulos con base de longitud Δx tendrá un área igual a $f(c_i)\Delta x$. Si consideramos:

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x.$$

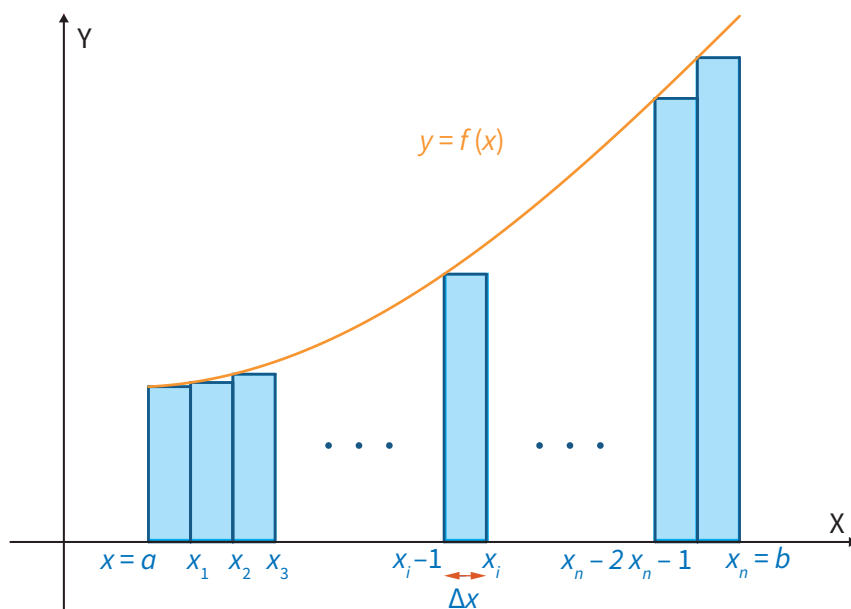
Esta sumatoria representa el área total de los n rectángulos inscritos dentro de la curva de $f(x)$, con lo cual:

$$A \geq S_n.$$

Mediante herramientas de cálculo avanzado se puede demostrar que para las funciones que contengan las hipótesis señaladas se concluye que el área de la región R será:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x.$$

Observa la figura para notar este aspecto que acaba de mencionar.



Rectángulos inscritos en la curva de la función $f(x)$.

En el análisis anterior se consideró las alturas de los polígonos como las mínimas posibles; sin embargo podemos tomar en cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ los valores d_i , en donde la función toma su valor máximo posible de manera que la suma quedaría $S_n = \sum_{i=1}^n f(d_i)\Delta x$, en donde claramente $A \leq S_n$. Tras

lo cual llegaremos a la misma conclusión previamente vista.

Mediante este hecho ya tenemos la facultad de desarrollar la demostración del área calculada mediante aproximaciones. Considerarlo como un ejemplo más nos servirá de detonador de estrategias.

Ejemplo

Demostraremos usando sumatorias que para la función $y = x^2$ el área de la región formada por el eje X, la curva y el intervalo $[0, 1]$ es igual a $1/3$.

Como se subdividirá en n intervalos de longitud $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$. Se poseerán los puntos $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}$ y $\frac{n}{n}$ cuyas alturas respectivas serán $(\frac{1}{n})^2, (\frac{2}{n})^2, \dots, (\frac{n}{n})^2$ respectivamente. Ya que f es en este caso creciente en $[0, 1]$ el valor mínimo absoluto en el subintervalo i -ésimo $[x_{i-1}, x_i]$ se halla en el punto x_{i-1} de manera que el área de un rectángulo en el subintervalo i -ésimo tendrá el área $(\frac{1}{n})[\frac{i-1}{n}]^2$.

Sumando los n rectángulos se podrá escribir el área total obtenida mediante sumatorias como $S_n = \sum_{i=1}^n (\frac{1}{n})(\frac{i-1}{n})^2$. Esto puede transformarse mediante las propiedades de las sumatorias:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n}\right) \left(\frac{i-1}{n}\right)^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n}\right) \left(\frac{i-1}{n^2}\right) = \left(\frac{1}{n}\right) \left(\frac{1}{n^2}\right) \sum_{i=1}^n (i-1)^2 = \frac{1}{n^3} \left(\sum_{i=1}^n i^2 - 2 \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n 1 \right) \\ &= \left(\frac{1}{n^3}\right) \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2 \frac{n(n+1)}{2} + n \right] = \frac{2n^2 - 3n + 1}{6n^2} \end{aligned}$$

Tomamos el límite al infinito de la siguiente manera, tal que estaremos aproximándonos al valor real del área de la región.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 3n + 1}{6n^2} = \frac{1}{6} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right) = \left(\frac{1}{6}\right)(2) = \frac{1}{3}.$$

Recuerda que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$.

Ejemplo

Mediante rectángulos infinitos calcularemos el área de la curva dada por $2x + y - 8 = 0$ y que forma la región comprendida por la curva el eje X y las rectas $x = 0.5$ y $x = 3$. Posteriormente, representaremos la gráfica de dicha área.

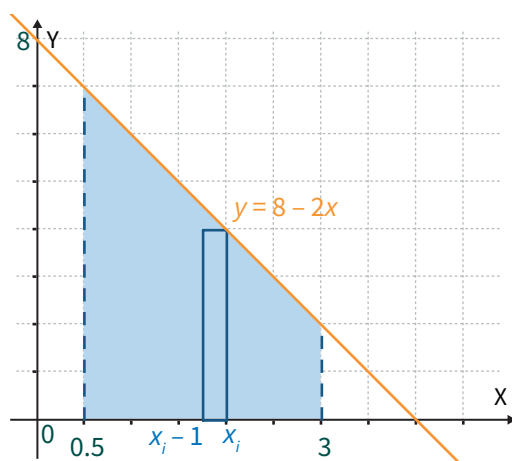
La longitud de los n subintervalos es $\Delta x = \frac{3-0.5}{n} = \frac{2.5}{n}$. Ya que la curva es decreciente en el i -ésimo intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, el valor mínimo absoluto se halla en el punto $f(x_i)$. Además $x_i = 0.5 + i\Delta x$, con estas premisas el área será:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [8 - 2(0.5 + i\Delta x)] \Delta x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (7\Delta x - 2i\Delta^2 x) =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [7(\frac{2.5}{n}) - 2i(\frac{2.5}{n})^2] = \lim_{n \rightarrow \infty} [\frac{17.5}{n} \sum_{i=1}^n 1 - \frac{12.5}{n^2} \sum_{i=1}^n i] = \lim_{n \rightarrow \infty} [\frac{17.5}{n}(n) - \frac{12.5}{n^2}(\frac{n(n+1)}{2})] =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [17.5 - 6.25(1 + \frac{1}{n})] = 17.5 - 6.25 = 11.25.$$

La gráfica se presenta a continuación:



Representación del área de la región sombreada.

Actividad de aprendizaje 3

◀ Realiza las actividades.

1. Halla el valor de cada una de las siguientes sumatorias:

a. $\sum_{i=1}^4 (3i-2)$ b. $\sum_{k=0}^4 \frac{1}{k^2+1}$ c. $\sum_{j=1}^5 \frac{3}{j+1}$ d. $\sum_{k=2}^6 (k-3)(k+1)$ e. $\sum_{i=1}^n \frac{1}{a}(i^2+b)$

2. Determina las sumas respectivas:

a. $\sum_{i=1}^{20} (3i-2)$ b. $\sum_{i=5}^{15} (2i+5)$ c. $\sum_{i=1}^{18} (i+1)^2$ d. $\sum_{k=3}^7 \frac{i}{i+1}$ e. $\sum_{j=2}^{10} \frac{(-1)^{j+1}}{j}$

3. Considerando el área de la región comprendida entre la gráfica de $y = e^{-x}$, entre el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = 2$. Estima el área tomando los puntos medios de las bases de los rectángulos de aproximación considerando 8 subintervalos.

4. Sea R la región que se halla bajo la gráfica de $f(x) = e^{-x}$ entre $x = 0$ y $x = 2$.
 - a. Utilizando los vértices derechos determina una expresión para el área como un límite sin que lo evalúes.
 - b. Estima el área tomando los puntos medios de un total de 10 subintervalos.
5. Estima el área bajo la curva de $f(x) = \frac{1}{x}$ desde $x = 1$ a $x = 5$ usando cuatro rectángulos y sus vértices derechos. Representa la situación en una gráfica junto con los rectángulos. En este caso ¿se sobrepasa del área o le falta al área real? Repite el proceso considerando los vértices izquierdos.
6. Estima el área bajo la curva de $f(x) = 25 - x^2$ desde $x = 0$ a $x = 5$ usando cinco rectángulos y sus vértices derechos. Representa la situación en una gráfica junto con los rectángulos. En este caso ¿se sobrepasa del área o le falta al área real? Repite el proceso considerando los vértices izquierdos.
7. Estima el área bajo la curva de $f(x) = x^2 + 1$ desde $x = -1$ a $x = 2$ usando tres rectángulos y sus vértices derechos. Representa la situación en una gráfica junto con los rectángulos. En este caso ¿se sobrepasa del área o le falta para llegar al área real? Repite el proceso considerando los vértices izquierdos.

Suma de Riemann

Se ha tenido un acercamiento a la integración por medio de sumas de Riemann aunque de un modo particular, ya que las funciones consideradas son tales que $f(x) \geq 0$. Ahora nos avocaremos a un modo general.

Sea $f(x)$ una función definida en el intervalo cerrado $[a, b]$. Dividamos este intervalo en n subintervalos al tomar cualesquiera $(n - 1)$ puntos intermedios del intervalo, de manera que $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$.

Recalco que los puntos obtenidos no forman de forma necesaria subintervalos de la misma longitud. Estas longitudes las marcaremos como $\Delta_1 x = x_1 - x_0$, $\Delta_2 x = x_2 - x_1$ y así sucesivamente de manera que la longitud del i -ésimo subintervalo será $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$. Formando estos subintervalos decimos que construimos una partición del intervalo $[a, b]$. Por tanto nombraremos a esta partición realizada por el símbolo Δ . Otro detalle importante es que de los n subintervalos de la partición obtenida existe uno o más de ellos que tiene la mayor longitud, de forma que entonces al mayor de estos subintervalos se le denominará norma de la partición y se le describe como $\|\Delta\|$.

En cada subintervalo de la partición Δ tomamos un punto arbitrario, es decir en el intervalo $\Delta_1 x$ tomamos al punto w_1 , donde $x_0 \leq w_1 \leq x_1$, en el intervalo $\Delta_2 x$ tomamos al punto w_2 , donde $x_1 \leq w_2 \leq x_2$, y así sucesivamente con lo que en el intervalo $\Delta_i x$ tomamos al punto w_i , donde $x_{i-1} \leq w_i \leq x_i$. Con todo esto la siguiente suma es de importancia:

$$\sum_{i=1}^n f(w_i) \Delta_i x = f(w_1) \Delta_1 x + f(w_2) \Delta_2 x + \dots + f(w_n) \Delta_n x.$$

Esta última suma se conoce como **suma de Riemann**.

En este análisis se incluye la posibilidad de que algunos o todos los valores $f(w_i)$ sean negativos. Lo que indica que la gráfica de f tiene porciones tanto por arriba del eje X como por debajo de él. Finalmente si se supone que existe un valor L tal que:

$$\left| \sum_{i=1}^n f(w_i) \Delta_i x - L \right|$$

De manera que esta diferencia pueda hacerse lo más pequeño que se desee para todas las particiones Δ cuyas normas sean suficientemente pequeñas y para cualquier w_i en su respectivo subintervalo cerrado. Entonces se dice que f es **integrable** en el intervalo $[a, b]$. Esto último puede representarse como:

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(w_i) \Delta_i x = L.$$

Definición. Si f es continua en $[a, b]$, entonces la **integral definida** de f de a a b , representada por $\int_a^b f(x) dx$ está dada mediante el límite siempre que éste exista:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(w_i) \Delta_i x.$$

El **integrand** es $f(x)$, el **límite inferior** es a y el **límite superior** es b . El signo \int es el que representa la integración.

La expresión $\int_a^b f(x) dx$ se lee: “la integral definida de $f(x)$ con respecto a x desde $x = a$ hasta $x = b$ ”.

Al retomar estos aspectos podemos señalar la dirección en la que apunta la integral y el área de una región R que está delimitada por la gráfica de la curva.

Definición. Sea f una función continua en $[a, b]$ y $f \geq 0$, para toda $x \in [a, b]$. Sea R la región delimitada por la curva $y = f(x)$, el eje X y las rectas $x = a$ y $x = b$. Entonces el área de la región R está dada con

$$A = \int_a^b f(x) dx = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(w_i) \Delta_i x.$$

De esto se desprende que si f es continua en $[a, b]$ y $f \geq 0$ para toda $x \in [a, b]$, entonces la

integral $\int_a^b f(x) dx$ se puede interpretar como la medida del área de la región R .

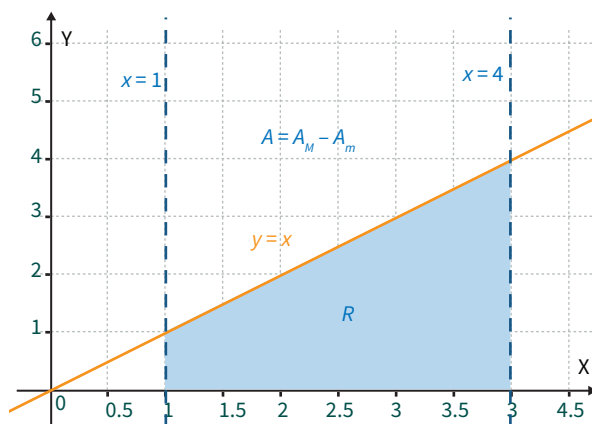
Para saber más

Aquí se señala que para la función en $[a, b]$ se puede aproximar los valores de las sumas de Riemann a L tanto como se desee al tomar las normas $\|\Delta\|$ de todas las particiones de $[a, b]$ suficientemente pequeñas, para toda las posibles elecciones de los valores w_i .

Nos es posible dar la siguiente definición respecto a la integral definida.

Cálculo integral

Por ejemplo, si consideramos la región formada por la función $y = x$, el eje X y las rectas $x = 1$ y $x = 4$, entonces esta queda representada en la figura.

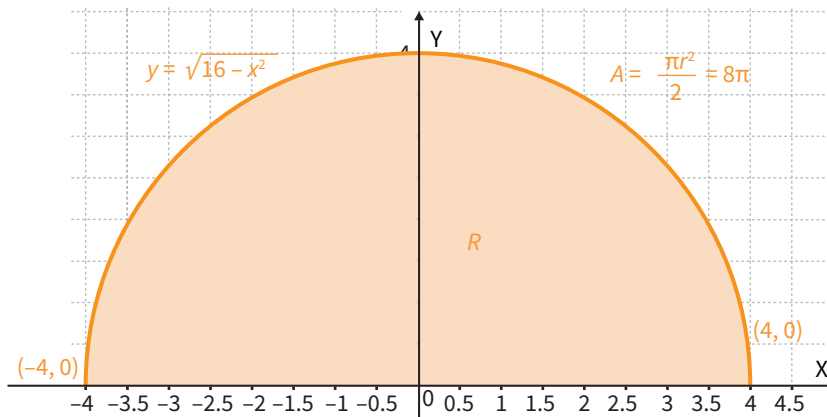


Representación de la región R

Ya que $y = x$ es continua en $[1, 4]$, entonces como concepto de integral estaríamos determinando $\int_1^4 x dx$, lo cual es el área de la región sombreada. Además el área de esta región la podemos determinar mecánicamente, por ejemplo, al restar el área del triángulo rectángulo mayor A_M del área del triángulo rectángulo menor A_m , es decir: $A = A_M - A_m$. Estas áreas son $A_M = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8$, $A_m = \frac{1 \cdot 1}{2} = 0.5$. Por lo que $A = A_M - A_m = 7.5$; que señalándola con lo ya previsto se tendría esto:

$$\int_1^4 x dx = 7.5.$$

De modo similar, para la función $y = \sqrt{16 - x^2}$ es continua en $[-4, 4]$ con lo que la región que comprendería es la mostrada.



Región R que contiene la curva y su área.

Para este caso se tiene un semicírculo de radio 4 con lo que su área contenida será de $A = \frac{\pi r^2}{2} = 8\pi$ que visualizando esto en términos de integral se concluye ni más ni menos que

$$\int_{-4}^4 \sqrt{16-x^2} dx = 8\pi.$$

Se ha definido $\int_a^b f(x)dx$ en $[a, b]$, o sea cuando $a < b$; pero para una función f de a hacia b que disponga de $a > b$ o de $a = a$ se aplican las siguientes definiciones.

Definiciones. Si $a > b$ y $\int_a^b f(x)dx$ existe, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Si $f(a)$ existe, entonces:

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

Hasta ahora para determinar el área de una región plana se emplea la integral definida, pero este paso incluye el límite de una suma y resulta demasiado tedioso de realizar, por ello en el siguiente bloque exploraremos unos teoremas que nos harán el manejo más sencillo de las integrales definidas y, por ende, el del cálculo de áreas de regiones planas.

Es propio dar a conocer algunos teoremas de utilidad para el manejo particular de ciertas integrales definidas.

Teorema 1.2 Si k es cualquier constante, entonces $\int_a^b k dx = k(b-a)$.

Teorema 1.3 Si f es integrable en el intervalo $[a, b]$ y k es cualquier constante, entonces

$$\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx.$$

Teorema 1.4 Si las funciones $f_1, f_2, \dots, y f_n$ son integrables en $[a, b]$, entonces $f_1 \pm f_2 \pm \dots \pm f_n$ es integrable en $[a, b]$ y

$$\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \dots \pm f_n(x)] dx = \int_a^b f_1(x) dx \pm \int_a^b f_2(x) dx \pm \dots \pm \int_a^b f_n(x) dx.$$

Teorema 1.5 Si f es integrable en un intervalo cerrado que contiene los números a , b y c , entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Para cualquier orden de los números a , b y c .

Un caso particular del teorema 1.5 es cuando $a < c < b$.

Actividad de aprendizaje 4

◀ Lee lo siguiente y haz lo que se pide.

1. Realiza los gráficos necesarios así como los cálculos pertinentes con geometría básica para demostrar que $\int_{-2}^2 (2-|x|)dx = 4$.

De manera similar cuánto aportará la integral definida $\int_{-3}^3 -\sqrt{9-x^2}$.

2. Utiliza la definición de integral mediante límite para hallar el área de la región R que se halla bajo la gráfica de:
 - a. $f(x) = \sqrt[4]{x}$, entre $x = 1$ y $x = 10$.
 - b. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, entre $x = 4$ y $x = 10$.
3. Halla la suma de Riemann para $f(x) = x - 2\text{sen}2x$ de $x = 0$ a $x = 3$, con cuatro términos.
4. Halla $\int_2^5 f(x)dx$ si $\int_2^8 f(x)dx = 1.8$ y $\int_5^8 f(x)dx = 2.3$.
5. Calcula $\int_1^3 f(x)dx$ si $\int_0^1 f(x)dx = 2$, $\int_0^4 f(x)dx = -5$ y $\int_3^4 f(x)dx = -1.2$.
6. Si $a < b < c < d$, determina $\int_b^c g(x)dx$ si $\int_a^d g(x)dx = 100$, $\int_b^a f(x)dx = 50$ y $\int_c^d f(x)dx = -30$.

Teorema fundamental del cálculo

Integración aproximada

Ahora utilizaremos una comprensión similar a las sumas de Riemann.

Supóngase que se tiene una función $f(x)$ y ésta genera una región de área A entre ella, el eje X y los puntos $x = a$ y $x = b$. Una partición $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ de n subintervalos genera, por ejemplo, el i -ésimo intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ con lo que podemos observar el i -ésimo trapecio formado por los puntos x_{i-1} , x_i , $f(x_i)$ y $f(x_{i-1})$. Estos trapecios se hallan en forma vertical de manera que sus bases serán $f(x_{i-1})$ y $f(x_i)$, por lo que su altura corresponde al ancho de los intervalos de la partición, o sea Δx . Como el área de un trapecio es la suma de sus bases

multiplicada por su altura entre dos. Entonces el área de este i -ésimo trapecio será

$$[f(x_{i-1})+f(x_i)]\frac{\Delta x}{2}.$$

Realizando este proceso para cada uno de los trapecios de la partición, la suma de estos nos aproximará al área real de la región. De modo que al realizar las sumas pertinentes junto con las simplificaciones adecuadas llegamos a lo siguiente:

Regla de los trapecios. Si se tiene la partición $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, entonces el área aproximada de $f(x)$ desde a hasta b es:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \left[\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{i-1}) + f(x_i) + \dots + f(x_{n-2}) + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2} \right] \Delta x.$$

Claro, mientras $n \rightarrow \infty$ nuestra aproximación tendrá cada vez menos margen de error.

Veamos el segundo método para después analizar algunos ejemplos de ambos.

De manera similar a la regla del trapecio, se particiona el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de manera que n sea par. Esta regla se basa en la aproximación a partir del uso de parábolas en vez de segmentos rectilíneos.

Regla de Simpson. Si se tiene la partición $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, con n par, entonces el área aproximada de $f(x)$ desde a hasta b es:

$$\int_a^b f(x)dx \approx [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)] \frac{\Delta x}{3}.$$

Nota que se debe tener n par, además de que se genera la sucesión de coeficientes:

$$1, 4, 2, 4, 2, \dots, 4, 2, 4, 1.$$

Observa detenidamente cada ejemplo que se realizará con las reglas mencionadas.

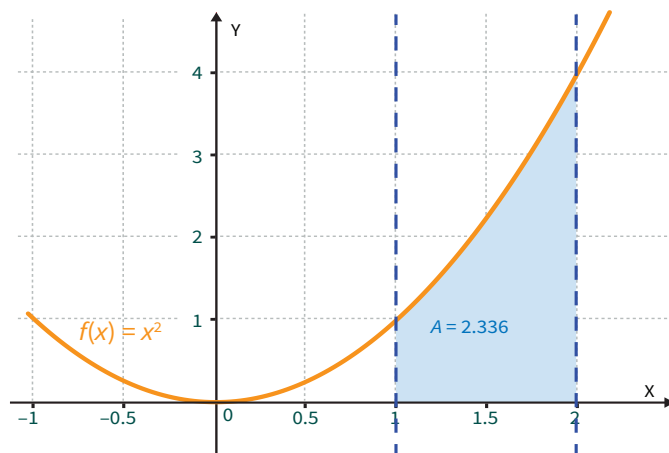
Ejemplo

Utilizaremos la regla de los trapecios para aproximar, con $n = 7$, la integral $\int_1^2 x^2 dx$.

Consideramos entonces que $\Delta x = \frac{2-1}{7} = \frac{1}{7}$ de forma que:

$$\int_1^2 x^2 dx \approx \left[\frac{(1)^2}{2} + \left(\frac{8}{7}\right)^2 + \left(\frac{9}{7}\right)^2 + \left(\frac{10}{7}\right)^2 + \left(\frac{11}{7}\right)^2 + \left(\frac{12}{7}\right)^2 + \left(\frac{13}{7}\right)^2 + \frac{(2)^2}{2} \right] \left(\frac{1}{7}\right) = \left(\frac{229}{14}\right) \left(\frac{1}{7}\right) = \frac{229}{98} \approx 2.336.$$

Observa la figura que se presenta respecto a este ejemplo.



Área de la región comprendida por la curva, el eje X y las rectas verticales en 1 y 2 mediante una aproximación de regla del trapecio con $n = 7$.

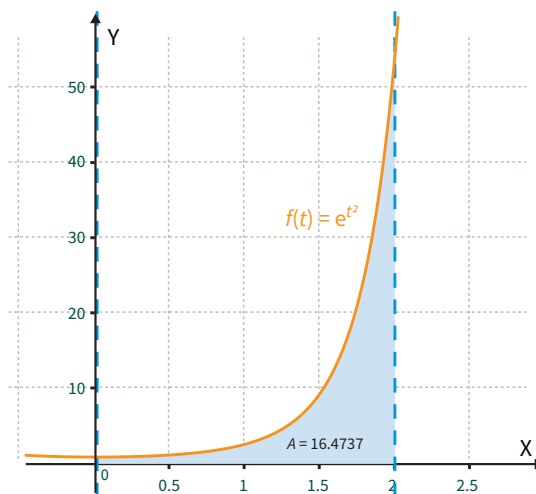
Ejemplo

Utilizaremos la regla de Simpson para aproximar, con $n = 10$, la integral $\int_0^2 e^{t^2} dt$.

Consideramos entonces que $\Delta t = \frac{2-0}{10} = 0.2$ de forma que:

$$\int_0^2 e^{t^2} dt = \left[e^{0^2} + 4e^{(0.2)^2} + 2e^{(0.4)^2} + 4e^{(0.6)^2} + 2e^{(0.8)^2} + 4e^{(1)^2} + 2e^{(1.2)^2} + 4e^{(1.4)^2} + 2e^{(1.6)^2} + 4e^{(1.8)^2} + e^{2^2} \right] \left(\frac{0.2}{3} \right) \\ \approx [247.353](0.0666) \approx 16.4737.$$

La figura respectiva será la que se da a continuación:



Área de la región comprendida por la curva, el eje X y las rectas verticales en 0 y 2 mediante una aproximación de regla de Simpson trapecio con $n = 10$.

Teorema fundamental del cálculo

Teorema 1.6 Teorema del valor medio para integrales. Si la función f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces existirá un valor c en ese intervalo que satisface que:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

El valor c del teorema anterior no es necesariamente único, pero bajo ciertos procesos podremos calcular estos valores como se describe en el siguiente ejemplo.

Ejemplo

Hallaremos el valor aproximado de c para la integral $\int_1^2 x^2 dx$ usando el teorema del valor medio para integrales.

Necesitamos hallar el valor c que satisfaga la condición:

$$\int_1^2 x^2 dx = f(c)(2-1).$$

Sin embargo, realizando aproximaciones por medio de método del trapecio hacia la integral

$\int_1^2 x^2 dx$, con un valor de $n = 10$ se obtendrá que $\int_1^2 x^2 dx \approx 2.3332$, de forma que:

$$\int_1^2 x^2 dx = f(c)(2-1) \approx 2.3332.$$

Surgiendo la ecuación:

$$f(c)(2-1) \approx 2.3332$$

$$c^2(1) \approx 2.332$$

$$c \approx \sqrt{2.3332}$$

$$c \approx \pm 1.5274.$$

Pero el valor negativo -1.5274 es claramente rechazado puesto que no pertenece al intervalo $[1, 2]$ que se está considerando.

Finalmente se concluye que:

$$c = 1.5274.$$

En el teorema anterior el valor $f(c)$ se denomina **valor medio** o promedio de f en $[a, b]$.

Ya que se estableció este primer teorema del parcial y que será de utilidad más adelante, podremos pasar a los dos teoremas fundamentales del cálculo y es aquí en donde se observará la relación estrecha entre el cálculo integral con el cálculo diferencial que se contempló en el pasado semestre.

El primer teorema fundamental proporciona la derivada de una función considerada como una integral definida que tiene un límite superior variable, veamos.

Teorema 1.7 Primer teorema fundamental del cálculo. Sea una función f continua en el intervalo $[a, b]$ y sea $x \in [a, b]$. Considere la función F dada por:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Entonces:

$$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x).$$

Teorema 1.8. Segundo teorema fundamental del cálculo. Sea f una función continua en $[a, b]$ y sea g una función que satisface para toda $x \in [a, b]$ que:

$$g'(x) = f(x).$$

Entonces:

$$\int_a^b f(t) dt = g(b) - g(a).$$

También se acostumbra denotar:

$$g(b) - g(a) \text{ por } g(x) \Big|_a^b.$$

Mediante el uso del segundo teorema fundamental del cálculo ya nos es posible determinar una integral definida de manera exacta y sin el uso de aproximaciones. También señalo que, al evaluar la integral definida dado por este teorema, se observa que primero se sustituye en la antiderivada el límite superior de la integral (b) y le restamos la sustitución del límite inferior (a).

Consideremos ejemplos de esta aplicación.

Ejemplo

Utilizaremos el teorema 1.8 para obtener el valor de cada integral definida descrita:

a. $\int_0^3 x^2 dx$

b. $\int_{-1}^2 3t dt$

c. $\int_1^2 \sqrt{s} ds$

Notemos primero como será la antiderivada en cada caso.

- a. Una antiderivada de $f(x) = x^2$ será $g(x) = \frac{x^3}{3} + C$, es decir, $g'(x) = f(x)$, por lo que, por el teorema 1.4, se tendrá:

$$\int_0^3 x^2 dx = \left(\frac{x^3}{3} + C \right) \Big|_0^3.$$

$$\int_0^3 x^2 dx = \left(\frac{x^3}{3} + C \right) \Big|_0^3 = \left(\frac{(3)^3}{3} + C \right) - \left(\frac{(0)^3}{3} + C \right) = 9 + C - C = 9.$$

Con esto se detalla que la constante de integración C no será necesaria al momento de realizar una integral definida, ya que al usar este teorema 1.8, dicha constante se cancelará. Por ello la integral definida nos dará un valor exacto.

- b. La antiderivada representativa será en este caso $\frac{3t^2}{2}$, por lo que el valor de la integral definida viene dado por los siguientes pasos:

$$\int_{-1}^2 3t dt = \left. \frac{3t^2}{2} \right|_{-1}^2 = \frac{3(2)^2}{2} - \frac{3(-1)^2}{2} = 6 - \frac{3}{2} = \frac{9}{2}.$$

- c. Aquí poseeremos los procesos:

$$\int_1^2 \sqrt{s} ds = \left. \frac{2\sqrt{s^3}}{3} \right|_1^2 = \frac{2\sqrt{(2)^3}}{3} - \frac{2\sqrt{1^3}}{3} = \frac{4\sqrt{2}-2}{3}.$$

Con el uso de los métodos de integración y las propiedades de las integrales señaladas en los teoremas del bloque anterior ya podemos realizar el cálculo de integrales definidas casi de cualquier tipo.

Actividad de aprendizaje 5

◀ Realiza lo que se pide.

- Con la integral $\int_{-1}^3 \sqrt{1+x^3} dx$ determina el área mediante la aproximación con la regla del trapecio y con la regla de Simpson. ¿Varía demasiado tu resultado con ambos procesos? Realiza una representación de la región comprendida.
- Medita en cómo tendrías la posibilidad de hallar el valor de las siguientes dos integrales definidas (el truco es sencillo, solo has de visualizar bien cada integrando):
 - $\int_0^1 \frac{t^3+1}{t+1} dt$
 - $\int_2^4 \frac{x^5-x}{3x^3} dx$
- En cada inciso realiza la aproximación de la integral mediante la regla designada. Utiliza el valor de n y representa la situación en una gráfica.
 - $\int_1^{2.5} \frac{dx}{x}$. Regla del trapecio con $n = 8$.

b. $\int_0^3 \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}}$. Regla de Simpson con $n = 10$.

c. $\int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^{1.5} s^2 ds$. Regla del trapecio para la primera integral con $n = 5$ y regla de Simpson para la segunda con $n = 6$.

4. Calcula en cada caso mediante una aproximación de centésimos el valor de c que cumpla el teorema del valor medio para integrales. Las integrales definidas puedes obtenerlas mediante el segundo teorema fundamental del cálculo.

a. $\int_0^3 x^3 dx$

b. $\int_1^3 (2x-1) dx$

c. $\int_{-1}^3 (-x^2 + x - 3) dx$

d. $\int_1^4 (x^4 - x^3 - x) dx$

e. $\int_{-2}^2 (t^3 + 1) dt$

f. $\int_2^4 \frac{ds}{s^2-4}$

g. $\int_{-1}^3 \frac{dt}{t^2+3}$

h. $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \tan \theta d\theta$

i. $\int_{2\pi/3}^{5\pi/6} \cot x dx$

5. Con el uso del teorema del valor medio para integrales prueba cada desigualdad.

a. $\int_0^\pi \sin \sqrt{\theta} d\theta \leq \pi$

b. $\int_0^2 \frac{dx}{x^2+4} \leq \frac{1}{2}$

c. $\int_{-3}^3 \frac{ds}{s^2+6} \leq 1$

d. $\int_{-\pi/6}^{\pi/6} \cos x^2 dx \leq \frac{\pi}{3}$



Recurso digital

Aquí puedes encontrar el recurso interactivo “**El conflicto matemático del siglo XVII Parte 1**”, el cual te contará una historia relacionada con el inicio del cálculo infinitesimal.

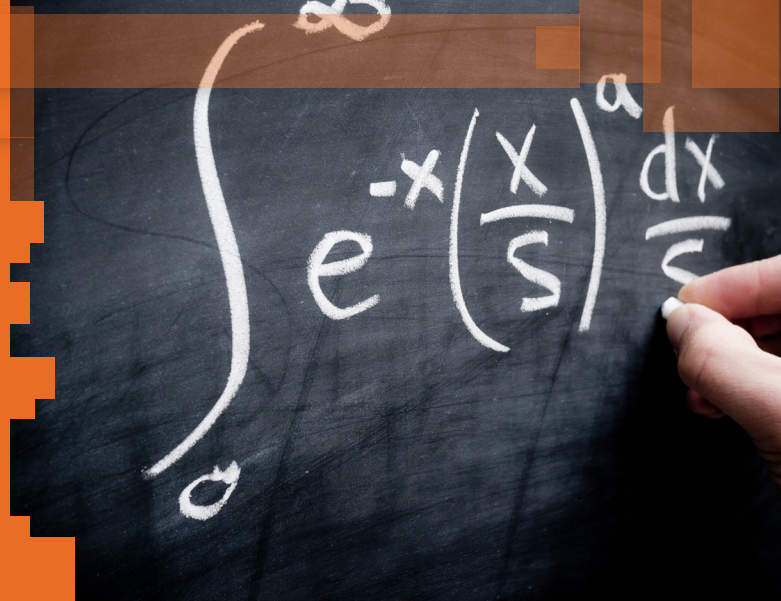
El conflicto matemático del siglo XVII

Gottfried Wilhelm Leibniz e Isaac Newton, de manera independiente, desarrollaron el segundo teorema fundamental del cálculo, el cual trata de la asignación de límites a las integrales definidas, desde un valor a hasta un valor b , para después sustituir estos valores en la función integrada o antíflujo.

Habiéndolo descubierto 10 años después de Newton, Leibniz no consideraba digno de publicar su cálculo, sin embargo, lo hizo público de inmediato. Cuando Newton se dio cuenta de que su cálculo ya era conocido en Alemania, comenzaron las acusaciones de plagio por parte del físico y matemático inglés.

Cuando el escándalo creció, Leibniz, erróneamente, acudió a la Royal Society para que resolviera el problema. Como Newton era el presidente de la sociedad nombró a amigos suyos para que investigaran y él mismo escribió el informe respectivo, gracias al cual la Royal Society acusó a Leibniz de plagio. Con el tiempo se concluyó que ambos desarrollaron el cálculo de manera independiente, prefiriéndose la notación de Leibniz. Así, si bien existe toda evidencia de que Newton fue el primero, la paternidad del cálculo se les atribuye a ambos.

La integral indefinida



🔥 Actividad detonadora

Los conceptos básicos del cálculo fueron utilizados de alguna forma desde los tiempos de los antiguos griegos. Entre éstos resalta el caso del cálculo de áreas de polígonos. Más tarde Newton y Leibniz, trabajando de formas independientes e ingeniosas, lograron consolidar todos los trabajos previos para hacer surgir el cálculo diferencial e integral.

El cálculo integral nace a partir de la primicia griega de determinar el área del círculo y figuras poligonales, sin embargo, Newton y Leibniz lograron pasar del caso particular al general, mediante el cálculo de áreas de regiones contenidas por curvas o conjuntos de curvas. Este procedimiento se condujo a los teoremas fundamentales del cálculo.

Para encontrar el valor exacto de una integral definida se presentan dos dificultades que hacen imposible su determinación.

En el primer caso esto radica cuando no se tiene forma de conocer la antiderivada de la función en cuestión. Caso de esto pueden ser las integrales:

$$\int_0^2 e^{t^2} dt \text{ y } \int_{-1}^3 \sqrt{1+x^3} dx.$$

El segundo caso sale a colación cuando la función se determina a partir de la experimentación, o sea, cuando se recolectan los datos mediante instrumentos de medición y en este caso es común que no se obtenga una fórmula para el integrando.

Realiza una investigación donde puedas determinar algunos ejemplos de aplicación de la integral. Aunque nos avocaremos por ahora a la integral indefinida, la actividad nos dará un panorama general sobre el uso de las integrales.

Posteriormente realicen una plenaria en donde cada uno exponga lo que pudo investigar a fin de compartir experiencias.

Concepto de integral indefinida

Se ha señalado anteriormente la definición de integral indefinida y se han visto métodos rústicos para calcular la integral definida. Ahora nos avocaremos a los métodos para hallar la antiderivada de una función y por ende será más exacto el uso del teorema fundamental del cálculo.

Fórmulas de integración directa

Más que fórmulas, te represento estos hechos por medio de teoremas.

Teorema 1.9. $\int af(x)dx = a \int f(x)dx$, donde a es una constante.

Teorema 1.10 Si $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$ están definidas en un mismo intervalo y $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ son constantes, entonces:

$$\begin{aligned} & \int [c_1 f_1(x) \pm c_2 f_2(x) \pm c_3 f_3(x) \pm \dots \pm c_n f_n(x)] dx \\ &= c_1 \int f_1(x) dx \pm c_2 \int f_2(x) dx \pm c_3 \int f_3(x) dx \pm \dots \pm c_n \int f_n(x) dx. \end{aligned}$$

Nota que en los dos teoremas anteriores solo se destacadan propiedades de la integral. La primera indica que una constante puede “salir” de la integral y así el integrando solo se trata de la función $f(x)$, la segunda muestra que es posible separar la integral con diferentes integrandos en diferentes integrales con cada integrando respectivo.

Para saber más

En una integral no debe faltar el término dx .

Algebraicas:

Teorema 1.11.1 $\int dx = x + C$.

Teorema 1.11.2 $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, para $n \neq -1$ y n racional.

Trascendentes:

Teorema 1.11.3 $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

Teorema 1.11.4 $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, donde $0 < a \neq 1$.

Teorema 1.11.5 $\int e^x dx = e^x + C$.

Trigonométricas:

Teorema 1.11.6 $\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + C.$

Teorema 1.11.7 $\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + C.$

Teorema 1.11.8 $\int \tan x \, dx = \ln|\sec x| + C.$

Teorema 1.11.9 $\int \cot x \, dx = \ln|\operatorname{sen} x| + C.$

Teorema 1.11.10 $\int \sec x \, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C.$

Teorema 1.11.11 $\int \csc x \, dx = \ln|\csc x - \cot x| + C.$

Teorema 1.11.12 $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C.$

Teorema 1.11.13 $\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C.$

Teorema 1.11.14 $\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + C.$

Teorema 1.11.15 $\int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + C.$

Otros útiles:

Teorema 1.11.16 $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsen} \frac{x}{a} + C.$

Teorema 1.11.17 $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctan} \frac{x}{a} + C.$

Teorema 1.11.18 $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} + C.$

Teorema 1.11.19 $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$

Teorema 1.11.20 $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C.$

Teorema 1.11.21 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + C.$

Para saber más

Repasa las ocho identidades trigonométricas, ya que te serán útiles al emplear estos teoremas pertenecientes a trigonometría.

Teorema 1.11.22 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C.$

Teorema 1.11.23 $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arctan \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} + C.$

Teorema 1.11.24 $\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C.$

Teorema 1.11.25 $\int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C.$

Con fines didácticos demostraré dos de los teoremas anteriores. Por lo tanto, es necesario que prestes atención al uso de las derivadas para que te sirva de repaso.

Demostración del teorema 1.11.2

Derivemos la función $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ con el fin de obtener x^n .

Procedamos: $D_x \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} \right) = \frac{1}{n+1} (n+1)x^n = x^n.$

Lo cual demuestra el teorema.

Demostración del teorema 1.11.19

$$D_x \left(\frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| \right) = \left(\frac{1}{2a} \right) \frac{\frac{(x+a) - (x-a)}{(x+a)^2}}{\frac{x-a}{x+a}} = \left(\frac{1}{2a} \right) \frac{2a}{\frac{x-a}{x+a}} = \left(\frac{1}{2a} \right) \frac{2a(x+a)}{(x-a)(x+a)^2} = \frac{1}{x^2 - a^2}.$$

Existen muchas antiderivadas que no se podrían determinar con el simple uso de los teoremas anteriores, sino que será necesario emplear ciertos teoremas que incluyen la regla de la cadena y cambio de variable. Los teoremas pertinentes son los siguientes.

Regla de la cadena para antiderivación

Teorema 1.12 Sea g una función diferenciable y considérese algún intervalo el contra-
dominio de g . Supóngase además que f es una función definida en ese mismo intervalo
de modo que F es una antiderivada de f en el intervalo mencionado. Entonces:

$$\int f(g(x)) [g'(x) dx] = F(g(x)) + C.$$

Teorema 1.13 Sea g una función diferenciable y sea n un número racional diferente de -1 . Tal que:

$$\int [g(x)]^n [g'(x) dx] = \frac{[g(x)]^{n+1}}{n+1} + C.$$

Teorema 1.14 Si $f(x) \neq 0$, tenemos:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|g(x)| + C.$$

Es tiempo de considerar algunos ejemplos que nos esclarecerán el uso de los teoremas señalados.

Ejemplo

Algebraicas. Obtendremos con el uso de los teoremas respectivos, las integrales indicadas:

- $\int 4 dx$
- $\int (3x^2 - 5x + \pi) dx$
- $\int \left(\frac{2}{3} \sqrt{t} + \sqrt[3]{t^2} \right) dt$

Se emplearán los teoremas 1.9, 1.10, 1.11.1 y 1.11.2.

a. $\int 4 dx = 4 \int dx$, por T.1.9.

Entonces $4 \int dx = 4(x+c) = 4x + 4c$, por T.1.11.1.

Pero como $4c$ es constante la podemos representar como C , de manera que la solución será:

$$\int 4 dx = 4x + C.$$

b. $\int (3x^2 - 5x + \pi) dx = \int 3x^2 dx - \int 5x dx + \int \pi dx = 3 \int x^2 - 5 \int x dx + \pi \int dx$, por T. 2.10 y 2.9.

Para saber más

Una variable independiente puede ser representada tanto por x como con cualquier otra variable, por ejemplo t . De forma que todos los teoremas anteriores quedan sujetos que las variables puedan ser diferentes a x .

Lo que da como resultado: $3\left(\frac{x^3}{3}+c_1\right)-5\left(\frac{x^2}{2}+c_2\right)+\pi(x+c_3)$, por T. 1.11.1 y 1.11.2.

Además tomaremos $3c_1 - 5c_2 + \pi c_3 = C$ de forma que:

$$\int(3x^2-5x+\pi)dx = x^3 - \frac{5}{2}x^2 + \pi x + C.$$

c. $\int\left(\frac{2}{3}\sqrt{t}+\sqrt[3]{t^2}\right)dt = \frac{2}{3}\int\sqrt{t}dt + \int\sqrt[3]{t^2}dt$, por T. 1.10 y 1.9 Ahora cambiamos las funciones de forma radical a exponencial, ya que $\sqrt[m]{a^m} = a^{\frac{m}{m}}$.

$$\frac{2}{3}\int t^{\frac{1}{2}}dt + \int t^{\frac{2}{3}}dt = \frac{2}{3}\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{t^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + C = \frac{2}{3}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{t^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + C = \frac{4}{9}t^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}t^{\frac{5}{3}} + C, \text{ por T. 1.11.2.}$$

Regresando a radicales si es necesario tendremos

$$\int\left(\frac{2}{3}\sqrt{t}+\sqrt[3]{t^2}\right)dt = \frac{4}{9}\sqrt{t^3} + \frac{2}{5}\sqrt[3]{t^5} + C = \frac{4}{9}t\sqrt{t} + \frac{2}{5}t\sqrt[3]{t^2} + C.$$

Nota. De aquí en adelante reuniremos todas las constantes que surjan en una sola, es decir en C , con el fin de ahorrarnos pasos. Cabe señalar también que una integral puede resolverse con el empleo de diferentes teoremas en un mismo momento, a saber, el inciso c del ejemplo anterior se resolvió con el empleo de 3 diferentes teoremas.

Ejemplo

Trigonométricas. Hallaremos la antiderivada en cada uno de los incisos.

a. $\int(\tan^2\theta + \cot^2\theta)d\theta$

b. $\int\frac{\operatorname{sen}^2t - \operatorname{cote}t}{\operatorname{sent}}dt$

c. $\int(-2\sec x \tan x + 4\sec^2 x)dx$

Evitaré mencionar algunos pasos, así como los teoremas ya vistos que se emplearán en la resolución de cada inciso. También se usarán algunas identidades trigonométricas elementales.

a. $\int(\tan^2\theta + \cot^2\theta)d\theta = \int(\sec^2\theta - 1 + \csc^2\theta - 1)d\theta$
 $= \int\sec^2\theta d\theta + \int\csc^2\theta d\theta - 2\int d\theta = \tan\theta - \cot\theta - 2\theta + C.$

Por T. 1.11.12 y 1.11.13.

$$b. \int \frac{\operatorname{sen}^2 t - \operatorname{cote} t}{\operatorname{sent}} dt = \int \frac{\operatorname{sen}^2 t}{\operatorname{sent}} dt - \int \frac{\operatorname{cote} t}{\operatorname{sent}} dt = \int \operatorname{sent} dt - \int \operatorname{csct} \operatorname{cote} t dt = -\operatorname{cost} + \operatorname{csct} + C.$$

Por T. 1.11.6 y 1.11.15.

$$c. \int (-2 \operatorname{sec} x \tan x + 4 \operatorname{sec}^2 x) dx = -2 \int \operatorname{sec} x \tan x dx + 4 \int \operatorname{sec}^2 x dx = -2 \operatorname{sec} x + 4 \tan x + C. \text{ Por T. 1.11.12 y 1.11.14.}$$

Una vez comprendidas estas primeras relaciones, pasamos por pertinencia a las que involucran la regla de la cadena para integrales.

Ejemplo

Para ejemplificar el uso de la regla de la cadena determinaremos las integrales indefinidas siguientes.

$$a. \int 2(2x-1)^2 dx$$

$$b. \int x \sqrt{x^2+5} dx$$

$$c. \int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{x^2+6x}}$$

$$d. \int \operatorname{sen}^2 3x \cos 3x dx$$

$$e. \int (\tan 2x - \operatorname{sec} 2x)^2 dx$$

- a. Para identificar los elementos a usar en el teorema de la regla de la cadena para integración podemos notar que si $g(x) = 2x - 1$ entonces $g'(x)dx$ debería darnos $g'(x)dx = 2dx$ y como podemos observar, estos elementos están en el integrando, de manera que ordenando la integral quedará lista de este modo:

$$\int (2x-1)^2 (2dx) = \frac{(2x-1)^{2+1}}{2+1} + C = \frac{(2x-1)^3}{3} + C.$$

- b. Aquí $g(x) = x^2 + 5$, de manera que necesitamos tener $g'(x)dx = 2xdx$, pero solo disponemos de dx , por lo tanto necesitamos un factor de 2 en dx . Para lograr esto, si multiplicamos por el factor $1 = 2/2$ a xdx entonces no se afectaría el integrando. El factor constante $1/2$ sobrante podrá salir de la integral para ya usar la regla de la cadena de integración. Esto es:

$$\begin{aligned} \int x \sqrt{x^2+5} dx &= \int (x^2+5)^{\frac{1}{2}} (xdx) = \int (x^2+5)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{2} x dx\right) = \frac{1}{2} \int (x^2+5)^{\frac{1}{2}} (2xdx) \\ &= \frac{1}{2} \frac{(x^2+5)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{1}{3} (x^2+5)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3} \sqrt{(x^2+5)^3} + C. \end{aligned}$$

- c. $\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{x^2+6x}} = \int (x^2+6x)^{-\frac{1}{2}}((x+3)dx)$, de manera que $g(x) = x^2 + 6x$, y así $g'(x)dx = (2x+6)dx = 2(x+3)dx$. De este modo notamos que nos hace falta un factor 2 de dx . Realizando una operación semejante al inciso anterior tendremos:

$$\begin{aligned} \int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{x^2+6x}} &= \int (x^2+6x)^{-\frac{1}{2}}((x+3)dx) = \int (x^2+6x)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}(2x+6)dx\right) = \frac{1}{2} \int (x^2+6x)^{-\frac{1}{2}}(2x+6)dx \\ &= \frac{1}{2} \int (x^2+6x)^{-\frac{1}{2}}((2x+6)dx) = \frac{1}{2} \frac{(x^2+6x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{x^2+6x} + C. \end{aligned}$$

- d. $\int \text{sen}^2(3x)\cos(3x)dx = \int (\text{sen}(3x))^2(\cos(3x)dx)$. Si $g(x) = \text{sen}(3x)$, entonces $g'(x) = \cos(3x) \cdot 3dx$. Aquí el argumento de la función es $3x$. De este modo nos hace falta el factor 3. Tomando en cuenta esto realizamos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \int \text{sen}^2(3x)\cos(3x)dx &= \int (\text{sen}(3x))^2(\cos(3x)dx) \\ &= \frac{1}{3} \int (\text{sen}(3x))^2(3\cos(3x)dx) = \frac{1}{3} \frac{(\text{sen}(3x))^3}{3} + C = \frac{(\text{sen}(3x))^3}{9} + C. \end{aligned}$$

- e. En este caso vamos de forma directa realizando primero el binomio al cuadrado:

$$\begin{aligned} \int (\tan 2x - \sec 2x)^2 dx &= \int (\tan^2(2x) - 2\tan(2x)\sec(2x) + \sec^2(2x))dx = \\ &= \int (\sec^2(2x) - 1)dx - \int \sec(2x)\tan(2x)2dx + \int \sec^2(2x)dx \\ &= \int 2\sec^2(2x)dx - \int 2\sec(2x)\tan(2x)dx - \int dx \\ &= \int \sec^2(2x)2dx - \int \sec(2x)\tan(2x)2dx - \int dx = \tan(2x) - \sec(2x) - x + C. \end{aligned}$$

Nota: en un integrando solo se puede multiplicar por factores constantes de la forma a/a , con $a \neq 0$ pero es totalmente erróneo añadir o sustraer factores que contengan a la variable independiente correspondiente. O sea, no podemos sumar o restar x , a menos que dé cero, por ejemplo $3x - 3x$.

Con estas pautas podremos entrar de llenos a los ejemplos de integrales de funciones trascendentes los cuales se compondrán con las trigonométricas y algebraicas.

Ejemplo

Trascendentes. Integraremos cada inciso.

- a. $\int (e^{2x} + 1)^{-4} e^{2x} dx$
- b. $\int \frac{x+2}{x+1} dx$
- c. $\int e^{4\cos(3x)} \text{sen}(3x) dx$

- a. Por la regla de la cadena $g(x) = e^{2x} + 1$ de donde $g'(x)dx = e^{2x} 2dx$, de manera que nos falta el factor 2.

$$\int (e^{2x} + 1)^{-4} e^{2x} dx = \frac{1}{2} \int (e^{2x} + 1)^{-4} e^{2x} 2dx = \frac{1}{2} \frac{(e^{2x} + 1)^{-3}}{-3} + C = \frac{1}{-6(e^{2x} + 1)^3} + C$$

- b. $\int \frac{x+2}{x+1} dx = \int \frac{(x+1)+1}{x+1} dx = \int \frac{x+1}{x+1} dx + \int \frac{1}{x+1} dx = \int dx + \int \frac{dx}{x+1} = x + \ln|x+1| + C$, por T. 2.7.

- c. En este caso falta la derivada del exponente, es decir, $-4\text{sen}(3x) \cdot 3dx = -12\text{sen}(3x)dx$.

$$\int e^{4\cos(3x)} \text{sen}(3x) dx = -\frac{1}{12} \int e^{4\cos(3x)} (-12\text{sen}(3x) dx) = \frac{1}{12} e^{4\cos(3x)} + C, \text{ por T. 1.11.5.}$$

Pasamos a la última parte con los teoremas restantes.

Ejemplo

Integraremos mediante los teoremas pertinentes cada uno de los incisos siguientes:

a. $\int \frac{(2x+9)dx}{x^2+9}$

b. $\int \frac{2x-3}{4x^2-7} dx$

c. $\int \sqrt{3-2x-x^2} dx$

a. $\int \frac{2x+9}{x^2+9} dx = \int \frac{2x dx}{x^2+9} + 9 \int \frac{dx}{x^2+9} = \ln|x^2+9| + C + 9 \int \frac{dx}{3^2+x^2} = \ln|x^2+9| + 9 \left(\frac{1}{3} \arctan\left(\frac{x}{3}\right) \right) + C$, por T.

1.14. y T. 1.11.17, con $a = 3$.

- b. Aquí se usará la racionalización del radical final así como los teoremas 1.14 y 1.11.19. con variable $2x$ y $a = \sqrt{7}$.

$$\begin{aligned} \int \frac{2x-3}{4x^2-7} dx &= \frac{1}{4} \int \frac{4(2x-3)}{4x^2-7} dx = \frac{1}{4} \int \frac{8x dx}{4x^2-7} - \frac{1}{4} \int \frac{12 dx}{4x^2-7} = \frac{1}{4} \int \frac{8x dx}{4x^2-7} - \frac{6}{4} \int \frac{2 dx}{(2x)^2 - (\sqrt{7})^2} \\ &= \frac{1}{4} \ln|4x^2-7| - \frac{3}{2} \frac{1}{2\sqrt{7}} \ln \left| \frac{2x-\sqrt{7}}{2x+\sqrt{7}} \right| + C = \frac{1}{4} \ln|4x^2-7| - \frac{3\sqrt{7}}{28} \ln \left| \frac{2x-\sqrt{7}}{2x+\sqrt{7}} \right| + C. \end{aligned}$$

- c. Tras unos ajustes algebraicos se empleará el teorema 1.11.23 a la vez de una variable $x+1$ y $a = 2$.

$$\int \sqrt{3-2x-x^2} dx = \int \sqrt{4-(1+2x+x^2)} dx = \int \sqrt{2^2-(x+1)^2} dx = \left(\frac{x+1}{2}\right) \sqrt{3-2x-x^2} + 2\arcsen\left(\frac{x+1}{2}\right) + C.$$

Actividad de aprendizaje 6

◀ Realiza lo que pide.

1. Utilizando las reglas de derivación vistas en el pasado semestre y junto con un compañero más. Demuestren los teoremas de integración que les señalo a continuación: Teoremas 1.11.8 al 1.11.11.

En caso de no haber obtenido su resultado esperado, ¿podrían verificar en donde se halla el error del proceso? Les sugiero que retomen desde el inicio su demostración hasta dar con el posible fallo. Muestran al grupo sus demostraciones con el fin de que en consenso dirigido por su docente las aprueben.

Hasta aquí quizás puedas discernir que existe más de un camino para determinar la integral, prueba de ello te dejo la siguiente actividad que realicen en binas con el fin de explorar esta idea.

2. Integra cada una de las siguientes integrales mediante las sugerencias dadas de manera que cada uno en la bina las resuelva siguiendo solo una de las sugerencias señaladas de manera que cada quién lo realice diferente. Al final observen las aparentes diferencias entre sus métodos y revisen los procesos de su compañero para llegar a un acuerdo si hubo error o ambos caminos llegan al mismo resultado.

a. $\int (2x-1)^2 dx$

- Desarrolla el binomio al cuadrado antes de integrar
- Usa el teorema de la regla de la cadena para integrales usando $g(x) = 2x - 1$.

b. $\int \frac{(\sqrt{x}-2)^2 dx}{\sqrt{x}}$

- Desarrolla el binomio y multiplica por $x^{-1/2}$.
- Usa el teorema de la regla de la cadena para integrales usando $g(x) = \sqrt{x} - 2$.

c. $\int 2\operatorname{sen}x \cos x dx$

- Usa la relación trigonométrica $2\operatorname{sen}x \cos x = \operatorname{sen}(2x)$.
- Usa el teorema de la regla de la cadena para integrales usando $g(x) = \operatorname{sen} x$.

Reglas básicas de integración

Ya se han visto las reglas de integración casi inmediatas. Ahora nos enfocaremos a determinar el valor de la constante de integración con el uso de estas reglas básicas de integración.

Como se decía, para resolver algunas aplicaciones directas con la antiderivación se requiere a grandes rasgos la determinación del valor de la constante de integración C

que satisface las **condiciones iniciales** del problema o también llamada condiciones de frontera. Con el fin de llegar a una comprensión más clara de lo antedicho, es mejor que consideremos algunos ejemplos aplicativos.

Ejemplo

Hallaremos la antiderivada que satisfaga la ecuación $\frac{dy}{dx} = -3x$ además de que cuando $x = 2$ se tenga que $y = 1$.

En primer lugar tenemos que $\frac{dy}{dx} = -3x$, es decir, $dy = -3x dx$, de donde integrando ambos lados en esta última relación obtenemos

$$\int dy = \int -3x dx$$
$$y = -\frac{3}{2}x^2 + C.$$

Ahora sustituimos las condiciones del problema, a saber, $x = 2$, $y = 1$. De forma que así determinemos el valor particular de C :

$$1 = -\frac{3}{2}(2)^2 + C$$
$$7 = C.$$

Así que la antiderivada pedida es:

$$y = -\frac{3}{2}x^2 + 7.$$

Ejemplo

En una curva específica la pendiente en el punto (x, y) es igual a $2x + 1$, además se sabe que el punto $(5, -3)$ pertenece a dicha curva. Con estos datos halla la ecuación de la curva.

Con los datos dados afirmamos que se tiene $\frac{dy}{dx} = 2x + 1$, por lo que vamos a proceder del mismo modo al anterior ejemplo, es decir, integramos ambos lados y después sustituimos las condiciones específicas con el fin de hallar el valor de la constante C que determine la solución.

$$dy = (2x + 1)dx$$
$$\int dy = \int (2x + 1)dx$$
$$y = x^2 + x + C$$
$$-3 = (5)^2 + (5) + C$$
$$-33 = C.$$

Ecuación buscada:

$$y = x^2 + x - 33.$$

Ejemplo

La herida de piel en cierto tipo de ganado ha disminuido a una tasa de $\frac{-2}{(t+2)^2}$ cm² por día, contando t días a partir del martes. Si el jueves el área de la herida fue de 1.8 cm², determina:

- El área de la herida el martes.
- Si continua con esa tasa cuál será el área prevista para el día sábado de esa misma semana.

Considerando como A el área de la herida después de t días a partir del martes se tiene que $\frac{dA}{dt} = \frac{-2}{(t+2)^2}$ de manera que

$$\begin{aligned}dA &= \frac{-2}{(t+2)^2} dt \\ \int dA &= \int -2(t+2)^{-2} dt = -2 \int (t+2)^{-2} dt \\ A &= 2(t+2)^{-1} + C.\end{aligned}$$

Sustituyendo el valor de los datos $A = 1.8$ y $t = 2$ (han pasado dos días desde el martes).

$$\begin{aligned}1.8 &= \frac{2}{(2+2)} + C \\ \Rightarrow 1.3 &= C.\end{aligned}$$

De donde $A = \frac{2}{t+2} + 1.3$.

- Para el día martes lógicamente $t = 0$, por lo que $A = \frac{2}{2+0} + 1.3 = 2.3$. Es decir el área original de la herida del animal era de 2.3 cm².
- En este caso $t = 4$, por lo que $A = \frac{2}{2+4} + 1.3 = \frac{49}{30} = 1.633$. Este será en cm² el área de la herida.

Actividad de aprendizaje 7

◀ Observa la siguiente serie de situaciones, en donde podrás aplicar las integrales de modo que cuando lo consideres pertinente consulta con tu docente sobre los inconvenientes que quizás te surjan.

- Se sabe que el punto $(2, -3)$ pertenece a una curva, además en cualquier punto (x, y) de la curva la pendiente de la recta tangente es $-3x + 2$. Con esto determina la ecuación de la curva.
- Si la pendiente de una recta tangente en cualquier punto (x, y) de una curva es igual a $\sqrt{5}x$ y también el punto $(1, 1)$ pertenece a dicha curva, entonces ¿cuál será la ecuación esta curva?

Evidencia de aprendizaje 2

◀ Obtén la integral de cada inciso, mencionando en cada caso cuál teorema aplicaste.

$$1. \int \sqrt{ax} \, dx \quad 2. \int \frac{dz}{\sqrt{a-bz}} \quad 3. \int (\sqrt{a}-\sqrt{x})^2 dx \quad 4. \int \frac{\cos ax}{\sqrt{b+\operatorname{sen}ax}} dx \quad 5. \int \frac{e^x dx}{a+be^x}$$

Aplicando lo aprendido

◀ Llegó el momento de realizar una serie de situaciones que condensarán lo obtenido y desarrollado a lo largo de este parcial. Puedes apoyarte de los recursos vistos para cada planteamiento y obtención de la solución. No olvides escribir todos los procesos necesarios.

1. Utiliza los teoremas de integración pertinentes con el fin de obtener las soluciones señaladas en cada inciso.

a. $\int (2-3x+x^3)dx = 2x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 + C$

b. $\int y^3 \sqrt{y^4+1} dy = \frac{1}{6}(y^4+1)^{3/2} + C$

c. $\int \frac{3tdt}{\sqrt[3]{3+t^2}} = \frac{9}{4}(3+t^2)^{2/3} + C$

d. $\int \frac{x-1}{x+1} dx = x - 2\ln|x+1| + C$

e. $\int (e^x - x^e) dx = \frac{1}{2}e^{2x} + 2e^x + x + C$

f. $\int \cos \frac{x}{2} dx = 2\text{sen} \frac{x}{2} + C$

g. $\int (\text{cost} - \text{sent})^2 dt = t + \frac{1}{2}\text{cos}2t + C$

h. $\int \sec^2 \frac{x}{b} \tan \frac{x}{b} dx = \frac{1}{2}b \tan^2 \frac{x}{b} + C$

i. $\int \frac{dx}{9x^2+4} = \frac{1}{6}\text{arctan} \frac{3x}{2} + C$

j. $\int \frac{dx}{\sqrt{27+6x-x^2}} = -\sqrt{27+6x-x^2} + 3\text{arcsen} \frac{x-3}{6} + C$

k. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-25}} = \frac{1}{2}\ln \left| 2x + \sqrt{4x^2-25} \right| + C$

l. $\int \sqrt{12+4x-x^2} dx = \frac{1}{2}(x-2)\sqrt{12+4x-x^2} + 8\text{arcsen} \frac{x-2}{4} + C$

2. Obtén la integral de cada uno de los incisos, mencionando en cada caso cuál teorema aplicaste.

a. $\int \frac{e^{2\theta} d\theta}{e^{2\theta} + 1}$

b. $\int e^{\tan x} \sec^2 x dx$

c. $\int \frac{dx}{1+\cos x}$

d. $\int \csc^2(a-bx) dx$

e. $\int \frac{5x dx}{\sqrt{1-x^4}}$

f. $\int \frac{dt}{t^2+4t+3}$

g. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x-x^2-2}}$

h. $\int \frac{d\theta}{1+\theta+\theta^2}$

i. $\int \frac{r dr}{r^4-r^2-1}$

3. El volumen V en cm^3 de un neumático va creciendo a un ritmo dado por $\frac{dV}{dt} = \sqrt{t+1} + \frac{3}{4}t$, en donde t es el tiempo transcurrido en segundos. Si el volumen es de 30 cm^3 al pasar 2.5 segundos, ¿cuál es el volumen a los 7 segundos?

4. Una célula vegetal estuvo creciendo siguiendo la relación $\frac{1}{(8-t)^2} \mu\text{m}^3$ por día, donde t representa el tiempo en días transcurridos. Si se proporciona la información de que en tres días la célula creció $2.5 \mu\text{m}^3$, entonces halla el volumen después de media semana.

Presentación del proyecto

Es momento de dar a conocer lo que has trabajado a lo largo de este parcial, a saber, tu producto del proyecto.

Recuerda que entre algunas de las normas que debes seguir están las siguientes:

- El producto final se entrega y presenta el día y hora acordado con tu docente.
- Todos los integrantes del equipo deben participar y demostrar cuál ha sido la aportación en el mismo.
- Este trabajo será evaluado mediante la rúbrica correspondiente de acuerdo a la ponderación que, entre ellas, una propuesta para solucionar el o los problemas expuestos.

He incorporado a mi saber

Rúbrica para la evaluación del proyecto

Nivel de logro o desempeño			
Inicial	Básico	Autónomo	Estratégico
Conozco solo los elementos analíticos que componen una integral definida de acuerdo al contexto en que se me proporciona. Describo el funcionamiento muy escueto del software así como los elementos que lo componen.	Conozco solo los elementos gráficos que componen una integral definida de acuerdo al contexto en que se me proporciona. Describo el funcionamiento básico del software así como los elementos que lo componen.	Conozco algunos de los elementos analíticos y gráficos que componen una integral definida de acuerdo al contexto en que se me proporciona. Describo el funcionamiento básico del software así como los elementos que lo componen y reconozco otras aplicaciones opcionales.	Conozco todos los elementos analíticos y gráficos que componen una integral definida de acuerdo al contexto en que se me proporciona. Describo el funcionamiento completo del software así como los elementos que lo componen y reconozco otras aplicaciones opcionales.
Represento de forma elemental las integrales definidas solicitadas sin realizarles ajustes opcionales para su mejor visualización.	Represento de forma adecuada las integrales definidas solicitadas y les realizo algunos ajustes con ayuda proporcionada.	Represento de forma adecuada las integrales definidas solicitadas a la vez de que puedo realizarles ciertos ajustes opcionales para su mejor visualización.	Represento de forma óptima las integrales definidas solicitadas a la vez de que puedo realizarles ciertos ajustes opcionales para su mejor visualización.

Nivel de logro o desempeño			
Inicial	Básico	Autónomo	Estratégico
Con ayuda puedo imprimir en presencia de mi docente las integrales definidas que indique y respondo de manera correcta a algunas de las preguntas planteadas al exponer lo realizado.	Puedo imprimir en presencia de mi docente las integrales definidas que indique y respondo de manera correcta a la mayoría de las preguntas planteadas al exponer lo realizado.	Puedo imprimir en presencia de mi docente las integrales definidas que indique y respondo de manera correcta a las preguntas planteadas al exponer lo realizado.	Puedo imprimir en presencia de mi docente las integrales definidas que indique y respondo de manera correcta y apporto ideas a las preguntas planteadas al exponer lo realizado.
Tengo un bajo compromiso con mi equipo y con la resolución del proyecto de forma que colaboro con él. Mantengo una actitud pasiva en todo momento del trabajo además de que expreso en ocasiones mis ideas y aportaciones.	Tengo un compromiso concreto con mi equipo y con la resolución del proyecto de forma que colaboro con él en la mayoría del tiempo. Mantengo una actitud neutral en todo momento del trabajo además de que expreso mis ideas y aportaciones con un lenguaje básico.	Tengo un alto compromiso con mi equipo y con la resolución del proyecto de forma que colaboro con él en la mayoría del tiempo. Mantengo una actitud neutral en todo momento del trabajo además de que expreso mis ideas y aportaciones con un lenguaje digno en todo tiempo.	Tengo un alto compromiso con mi equipo y con la resolución del proyecto de forma que colaboro con él en todo momento. Mantengo una actitud positiva en todo momento del trabajo además de que expreso mis ideas y aportaciones con un lenguaje digno en todo tiempo.

La siguiente rúbrica, te servirá para situarte en cuanto al logro de las competencias que se presentaron, como parte de las metas del parcial. Coloca tus logros y áreas de oportunidad.

Rúbrica de Logros y Áreas de Oportunidad de mis Competencias			
Tipo de Competencia	Competencia	Mis Logros	Mis Oportunidades
Genéricas	6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.		
	8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.		
Disciplinares	3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.		

Organizador para el portafolio de evidencias

Actividad de aprendizaje número	Evidencia o producto	No comprendió ni lo resolvió	Comprendió y resolvió parcialmente	Comprendió y resolvió de forma correcta y completa
1	Identificación gráfica de la antiderivada.			
2	Determinación de los problemas o modelos que dieron origen al cálculo integral.			
3	Obtención de áreas de curvas mediante sumas de Riemman			
4	Obtención de integrales definidas mediante sumas de Riemman			
5	Aplicación del Teorema fundamental del cálculo.			
6	Reconocimiento de las diferentes reglas de integración inmediatas.			
7	Determinación de las constantes de integración.			

Autoevaluación

Mediante un análisis objetivo indica el nivel de logro obtenido a lo largo del viaje de este parcial de acuerdo a las competencias declaradas al inicio, así como del objetivo general. Apóyate de las siguientes preguntas, así como de la tabla que se te da posteriormente.

- ¿Cuáles son algunas de las competencias observé difíciles de desarrollar en este parcial?, ¿Por qué?
- ¿Qué logros se vieron truncados durante el desarrollo del parcial?
- ¿Qué mecanismos requieres promover para seguir las líneas de las competencias o objetivos establecidos?
- ¿En qué otras facetas de mi contexto podré emplear lo analizado a lo largo de este parcial?

◀ Coloca una X en donde corresponda y describe lo solicitado con el corazón en la mano.

Criterio	Difícilmente	En ocasiones	Siempre
Distingo de las diferentes fuentes de inspiración que dieron origen al cálculo integral.			
Empleo las sumas de Riemman para determinar áreas bajo curvas.			
Utilizo los diversos métodos de cálculo de integrales definidas en relación a las sumas de Riemman.			
Aplico las diversas reglas de integración inmediata de forma que distingo cuál usar.			
Logros alcanzados:	Aspectos a mejorar:		

◀ Registra tus evidencias y evalúa, socializando en el grupo de compañeros y con tu docente. Observa que hay dos renglones para cada evidencia, esto es para que la evalúes, después de haberla mejorado.

Evidencia	Autoevaluación	Coevaluación	Heteroevaluación
Presentación y exposición en power point sobre los problemas que dieron origen al cálculo integral.			
Solución de ejercicios aplicando las reglas básicas de integración.			

Segundo parcial

Propósito general de la unidad de aprendizaje curricular

- Resolver problemas en contextos intra y extra-matemáticos mediante el uso del cálculo integral.

Contenidos del parcial

- Técnicas de integración
 8. Integración por sustitución
 9. Integración por partes
 10. Integral de funciones logarítmicas
 11. Integral de funciones exponenciales
 12. Técnicas de integración con funciones trigonométricas
 13. Integración por fracciones parciales

Línea curricular

- Matemáticas

Componente formativo

- Propedéutico
- Ciencias exactas y naturales

Competencias genéricas

- Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.

Atributos

- Estructura ideas y argumentos de manera clara, coherente y sintética.

Competencias disciplinares básicas

- Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
- Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Evidencias

- Explicación audiovisual de la solución de un ejercicio aplicando alguna técnica de integración (de preferencia utilizar algún software matemático como Geogebra o Excel para su explicación).

¿Qué vamos a aprender?

Ya he indicado que el cálculo integral tiene cierto grado de complejidad respecto al cálculo diferencial. Para conllevar este hecho se dieron diferentes teoremas que nos ayudan a resolver las integrales, sin embargo, existen integrandos que al parecer son sencillos, pero encontrar una antiderivada elemental es más complejo. Prueba de ello se te presenta en la siguiente sección. Sin embargo, muchos autores establecen como métodos de integración, o también llamadas técnicas de integración, a acciones que consisten en cambiar, a través de ciertas transformaciones de diversa índole, el integrando que corresponde, por uno, que resulta más simple; en estos casos, no tendremos la primitiva al finalizar dichas transformaciones, sino que, será más simple aplicar los teoremas analizados en la sección anterior.

Espero que, con lo expuesto en el presente bloque, puedas construir una gama de métodos para integrar muchos tipos de funciones y que, puedas personalizar, algunos de ellos.

Evaluación diagnóstica

La idea fundamental de la evaluación diagnóstica es que puedas discernir, con la ayuda del instrumento respectivo, tus habilidades y áreas de mejora para que tengas una base sólida al inicio de este segundo parcial.

◀ En esta sección se te darán una serie de ejercicios o actividades a realizar de las cuales tendrás que efectuar de forma individual para que posteriormente junto con tu docente y compañeros de grupo te hagas una autoevaluación mediante la rúbrica que se te proporciona.

- Determina si las expresiones de las primeras columnas son equivalentes, colocando si es verdadero o falso y el argumento correspondiente.

Expresión	Equivalencia	Verdadero	Falso	Argumento
$x^4 + x^2 + 1$	$(x^2 + 1)^2$			
$-9 + 9\text{sen}^2x$	-9cos^2x			
$9x^2 + 6x$	$(3x + 1)^2 - 1$			
$\ln(x^2) + 5$	$2\ln(x) + 5$			
xe^{2x}	$2xe^x + 1$			

- Realiza las siguientes operaciones.

a. $\frac{1}{x+1} + 1$

b. $\frac{x}{x-1} + \frac{1}{x+1}$

c. $(x + 1)(x - 1)(x^2 - 1)$

- Resuelve las integrales que siguen.

a. $\int \frac{1}{x+1} dx$

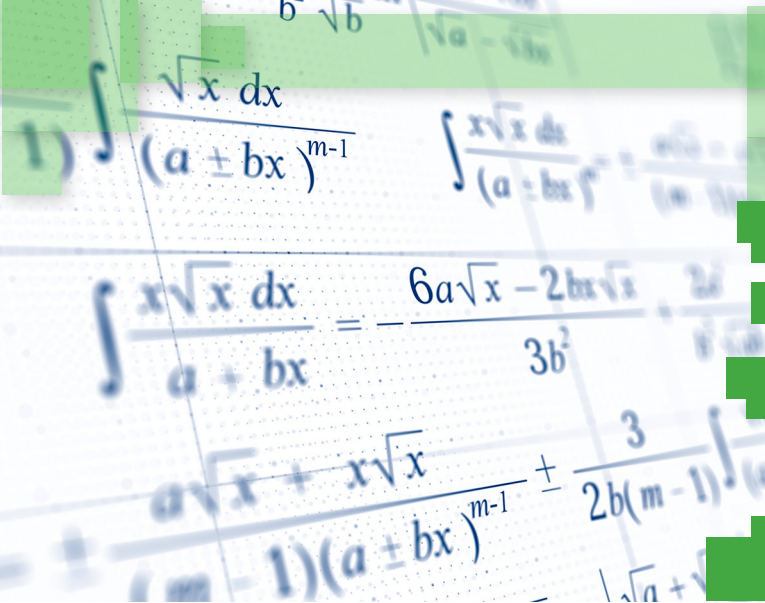
b. $\int \frac{\ln x}{x} dx$

◀ Utiliza la siguiente lista de cotejo con el objetivo de señalar cuál saber posees o cuál habrá que darle un poco más de énfasis.

Saber	Si	No	Observaciones
Identifico equivalencias de expresiones algebraicas			
Identifico equivalencias de expresiones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas.			
Realizo operaciones con expresiones racionales.			
Aplico los teoremas básicos de integración.			

Project

Project:	Methodology for making more efficient the integration process.
Problem:	Although the methods of integration vary and are from the direct application, some elements are required to make their use more efficient. As well as to obtain primitives in a more appropriate form. High school students sometimes face this situation of not identifying clearly, the technique they have to use to get these primitives.
Length:	(It is determined by the teacher).
Score:	(It is determined by the teacher).
Competences:	G6. Supports a personal posture about topics of interest and general relevance, considering other points of view in a critic and sensible way. M3. Explains and interprets the gathered results by using mathematical processes and he / she contrasts them with established models or real situations.
Activities:	In teams formed by the teacher, produce a personalized method that can be useful to make more efficient the integration process. For this, elaborate: <ul style="list-style-type: none">• A review of the different integration techniques and how they are related between each other and the types of integrals that are generated.• Use electronic and printed sources to find information about the different ways to organize the application of these techniques.• Produce the first steps of the methodology establishing the questions of how and what in a clear way and supporting each one of them.• Share with the rest of the teams your proposal, take a look the different integrals that are gathered in each one.• Make a diagram in which the integrals can be organized and determine the steps to follow in the methodology.• Once you have established the steps, elaborate a map in which the steps are included. Provide examples.• Share your work with the class and determine the necessary adjustments.• You can post on a blog the gathered methodology to make other teachers and classmates take in consideration.
Resources:	Student's Book, PC, bond paper, reference books.
Regulations:	This work must be handed in on the date indicated by the teacher. In case a member of the team is missing, the solution will be provided by the teacher.



Técnicas de integración

🔥 Actividad detonadora

1. A un ingeniero civil le proponen realizar dos de las siguientes tres integrales con los métodos convencionales (los teoremas vistos en el bloque anterior):

a. $\int \sqrt{x} \operatorname{sen} x dx$

b. $\int \sqrt{\tan x} dx$

c. $\int (x^2 - 1)^2 x dx$

◀ En parejas propongan la solución como ayuda al ingeniero. Pueden escoger dos de las tres con el fin de terminar el proyecto presentado. Para ello guíense de las siguientes pautas para los incisos escogidos:

◀ ¿Hay algún teorema aplicable a la integral escogida?, ¿cuál o cuáles serían esos teoremas apropiados?

◀ ¿Pueden ser utilizados de forma directa de manera que con ellos logren la solución? En caso de contestar afirmativamente den sus soluciones.

Como ya te habrás dado cuenta, para llegar a la antiderivada de algunas funciones se necesitan otras herramientas matemáticas para lograr el objetivo. Los métodos a considerar en esta sesión son los siguientes:

- Integración por sustitución
- Integración por partes
- Integración de funciones logarítmicas
- Integración de funciones exponenciales
- Técnicas de integración con funciones trigonométricas
- Integración por fracciones parciales

Integración por sustitución

Este método ya ha sido analizado anteriormente bajo el teorema de la regla de la cadena y el teorema de la integral de una función elevada a la n -ésima potencia, a saber: sea g una función diferenciable y sea n un número racional diferente de -1 . De forma que:

$$\int [g(x)]^n [g'(x)dx] = \frac{[g(x)]^{n+1}}{n+1} + C.$$

Tomando como ejemplos para este caso las integrales:

a. $\int (x - 2x^2)^3 (1 - 4x) dx$

b. $\int \text{sen}^{-4}(3x) \cos(3x) dx$

En donde para el inciso a tomamos $g(x) = (x - 2x^2)$, y para el b se toma $g(x) = \text{sen}(3x)$. De forma que haciendo las adecuaciones pertinentes, ordenamos y resolvemos las integrales de la siguiente manera:

a. $\int (x - 2x^2)^3 (1 - 4x) dx = \frac{(x - 2x^2)^4}{4} + C.$

b. $\int \text{sen}^{-4}(3x) \cos(3x) dx = \frac{1}{3} \int [\text{sen}(3x)]^{-4} [\cos(3x)] 3 dx = -\frac{\text{sen}^{-3}(3x)}{9} + C.$

De este modo abarcamos el primero de los métodos no convencionales de integración.

Actividad de aprendizaje 1

◀ Resuelve, usando cambios de variable, las integrales.

1. $\int x^2(x^3 + 5) dx$
2. $\int x^3 \sqrt{x^2 - 1} dx$
3. $\int x \sqrt{x - 1} dx$
4. $\int \frac{dx}{x(3 - \ln x)}$
5. $\int \frac{e^{\sqrt{x}+1}}{\sqrt{x}} dx$
6. $\int \frac{\text{sen} x}{\cos x + 1} dx$
7. $\int \frac{1 - \text{sen}^2 x}{\cos^2 x} dx$
8. $\int \text{sen}^4 x \cos x dx$
9. $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\text{sen} x}} dx$
10. $\int x^5 \sqrt{x^2 + 1} dx$

Integración por partes

Considerando una integral como la siguiente $\int e^{x^2} x^3 dx$ nos parecería, a primera vista, utilizar el teorema de la integral de la función exponencial, mas no es factible para integrar de forma inmediata este caso.

Para usar el teorema mencionado se requiere que $D(x^2) = 2x$ aparezca en el integrando, pero notamos que sólo se tiene x^3 y es imposible eliminar a la variable a integrar. De manera que este teorema no nos es aplicable en este momento.

Comprendiendo la necesidad de estos casos se requiere la integración por partes, ésta se deduce del hecho que el integrando posee dos funciones diferenciables que se hallan en un producto, así que digamos que:

Si $u(x)$ y $v(x)$ son dos funciones diferenciables en un intervalo I , se tendrá que por derivación del producto que:

$$D_x[u(x)v(x)]dx = D_x[u(x)]v(x)dx + D_x[v(x)]u(x)dx.$$

Ordenando e integrando cada uno de los miembros se tendrá:

$$u(x)D_x[v(x)]dx = D_x[u(x)v(x)]dx - v(x)D_x[u(x)]dx.$$
$$\int u(x)D_x[v(x)]dx = \int \{D_x[u(x)v(x)]dx - v(x)D_x[u(x)]dx\}.$$

Como la integral y la derivada son inversas se tiene que:

$$\int u(x)D_x v(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)D_x[u(x)]dx.$$

Este último hecho se conoce como la integración por partes, que considerándolo de forma abreviada podríamos darla a conocer como:

Integración por partes:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du.$$

Cabe señalar las condiciones básicas para el uso de este método:

- La sección escogida como dv ha de ser fácil de integrar.
- La parte $\int v \cdot du$ debe ser más sencilla de la original $\int u \cdot dv$.

Este método sugiere que en el integrando escojamos dos partes, una será u que debemos derivar para hallar du y la otra parte será dv la cual al integrarla se obtendrá v . Con esto el resultado de la integral original es el producto $u \cdot v$ menos la integración del producto $v \cdot du$.

En caso de que la integral que surja con $v \cdot du$ requiera una adecuación más para ser integrada, se puede utilizar de nuevo la integración por partes sobre ella.

Consideremos ejemplos de ello.

Ejemplo

Integraremos cada uno de los siguientes incisos:

a. $\int e^{x^2} x^3 dx$

b. $\int 2x \ln(x) dx$

Conforme vayas observando los ejemplos tendrás la habilidad de escoger cuáles serán los términos u y dv .

a. Para este caso se podrían crear las combinaciones posibles:

	u	dv
1	e^{x^2}	$x^3 dx$
2	$e^{x^2} x$	$x^2 dx$
3	$e^{x^2} x^2$	$x dx$
4	$e^{x^2} x^3$	dx
5	x^3	$e^{x^2} dx$
6	x^2	$e^{x^2} x dx$
7	x	$e^{x^2} x^2 dx$
8	1	$e^{x^2} x^3 dx$

De éstas sólo servirá la que satisfaga los puntos señalados respecto a la integración por partes, a saber: dv ha de ser fácil de integrar, de donde eliminamos lógicamente las parejas que contengan a dv complicadas, a saber: $e^{x^2} dx$, $e^{x^2} x^2 dx$ y $e^{x^2} x^3 dx$.

El segundo elemento lo observaremos por ensayo y error, por ejemplo, si tomamos la pareja:

$$u = e^{x^2} x \text{ y } dv = x^2 dx.$$

Estaríamos obteniendo lo siguiente:

$$du = d(e^{x^2} x) = (e^{x^2} 2x + e^{x^2}) dx \text{ y } v = \int dv = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3}.$$

De forma que:

$$uv = (e^{x^2}) \left(\frac{x^3}{3} \right) \text{ y } \int v du = \frac{x^3}{3} (e^{x^2} 2x + e^{x^2}) dx.$$

Y aquí claramente se observa que en esta elección de los términos u y dv no se satisface que la integral $\int v du$ sea más sencilla que la original. Por lo tanto, se rechaza esta pareja elegida.

Análogamente se observa que las parejas 1, 3 y 4 tampoco nos ayudan.

La pareja correcta en este caso será la número 6, es decir:

$$u = x^2 \text{ y } dv = e^{x^2} x dx.$$

Realizando la derivada e integral respectivamente a cada igualdad podemos llegar a:

$$du = d(x^2) = 2x dx \text{ y } v = \int dv = \int e^{x^2} x dx = \frac{1}{2} \int e^{x^2} 2x dx = \frac{1}{2} e^{x^2}.$$

Entonces

$$uv = (x^2) \left(\frac{1}{2} e^{x^2} \right) \text{ y } \int v du = \int \left(\frac{1}{2} e^{x^2} \right) (2x dx).$$

Aquí la integral $\int v du$ es más sencilla que la original, procedemos con el método:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du \Rightarrow \int (x^2) (e^{x^2} x dx) = \frac{1}{2} x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2} \int e^{x^2} (2x dx).$$

Ahora sólo nos resta integrar $\frac{1}{2} \int e^{x^2} (2x dx)$. Se procede así: $\frac{1}{2} \int e^{x^2} 2x dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$.

Reuniendo los resultados tenemos que:

$$\int (x^2) (e^{x^2} x dx) = \frac{1}{2} x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2} e^{x^2} + C.$$

b. Ya con las nociones recabadas en el inciso *a*, tomamos la pareja de este modo:

$$u = \ln x \text{ y } dv = 2x dx.$$

En consecuencia:

$$du = \frac{dx}{x} \text{ y } v = x^2.$$

Por lo que la integral resultante será:

$$\int u \cdot dv = \int (\ln x) (2x dx) = u \cdot v - \int v du = (\ln x) (x^2) - \int (x^2) \left(\frac{dx}{x} \right).$$

Finalmente se integra:

$$\int (x^2) \left(\frac{dx}{x} \right) = \int x dx = \frac{1}{2} x^2.$$

Entonces, la respuesta consta de:

$$\int 2x \ln(x) dx = x^2 \ln x - \frac{1}{2} x^2 + C.$$

Como indiqué antes, en ocasiones es necesario utilizar este método más de una vez con el fin de alcanzar la solución de la integral. Proporciono un ejemplo de esto.

Ejemplo

Integraremos $\int x^2 \cos(x) dx$ mediante el método por partes.

Para nuestra primera parte tomaremos:

$$u = x^2, dv = \cos(x) dx.$$

De donde:

$$du = 2x dx,$$

$$v = \int dv = \int \cos(x) dx = \text{sen } x.$$

Por lo tanto, la aplicación de la integración por partes indica que:

$$\begin{aligned} \int x^2 \cos(x) dx &= (x^2)(\text{sen } x) - \int (\text{sen } x)(2x dx) \\ &= x^2 \text{sen } x - 2 \int x \text{sen}(x) dx \quad \dots (1) \end{aligned}$$

Nos falta integrar $\int x \text{sen}(x) dx$, pero para este propósito hemos de usar de nuevo la integración por partes. De modo que en este último caso proponemos:

$$u = x \text{ y } dv = \text{sen}(x) dx.$$

Así que:

$$du = dx \text{ y } v = -\cos(x).$$

Contemplando la integral $\int x \text{sen}(x) dx$ se tiene la relación de integración por partes de esta forma:

$$\begin{aligned} \int x \text{sen}(x) dx &= (x)(-\cos(x)) - \int -\cos(x) dx \\ &= -x \cos x + \int \cos(x) dx \\ &= -x \cos x + \text{sen } x. \end{aligned}$$

Teniendo esta solución la procedemos a colocar en la integral inicial (1), por lo cual se obtendrá:

$$\begin{aligned} \int x^2 \cos(x) dx &= x^2 \text{sen } x - 2 \int x \text{sen}(x) dx \\ &= x^2 \text{sen } x - 2[-x \cos x + \text{sen } x] + C. \end{aligned}$$

Más específicamente, la solución final del ejemplo será:

$$\begin{aligned}\int x^2 \cos(x) dx &= x^2 \operatorname{sen} x - 2 \int x \operatorname{sen}(x) dx \\ &= x^2 \operatorname{sen} x - 2[-x \cos x + \operatorname{sen} x] + C.\end{aligned}$$

Con el uso de este método podremos distribuir la integración al escoger de forma apropiada los elementos u y dv de la integral.

Entre las aplicaciones más resaltables de la integración por partes se incluyen las:

- Que posean diferenciales de productos
- Que posean diferenciales con logaritmos

Te propongo realices la siguiente actividad respecto a este método.

Actividad de aprendizaje 2

◀ Realiza lo que se pide.

1. Resuelve por el método de integración por partes, las siguientes integrales indefinidas.

a. $\int x \cot x \csc x dx$ b. $\int x^2 e^x dx$ c. $\int \ln(x^2 + 1) dx$ d. $\int \ln 5x dx$ e. $\int x \cos x dx$

2. En tercias y con la dirección apropiada de tu docente utilicen la integración por partes las veces que se requiera para señalar que efectivamente la integral siguiente tiene el resultado mostrado:

$$\int e^{ax} \operatorname{sen}(nx) dx = \frac{e^{ax} [a \operatorname{sen}(nx) - n \cos(nx)]}{a^2 + n^2} + C.$$

◀ Tras concluir con su resultado de la tercia, comparen con la de los demás compañeros de manera que puedan sugerirse mutuamente los procesos que se realizaron, así como del manejo aritmético empleado en tales procesos.

Integral de funciones logarítmicas

Dentro de las funciones trascendentes, tenemos las llamadas logarítmicas, las cuales, como recordarás, nos permiten determinar el exponente, al que debemos elevar cierta base, para obtener un número determinado, de hecho, la definición del logaritmo de un número así lo señala.

El logaritmo de la base a de un número b , es igual al exponente al que debemos elevar dicha base para obtener el número, esto es:

$$\text{si } \log_b a = x, \text{ entonces } b^x = a.$$

Donde b , es la base del logaritmo, a es el argumento y x es el valor de dicho logaritmo. En cursos pasados, seguramente estudiaste el comportamiento de funciones logarítmicas, sus propiedades, características y principios.

Además, cuando la base del logaritmo es el número e , a este logaritmo se le llama logaritmo natural, y se escribe $\log_e a = \ln a$. Éstos son los que trabajaremos.

El presente apartado, tiene como objetivo, el que desarrolles los saberes necesarios para integrar funciones de este tipo. Para ello, es importante que conozcas lo siguiente; primero los teoremas de derivación e integración de funciones logarítmicas y luego las técnicas a emplear en situaciones que los incluyen.

Si u es una función diferenciable y se tiene que $u(x) > 0$, entonces

$$D_x \ln(u) = \frac{1}{u} D_x u.$$

El teorema anterior, será de mucha utilidad, en el trabajo de integración de funciones logarítmicas.

En el caso del proceso de integración, se pueden presentar, aquellos que generan expresiones con logaritmos, o integrandos que incluyen expresiones logarítmicas.

En cuanto a las primeras, tenemos ya una gama de teoremas que hemos empleado en secciones anteriores, estos son:

- $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
- Sea a un número positivo distinto de 1, entonces $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$.
- $\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$
- $\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$
- $\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$
- $\int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$
- $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$
- $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$

Para saber más

Propiedades de los logaritmos

Sean a y c reales y b diferente de cero:

$$\log(a \cdot b) = \log a + \log b$$

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$$

$$\log a^c = c \cdot \log a$$

$$\log_a a = 1$$

- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|+C$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C$
- $\int \sqrt{x^2+a^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|+C$
- $\int \sqrt{x^2-a^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C$

Para practicar el uso de las propiedades de los logaritmos y de teoremas de derivación puedes probar algunos de los teoremas previos.

Los segundos elementos que debemos vamos a observar, son aquellas integrales que incluyen expresiones logarítmicas. Observa los ejemplos.

Ejemplo

Integraremos $\int \ln x dx$.

Para ello, no contamos con un teorema específico, por lo tanto, empleamos una técnica que nos permita transformar el integrando, esto se hará por partes, así:

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int \frac{1}{x} x dx, \text{ donde } u = \ln x \text{ y } dv = dx, \text{ luego}$$

$$\int \ln x dx = x \ln x - x + c = x(\ln x - 1) + c.$$

De modo similar, podemos realizar otras integrales con integrandos y circunstancias similares.

Ejemplo

Ahora integraremos $\int \cos x \ln(\sin x) dx$.

Procedemos de modo similar; con un paso adicional, ya que la derivada de la función $\sin x$, es precisamente el producto de $\cos x dx$, así:

$$\int \cos x \ln(\sin x) dx, \text{ aquí aplicamos un cambio de variable, haciendo } m = \sin x, dm = \cos x dx,$$

$$\int \cos x \ln(\sin x) dx = \int \ln m dm, \text{ luego aplicando integración por partes, se tiene,}$$

$$\int \cos x \ln(\sin x) dx = m \ln m - m + c, \text{ sustituyendo}$$

$$\int \cos x \ln(\sin x) dx = \sin x \ln(\sin x) - \sin x + c = \sin x(\ln(\sin x) - 1) + c.$$

Podemos encontrar, otro tipo de expresiones con logaritmos en el integrando, que pueden resolverse, empleando los teoremas que hemos visto con anterioridad.

Ejemplo

Integraremos $\int \frac{\ln x}{x} dx$.

En este caso, bastará con identificar la derivada de la función $\ln x$, de la forma:

$$\int \frac{\ln x}{x} dx, \text{ haciendo } u = \ln x, du = \frac{1}{x} dx$$

$$\int \frac{\ln x}{x} = \int u du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{\ln^2 x}{2} + c.$$

Será necesario, ir trabajando con más integrales de este tipo, para ir mejorando en la identificación de elementos que te permitan, contribuciones personales a la metodología que debes generar, para resolver integrales de cualquier tipo.

Actividad de aprendizaje 3

◀ Realiza lo que se pide.

- Investiga acerca de la propiedad de logaritmo para cambio de base, y comenta la forma en que puede emplearse, para resolver las siguientes integrales.

a. $\int \log_2 x dx$

b. $\int \frac{\log_5 x}{x} dx$

- Resuelve las siguientes integrales

a. $\int \tan 5x dx$

b. $\int \sec 2x dx$

c. $\int x^2 \ln x^3 dx$

d. $\int \frac{dx}{\cos 3x}$

e. $\int \frac{2x}{x^2+3} dx$

f. $\int \frac{2x+2}{(x+1)^2} dx$

g. $\int \frac{2+\ln^2 x}{x(1-\ln x)} dx$

h. $\int \frac{\text{sen}(\ln x)}{x} dx$

i. $\int \sec^2 x \ln(\tan x) dx$

j. $\int \log_{10} x^5 dx$

Integral de funciones exponenciales

En el presente apartado, trabajaremos con la función inversa al logaritmo natural de x , la cual de hecho existe, ya que la función logaritmo natural de x es estrictamente creciente en todo su dominio; de hecho, dicha función inversa, es también creciente en todo su dominio.

A dicha función le llamamos, exponencial natural, la cual se define,

$$y = \exp(x) \text{ siempre que } x = \ln y,$$

y se lee como, y es igual a la exponencial de x . Es importante hacer notar el hecho, de que, dicha función es trascendente, y que la variable se aloja como un exponente, lo cual rebasa, a las operaciones algebraicas básicas.

Seguramente, en cursos anteriores trabajaste con dicha función, y para fines del apartado, es necesario recordar las siguientes propiedades y teoremas, aplicables a la exponencial natural.

1. $\ln(\exp(x)) = x$
2. $\exp(\ln(x)) = x$
3. $e = \exp(1)$
4. $\ln(e) = 1$
5. $\exp(x) = e^x$
6. $\ln(e^x) = x$

Adicionalmente, recordemos los teoremas para derivar funciones de este tipo.

$$\text{Si } y = e^x, \text{ entonces } y' = e^x dx.$$

$$\text{Si } y = a^x, \text{ entonces } y' = a^x \ln(a) dx.$$

Además, tenemos las proposiciones para integrales que incluyen funciones de este tipo.

- Sea a un número positivo distinto de 1, entonces $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$.
- $\int e^x dx = e^x + C$

Es importante hacer notar, que como en el caso de las integrales que incluyen funciones logarítmicas, aquellas que incluyen funciones exponenciales son susceptibles de aplicación de otras técnicas de integración. Observa los ejemplos.

Ejemplo

Integraremos $\int 2xe^{x^2} dx$.

En este caso, bastará con hacer un cambio de variable y emplear el teorema correspondiente:

$$\int 2xe^{x^2} dx, \text{ sea } u = x^2, du = 2x dx, \text{ así}$$
$$\int 2xe^{x^2} dx = \int e^u du = e^u + c = e^{x^2} + c.$$

Ejemplo

Integraremos $\int 5^x dx$.

En este caso, podemos hacer uso del teorema correspondiente y tener,

$$\int 5^x dx = \frac{5^x}{\ln 5} + c.$$

Sin embargo, también podemos proceder como sigue,

Hagamos $u = 5^x$, $\ln u = \ln 5^x$

Empleando propiedades del logaritmo, tenemos

$\ln u = x \ln 5$, derivando, $\frac{1}{u} du = \ln 5 dx$,

$$\int 5^x dx = \int u \frac{1}{\ln 5(u)} du = \frac{1}{\ln 5} \int du = \frac{1}{\ln 5} u + C$$

$$\int 5^x dx = \frac{5^x}{\ln 5} + C$$

Actividad de aprendizaje 4

◀ Resuelve las integrales.

1. $\int \sqrt{3^x} dx$ 2. $\int \sec x \tan x e^{\sec x} dx$ 3. $\int x^2 8^{x^3} dx$ 4. $\int \frac{2^{\ln x^{-1}}}{x} dx$ 5. $\int e^x \ln x dx$

6. $\int 10^{x^2+2x+1} (2x+2) dx$ 7. $\int e^{x^2} dx$ 8. $\int \frac{e^x + 1}{e^x - 1} dx$ 9. $\int e^x 3^{e^x} dx$ 10. $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$

Técnicas de integración con funciones trigonométricas

En esta sección, abordaremos integrandos que presentan expresiones, de varios tipos, entre las que encontramos:

- Funciones trigonométricas
- Funciones algebraicas, que pueden reemplazarse por una expresión trigonométrica

En ambos casos, es importante considerar, los teoremas relativos a integrales de funciones trigonométricas, revisados en el parcial anterior. Iniciemos con las primeras expresiones, recordando que, la técnica no resuelve la integral como tal, sino que, nos permite cambiar el integrando por uno que se puede ajustar, a alguno de los teoremas básicos.

Integración de potencias de funciones trigonométricas

No es igual de fácil integrar una expresión de la forma $\int \cos(4x) dx$ como una expresión de la forma $\int \cos^3(4x) \cdot \sin^2(4x) dx$, ya que en la primera podremos utilizar la integración directa pero en la segunda no parece ser tan obvia qué teorema de integración emplear o cuál camino tomar si la deseamos realizar por el método de integración por partes.

Por ello es necesario adentrarnos a una forma diferente de resolver una integral que incluye las potencias de las funciones trigonométricas. El sentido de este método consiste en transformar la integral a integrales inmediatas con el empleo de las identidades trigonométricas básicas.

Algunas de las identidades trigonométricas básicas utilizadas serán:

- $\text{sen}^2(x) + \text{cos}^2(x) = 1$
- $1 + \text{tan}^2(x) = \text{sec}^2(x)$
- $1 + \text{cot}^2(x) = \text{csc}^2(x)$
- $\text{sen}^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \text{cos}(2x))$
- $\text{cos}^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \text{cos}(2x))$
- $\text{sen}(x)\text{cos}(x) = \frac{1}{2}\text{sen}(2x)$
- $\text{sen}(x)\text{cos}(y) = \frac{1}{2}[\text{sen}(x - y) + \text{sen}(x + y)]$
- $\text{sen}(x)\text{sen}(y) = \frac{1}{2}[\text{cos}(x - y) - \text{cos}(x + y)]$
- $\text{cos}(x)\text{cos}(y) = \frac{1}{2}[\text{cos}(x - y) + \text{cos}(x + y)]$

Repasa el uso correcto así como los despejes de las identidades trigonométricas de forma que puedas exmplearlas correctamente en esta sección.

Para facilitar este método usaremos las reglas generales:

Caso uno. Para integrales de la forma $\int \text{sen}^m(u)\text{cos}^n(u)du$.

En el caso de que m o n sea entero positivo e impar se puede tomar cualquiera de la opciones.

Si m es impar, considerar $\text{sen}^m(u) = \text{sen}^{m-1}(u) \cdot \text{sen}(u)$ de manera que se debe expresar $\text{sen}^{m-1}(u)$ como una potencia de $\text{cos}^2(u)$ y así sustituirlo con la identidad $\text{sen}^2(u) = 1 - \text{cos}^2(u)$.

Análogamente, si n es impar, representar $\text{cos}^n(u) = \text{cos}^{n-1}(u) \cdot \text{cos}(u)$ para expresar $\text{cos}^{n-1}(u)$ como una potencia de $\text{sen}^2(u)$ y así sustituirlo con la identidad $\text{cos}^2(u) = 1 - \text{sen}^2(u)$.

Caso dos. Para integrales de la forma $\int \text{tan}^m(u)du$ o $\int \text{cot}^n(u)du$:

Si n es entero, escribir:

$$\text{tan}^m(u) = \text{tan}^{m-2}(u)\text{tan}^2(u) = \text{tan}^{m-2}(u)(\text{sec}^2(u) - 1) \text{ o}$$

$$\text{cot}^m(u) = \text{cot}^{m-2}(u)\text{cot}^2(u) = \text{cot}^{m-2}(u)(\text{csc}^2(u) - 1).$$

Caso tres. Para integrales de la forma $\int \text{tan}^m(u)\text{sec}^n(u)du$ o $\int \text{cot}^n(u)\text{csc}^n(u)du$.

Si n es entero positivo y par, entonces tomar:

$$\sec^n(u) = \sec^{n-2}(u)\sec^2(u) = (1 + \tan^2(u))^{\frac{n-2}{2}} \sec^2(u) \text{ o}$$

$$\csc^n(u) = \csc^{n-2}(u)\csc^2(u) = (1 + \cot^2(u))^{\frac{n-2}{2}} \csc^2(u).$$

Se recalca que estos casos se refieren a particularidades de integrales, ya que no todas se realizan o caen en el rango de estos tres casos sino que con la sustitución adecuada de las identidades trigonométricas pertinentes, se podrá obtener un mejor panorama de la integral. Sobre todo se pretende como parte de las competencias implícitamente que adquieras, con la práctica, la pericia de manejar estas expresiones, así como de las identidades trigonométricas.

Los ejemplos indicarán los pasos pertinentes en el uso de estas claves de integración de funciones trigonométricas con potencias.

Ejemplo

En cada inciso, integraremos las potencias de funciones trigonométricas:

- a. $\int \cos^2(4x) dx$
- b. $\int \sen^5(x) dx$
- c. $\int \sen^2(x)\cos^3(x) dx$
- d. $\int \sen^3(3x)\cos^5(3x) dx$
- e. $\int \tan^3(2x)\sec^4(2x) dx$
- f. $\int \sen(3x)\cos(2x) dx$

Ten presente los argumentos de las identidades para no causar conflictos al momento de su empleo en las integrales.

Recalcaremos las identidades utilizadas, así como los casos que resulten representados.

- a. En este caso no se puede integrar de forma directa, pero si realizamos la transformación por identidades trigonométricas, el panorama será más factible. Utilizaremos el hecho dado por la quinta identidad que recalqué al inicio de esta sección, a saber, que $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$. Analizándola, ésta se adaptaría del siguiente modo (tomando en cuenta que el argumento es $4x$):

$$\cos^2(4x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2(4x))) = \frac{1}{2}(1 + \cos(8x)).$$

De esta manera nuestro inciso quedará justificado como:

$$\int \cos^2(4x) dx = \int \frac{1}{2}(1 + \cos(8x)) dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos(8x) dx .$$

Llevando a cabo el ajuste en la diferencial dx de la segunda integral se obtendrá que:

$$\int \cos^2(4x) dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos(8x) dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} \int \cos(8x) 8 dx .$$

Así que hemos llegado a integrales que se pueden resolver con los métodos directos ya antes señalados en el bloque anterior.

$$\int \cos^2(4x) dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} \int \cos(8x) 8 dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{16} \sin(8x) + C .$$

- b.** Como en el caso 2, separamos en potencias cuadradas al factor $\text{sen}^2(x)$, es decir:

$$\int \text{sen}^5(x) dx = \int (\text{sen}^2(x))^2 \text{sen}(x) dx .$$

Ahora realizamos el cambio del factor $\text{sen}^2 x$ con la primera identidad trigonométrica y se logra:

$$\int \text{sen}^5(x) dx = \int (\text{sen}^2(x))^2 \text{sen}(x) dx = \int (1 - \cos^2(x))^2 \text{sen}(x) dx = \int (1 - 2\cos^2(x) + \cos^4(x)) \text{sen}(x) dx$$

Multiplicamos los factores y ordenamos de forma adecuada la expresión para visualizar el uso de la regla de fórmulas de integración elementales en donde resalta la regla de la cadena para integración:

$$\int \text{sen}^5(x) dx = \int \text{sen}(x) dx - 2 \int \cos^2(x) \text{sen}(x) dx + \int \cos^4(x) \text{sen}(x) dx .$$

Esto es:

$$\int \text{sen}^5(x) dx = -\cos x - \frac{2}{3} \cos^3(x) + \frac{1}{5} \cos^5(x) + C .$$

- c.** Se presenta a coseno con potencia impar de manera que se vislumbra el caso 1, en donde se reordena la potencia de coseno de la forma:

$$\begin{aligned} \int \text{sen}^2(x) \cos^3(x) dx &= \int \text{sen}^2(x) (\cos^2(x)) \cos(x) dx = \int \text{sen}^2(x) (1 - \text{sen}^2(x)) \cos(x) dx \\ &= \int \text{sen}^2(x) \cos(x) dx - \int \text{sen}^4(x) \cos(x) dx . \end{aligned}$$

Integrando por la regla de la cadena para integrales llegamos a la solución:

$$\int \text{sen}^2(x) \cos^3(x) dx = \frac{1}{3} \text{sen}^3(x) - \frac{1}{5} \text{sen}^5(x) + C .$$

- d.** Este presenta claramente el caso 1, pero con el hecho de poder realizar cualquiera de las conversiones trigonométricas señaladas (sólo una); de manera que al realizar cualquiera de ellas se obtiene una respuesta correcta aunque aparentemente no sean iguales. Realizaremos sólo una de tales opciones que nos aventaja este inciso con el caso 1.

Tomaremos la descomposición de la función seno, de manera que:

$$\int \operatorname{sen}^3(3x)\cos^5(3x)dx = \int (\operatorname{sen}^2(3x))\operatorname{sen}(3x)\cos^5(3x)dx = \int (1-\cos^2(3x))\operatorname{sen}(3x)\cos^5(3x)dx.$$

Realizando las operaciones correspondientes separamos las integrales de manera que se obtienen las formas directas de integración:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^3(3x)\cos^5(3x)dx &= \int \operatorname{sen}(3x)\cos^5(3x)dx - \int \operatorname{sen}(3x)\cos^7(3x)dx \\ &= -\frac{1}{3}\int \cos^5(3x)(-\operatorname{sen}(3x))3dx + \frac{1}{3}\int \cos^7(3x)(-\operatorname{sen}(3x))3dx.\end{aligned}$$

Integrando esto nos da la solución del problema:

$$\int \operatorname{sen}^3(3x)\cos^5(3x)dx = -\frac{1}{18}\cos^6(3x) + \frac{1}{24}\cos^8(3x) + C.$$

- e. Para este caso descomponemos la función secante de manera que surja una potencia cuadrada de ella y luego que realicemos posteriormente la sustitución correspondiente:

$$\int \tan^3(2x)\sec^4(2x)dx = \int \tan^3(2x)\sec^2(2x)(\sec^2(2x))dx = \int \tan^3(2x)\sec^2(2x)(1+\tan^2(2x))dx.$$

Reordenando los componentes de la última expresión e integrando se obtiene:

$$\begin{aligned}\int \tan^3(2x)\sec^4(2x)dx &= \frac{1}{2}\int \tan^3(2x)(\sec^2(2x)2dx) + \frac{1}{2}\int \tan^5(2x)(\sec^2(2x)2dx) \\ &= \frac{1}{8}\tan^4(2x) + \frac{1}{12}\tan^6(2x) + C.\end{aligned}$$

- f. En este caso no recae directamente en los casos vistos, sin embargo, podemos tomar la identidad trigonométrica $\operatorname{sen}(x)\cos(y) = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(x-y) + \operatorname{sen}(x+y)]$, ya vista anteriormente. De manera que el integrando de $\int \operatorname{sen}(3x)\cos(2x)dx$ podemos reordenarlo de este modo:

$$\int \operatorname{sen}(3x)\cos(2x)dx = \int \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(3x-2x) + \operatorname{sen}(3x+2x)]dx = \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}(x)dx + \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}(5x)dx.$$

Tomando los valores constantes pertinentes logramos que:

$$\int \operatorname{sen}(3x)\cos(2x)dx = \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}(x)dx + \frac{1}{10}\int \operatorname{sen}(5x)5dx = -\frac{1}{2}\cos(x) - \frac{1}{10}\cos(5x) + C.$$

Hasta aquí hemos observado sólo unos pequeños ejemplos de la aplicación de las técnicas de integración de potencias de funciones trigonométricas. Recalco lo que señalé al inicio de esta parte, que la práctica podrá darte los mejores elementos para hacerte diestro en el empleo de este método de integración cuando la situación lo requiera.

Integración por sustitución trigonométrica

Nuestro método final de integración se refiere a integrandos que poseen cualquiera de las siguientes expresiones con radicales cuadráticos: $\sqrt{a^2 - b^2x^2}$, $\sqrt{a^2 + b^2x^2}$ o $\sqrt{b^2x^2 - a^2}$, donde a y b son constantes.

Cálculo integral

Para ello se emplea una sustitución apropiada que posee elementos trigonométricos mediante un cambio de variable, de manera que se integra la expresión en estos términos trigonométricos para luego regresar la expresión integrada a su variable original. Se realiza este cambio de variable a expresiones trigonométricas con el fin de obtener una expresión más apropiada o sencilla para integrar con los métodos trigonométricos vistos.

La siguiente tabla nos dará un panorama de las expresiones a sustituir con un cambio de variable apropiado, así como su justificación trigonométrica.

Caso	Sustituir	Para obtener	Puesto que
$\sqrt{a^2 - b^2x^2}$	$x = \frac{a}{b} \operatorname{sen} z$	$\operatorname{acos}(z)$	
$\sqrt{a^2 + b^2x^2}$	$x = \frac{a}{b} \operatorname{tan} z$	$\operatorname{asec}(z)$	
$\sqrt{b^2x^2 - a^2}$	$x = \frac{a}{b} \operatorname{sec} z$	$\operatorname{atan}(z)$	

Esta tabla se comprende que al sustituir por ejemplo la expresión $x = \frac{a}{b} \operatorname{sen} z$ en $\sqrt{a^2 - b^2x^2}$ se obtendrá:

$$\sqrt{a^2 - b^2x^2} = \sqrt{a^2 - b^2\left(\frac{a}{b} \operatorname{sen} z\right)^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2(z)} = \sqrt{a^2(1 - \operatorname{sen}^2(z))} = \sqrt{a^2 \operatorname{cos}^2(z)} = a \operatorname{cos} z.$$

Es decir $\sqrt{a^2 - b^2 x^2} = a \cos z$ de donde $\cos z = \frac{\sqrt{a^2 - b^2 x^2}}{a}$ como se observa en el triángulo rectángulo. A partir de este último se pueden determinar las demás funciones trigonométricas para el ángulo z .

El método consiste como se indicó de forma implícita, en:

- hacer el cambio de variable obteniendo una relación trigonométrica en términos de z ,
- integrar la relación trigonométrica con los métodos vistos y
- regresar a la variable original x por medio del triángulo rectángulo pertinente.

Para aclarar dudas es necesario actuar con base en estos hechos teóricos a la metodología práctica. Para ello algunos ejemplos.

Ejemplo

Utiliza la sustitución de cambio de variable para integrar cada inciso.

$$\text{a. } \int (4-x^2)^{-\frac{3}{2}} dx \qquad \text{b. } \int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+9}} \qquad \text{c. } \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-4}}$$

Abarcaremos cada inciso que corresponde a cada uno de los 3 casos descritos en la tabla.

- a.** Aparentemente no se posee una expresión de la forma $\sqrt{a^2 - b^2 x^2}$. Pero tras un ajuste de las potencias convertidas a expresiones radicales se tiene:

$$\int (4-x^2)^{-\frac{3}{2}} dx = \int \frac{dx}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{dx}{(\sqrt{4-x^2})^3}.$$

En donde, para este caso las variables $a^2 = 4$ y $b^2 = 1$, o sea $a = 2$ y $b = 1$. Ya que estamos en el primer caso, es necesario tomar la sustitución $x = \frac{a}{b} \text{sen } z$, es decir: $x = 2 \text{sen } z$.

La tabla indica que el radical $\sqrt{4-x^2}$ nos dará $a \cos z$, o sea, $2 \cos z$.

Con esto nos fijamos en la integral que necesitamos sustituir los siguientes elementos: dx y $(\sqrt{4-x^2})^3$ de los cuales sólo nos resta calcular dx . Esto se halla al derivar $x = 2 \text{sen } z$, de donde:

$$dx = 2 \cos(z) dz.$$

Sustituyendo estos elementos en la integral la transformamos en:

$$\int (4-x^2)^{-\frac{3}{2}} dx = \int \frac{dx}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{dx}{(\sqrt{4-x^2})^3} = \int \frac{2 \cos(z) dz}{(2 \cos z)^3}.$$

Este integrando ya es de por sí de forma trigonométrica e involucra a la variable z . La reordenamos convenientemente e integramos:

$$\int (4-x^2)^{-\frac{3}{2}} dx = \int \frac{2\cos(z)dz}{(2\cos z)^3} = \int \frac{2\cos(z)dz}{8\cos^3(z)} = \frac{1}{4} \int \frac{dz}{\cos^2(z)} = \frac{1}{4} \int \sec^2(z) dz = \frac{1}{4} \tan z + C.$$

Una vez que integramos nos resta regresar la solución en términos de la variable original x . Esto se realiza apoyándonos en el triángulo rectángulo correspondiente.

La solución posee solamente la variable z en la expresión $\tan z$, por lo que este valor de tangente se analiza en el triángulo rectángulo de la tabla y se nota que:

$$\tan z = \frac{bx}{\sqrt{a^2 - b^2x^2}}.$$

De donde:

$$\tan z = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}.$$

Que sustituyéndolo en la solución de variable z llegamos a la solución con la variable original x .

$$\int (4-x^2)^{-\frac{3}{2}} dx = \frac{1}{4} \tan z + C = \frac{1}{4} \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} + C = \frac{x}{4\sqrt{4-x^2}} + C.$$

- b.** Claramente se trata del caso 2, pues la expresión $\sqrt{a^2 + b^2x^2}$ está presente. Aquí entonces se vislumbra que $a^2 = 9$ y que $b^2 = 4$, por lo que $a = 3$ y $b = 2$.

Con esto consideramos $x = \frac{a}{b} \tan z = \frac{3}{2} \tan z$.

Para obtener en vez del radical, la expresión $3\sec z$.

Ya que $dx = \frac{3}{2} \sec^2(z) dz$, entonces las sustituciones serán:

$$x = \frac{3}{2} \sec z, \quad dx = \frac{3}{2} \sec^2(z) dz \quad \text{y} \quad \sqrt{4x^2 + 9} = 3\sec z.$$

La integral se transforma en:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+9}} &= \int \frac{\frac{3}{2} \sec^2(z) dz}{\left(\frac{3}{2} \tan z\right)(3\sec z)} = \int \frac{\sec(z) dz}{3 \tan z} = \frac{1}{3} \int \frac{\frac{1}{\cos z}}{\frac{\sin z}{\cos z}} dz = \frac{1}{3} \int \frac{\cos z}{\sin(z)\cos(z)} dz \\ &= \frac{1}{3} \int \csc(z) dz = \frac{1}{3} \ln |\csc z - \cot z| + C. \end{aligned}$$

Ya determinada la integral sólo resta pasar a la variable original con el uso apropiado de $\csc z$ y $\cot z$ en el triángulo rectángulo correspondiente lo que nos aporta el siguiente resultado:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+9}} = \frac{1}{3} \ln |\csc z - \cot z| + C = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{\sqrt{9+4x^2}}{2x} - \frac{3}{2x} \right| + C.$$

- c. En este caso se utilizará el cambio $x = \frac{a}{b} \sec z$.

Claramente se nota que de $\sqrt{x^2-4}$ logramos obtener que $a = 2$ y $b = 1$, por lo que:

$$x = 2 \sec z, dx = 2 \sec(z) \tan(z) dz, \sqrt{x^2-4} = 2 \tan z.$$

Sustituyendo estos datos en la integral, ordenando e integrando se concluye que:

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-4}} = \int \frac{(2 \sec(z))^2 2 \sec(z) \tan(z) dz}{2 \tan(z)} = 4 \int \sec^2(z) dz = 4 \tan(z) + C.$$

Ahora regresando a la variable inicial con el triángulo respectivo notamos lo siguiente:

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-4}} = 4 \tan(z) + C = 4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{2} + C = 2\sqrt{x^2-4} + C.$$

Concluida la explicación del procedimiento necesario para la integración de este tipo de integrandos, llega el momento de que practiques las habilidades necesarias con su uso.

Actividad de aprendizaje 5

◀ Realiza lo que se pide.

1. Realiza la integración del inciso c de ejemplo anterior al realizar la sustitución $1 - \cos^2(3x)$ que se procede después de descomponer el factor coseno. Compara tu resultado con el obtenido en el ejemplo al descomponer el factor seno. En caso de que difiera tu respuesta con la previamente obtenida, ¿es signo de error en tu proceso de integración?, ¿por qué? Justifica tus respuestas de manera que puedas persuadir a tu docente sobre tu proceso de integración que realizaste.
2. Anteriormente te presentamos y utilizaste los teoremas 1.11.16, 1.11.18, 1.11.21 y 1.11.22. Utilizando el método de cambio de variable consigue llegar la demostración de tres de tales teoremas.

- ◀ Una vez concluidas tus demostraciones y cuando tu docente considere pertinente, compara tus conclusiones con las de tus compañeros para compartir sus experiencias y complementar su resultado.

Integración por fracciones parciales

Anteriormente te han provisto de los recursos necesarios para descomponer una fracción propia en sus fracciones parciales. Es aquí donde se observa la transversalidad de

Para saber más

Recuerda que una fracción propia es aquella en la que el grado del polinomio del numerador es menor al grado del polinomio del denominador.

Por el contrario una fracción impropia puede verse con la suma de un polinomio y una fracción propia, por ejemplo:

$$\frac{x^3}{x^2+1} = X - \frac{x}{x^2+1}.$$

las competencias genéricas en matemáticas, ya que estas se desarrollan en diferentes materias.

Manejaremos en esta sección con fracciones polinomiales propias y simplificadas.

Cabe recalcar que todo polinomio con coeficientes reales puede ser expresado como un producto de factores reales lineales de la forma $(ax + b)$ y factores cuadráticos irreducibles de la forma $(ax^2 + bx + c)$, dando a entender que un elemento cuadrático de la forma anterior es irreducible en el campo de los números reales si se cumple que $b^2 - 4ac < 0$.

Se observan entonces cuatro casos pertinentes según los factores del denominador. Por esto se tienen los siguientes casos:

Caso uno. Factores lineales distintos

Por cada factor lineal $(ax + b)$ que aparezca una sola vez en el denominador de la función racional propia le corresponde una sola fracción simple de la forma $\frac{A}{ax+b}$, en donde A es una constante por hallar.

Caso dos. Factores lineales repetidos

Por cada factor lineal $(ax + b)$ que aparezca n veces en el denominador de la función racional propia le corresponde una suma de n fracciones simples de la forma $\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \dots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$, en donde A_1, A_2, \dots y A_n son constantes por hallar.

Caso tres. Factores cuadráticos distintos

Por cada factor cuadrático irreducible en los reales $ax^2 + bx + c$ que aparezca una sola vez en el denominador de la función racional propia le corresponde una sola fracción simple de la forma $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$, donde A y B son constantes a determinar.

Caso cuatro. Factores cuadráticos repetidos

Por cada factor cuadrático irreducible en los reales $ax^2 + bx + c$ que aparezca n veces en el denominador de la función racional propia le corresponde una suma de fracciones simple de la forma $\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \dots + \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$, donde A_1, A_2, \dots y A_n , y B_1, B_2, \dots y B_n son constantes a determinar.

Pudieran preguntarse, ¿qué relación tiene el uso de las fracciones parciales con la integración? Esta relación se presenta porque la fracción polinómica original se descompone en fracciones simples que pueden ser integradas por los métodos convencionales ya vistos.

Siguiendo estas líneas es tiempo de remarcar un ejemplo que explore cada uno de los casos previstos. Cabe señalar desde ahora que me evitaré el desarrollo engorroso del álgebra.

Ejemplo

En cada inciso determina la integral solicitada usando las fracciones parciales.

a. $\int \frac{s+1}{s^3+s^2-6s} ds$ b. $\int \frac{t^4-t^3-t-1}{t^3-t^2} dt$ c. $\int \frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2} dx$ d. $\int \frac{x^5-x^4+4x^3-4x^2+8x-4}{(x^2+2)^3} dx$

En cada uno de los incisos nos evocaremos al beneficio de la descomposición en fracciones parciales y su relación con la integración, de manera que no nos detendremos tanto en el paisaje algebraico.

a. El denominador factorizado quedará de la siguiente manera:

$$s^3 + s^2 - 6s = s(s+3)(s-2).$$

De aquí las que las fracciones parciales pertenecen al caso 1, es decir:

$$\frac{s+1}{s^3+s^2-6s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+3} + \frac{C}{s-2}.$$

Ordenando los factores de esta igualdad obtendremos una serie de ecuaciones como sigue:

$$\begin{aligned} s+1 &= \frac{As(s+3)(s-2)}{s} + \frac{Bs(s+3)(s-2)}{s+3} + \frac{Cs(s+3)(s-2)}{s-2} \\ s+1 &= A(s+3)(s-2) + Bs(s-2) + Cs(s+3) \\ s+1 &= (A+B+C)s^2 + (A-2B+3C)s + (-6A). \end{aligned}$$

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ A-2B+3C=1 \\ -6A=1 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema presentado se obtienen los valores de las constantes $A = -\frac{1}{6}$, $B = -\frac{2}{15}$ y $C = \frac{3}{10}$, y así las fracciones quedarán en este orden:

$$\frac{s+1}{s^3+s^2-6s} = \frac{-\frac{1}{6}}{s} + \frac{-\frac{2}{15}}{s+3} + \frac{\frac{3}{10}}{s-2}.$$

La integración consecuente es:

$$\int \frac{s+1}{s^3+s^2-6s} ds = -\frac{1}{6} \int \frac{ds}{s} - \frac{2}{15} \int \frac{ds}{s+3} + \frac{3}{10} \int \frac{ds}{s-2} = -\frac{1}{6} \ln|s| - \frac{2}{15} \ln|s+3| + \frac{3}{10} \ln|s-2| + C.$$

b. Se presenta una fracción impropia que al dividir nos arroja el resultado siguiente:

$$\frac{t^4-t^3-t-1}{t^3-t^2} = t - \frac{t+1}{t^3-t^2}$$

La porción a trabajar e fracciones parciales consta de $\frac{t+1}{t^3-t^2}$ con factorización del denominador $t^3 - t^2 = t^2(t-1)$ que nos recae en el caso 2.

$$\frac{t+1}{t^3-t^2} = \frac{t+1}{t^2(t-1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{t-1}.$$

Que arroja la igualdad $t+1 = At(t-1) + B(t-1) + Ct^2$ y de aquí se forma el sistema:

$$\begin{cases} A+C=0 \\ -A+B=1 \\ -B=1 \end{cases}$$

Dándonos las soluciones $A = -2$, $B = -1$ y $C = 2$. Confirmando que el integrando se puede separar en fracciones parciales:

$$\int \frac{t^4 - t^3 - t - 1}{t^3 - t^2} dt = \int \left[t - \frac{t+1}{t^2(t-1)} \right] dt = \int \left[t - \left(\frac{-2}{t} - \frac{1}{t^2} + \frac{2}{t-1} \right) \right] dt = \int t dt + 2 \int \frac{dt}{t} + \int \frac{dt}{t^2} - 2 \int \frac{dt}{t-1}.$$

Resolviendo cada integral con los métodos ya vistos se concluye que:

$$\int \frac{t^4 - t^3 - t - 1}{t^3 - t^2} dt = \int t dt + 2 \int \frac{dt}{t} + \int \frac{dt}{t^2} - 2 \int \frac{dt}{t-1} = \frac{1}{2}t^2 + 2\ln|t| - t - 2\ln|t-1| + C.$$

- c. Factorizando el denominador se tiene que $x^4 + 3x^2 + 2 = (x^2 + 1)(x^2 + 2)$, notando que se trata claramente del caso 3. Entonces:

$$\frac{x^3 + x^2 + x + 2}{x^4 + 3x^2 + 2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+2}.$$

Agrupando esta igualdad se deduce el sistema:

$$\begin{cases} A+C=1 \\ B+D=1 \\ 2A+C=1 \\ 2B+D=2 \end{cases}$$

Cuyo resultado es $A = 0$, $B = 1$, $C = 1$ y $D = 0$. Con esto la integral se transforma en:

$$\int \frac{x^3 + x^2 + x + 2}{x^4 + 3x^2 + 2} dx = \int \frac{1}{x^2+1} dx + \int \frac{x}{x^2+2} dx.$$

Tomando los medios de integración vistos concluimos lo que se presenta a continuación:

$$\int \frac{x^3 + x^2 + x + 2}{x^4 + 3x^2 + 2} dx = \int \frac{1}{x^2+1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+2} dx = \arctan x + \frac{1}{2} \ln|x^2+2| + C.$$

d. Para este inciso del caso 4 tenemos:

$$\frac{x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x^2 + 2)^3} = \frac{Ax + B}{x^2 + 2} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 2)^2} + \frac{Ex + F}{(x^2 + 2)^3}.$$

Al realizar las operaciones pertinentes llegaremos a un sistema de ecuaciones como el siguiente:

$$\begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \\ 4A + C = 4 \\ 4B + D = -4 \\ 4A + 2C + E = 8 \\ 4B + 2D + F = -4 \end{cases}$$

Donde los valores alcanzados por este sistema son: $A = 0$, $B = -1$, $C = 0$, $D = 0$, $E = 4$ y $F = 0$. Así que nuestra integral será:

$$\int \frac{x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x^2 + 2)^3} dx = \int \frac{x-1}{x^2+2} dx + \int \frac{4x}{(x^2+2)^3} dx.$$

Ordenándolas apropiadamente podremos integrar cada una de estas fracciones parciales:

$$\begin{aligned} & \int \frac{x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x^2 + 2)^3} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 2} dx - \int \frac{dx}{x^2 + (\sqrt{2})^2} + 2 \int (x^2 + 2)^{-3} 2x dx \\ &= \frac{1}{2} \ln|x^2 + 2| - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - (x^2 + 2)^{-2} + C. \end{aligned}$$

Examinando estos ejemplos comprendemos el poder que las fracciones parciales le otorgan al cálculo integral en la integración de fracciones polinomiales propias.

Tras este análisis es conveniente entrar en el desarrollo de la siguiente actividad.

Actividad de aprendizaje 6

◀ Realiza lo que se pide.

1. Resuelve las siguientes integrales.

a. $\int \frac{2x+1}{x^2-4} dx$

b. $\int \frac{1-x}{x^3-1} dx$

c. $\int \frac{3x+7}{x^2-3x-4} dx$

d. $\int \frac{dx}{x^3+2x^2+x}$

e. $\int \frac{2dx}{2x^2+5x+2}$

f. $\int \frac{x^2+1}{3x^2-x-4} dx$

g. $\int \frac{x-1}{(x+1)(x^2+2x+2)} dx$

h. $\int \frac{2x-1}{x^3-x^2-2x} dx$

i. $\int \frac{3x^2}{x^2+x-6} dx$

j. $\int \frac{dx}{x^3-x^4}$

2. Determina la primitiva en cada caso, mencionando, al menos dos posibles formas de llegar a ella.

a. $\int \frac{du}{u^2 - a^2}$

b. $\int \frac{dx}{x^4 + x^2}$

c. $\int \frac{du}{1 - u^2}$

Evidencia de aprendizaje 1

De acuerdo con lo que planteamos en el proyecto inicial, una vez que se tenga descrita la metodología y los consensos se tomen en el grupo, realicen una investigación, de las formas en que podemos emplear software como Geogebra o Excel, para mostrar que la metodología, aplicada a algunos casos del parcial, funciona, en los términos para los que la crearon.

La actividad se realizará en equipos pequeños, y el profesor evaluará mediante una lista de cotejo el desempeño del equipo, aplicando un enfoque formativo.



Recurso digital

Aquí puedes encontrar el recurso interactivo “**El conflicto matemático del siglo XVII Parte 2**”, que continúa la historia relacionada con el inicio del cálculo infinitesimal.

Mas allá del cálculo diferencial

Posteriormente a Isaac Newton y Gottfried Wilhelm Leibniz, la humanidad siguió desarrollando teoría relacionada con los conceptos de cambio de posición y tiempo, llegando a conclusiones que pueden parecer fantásticas, pero que con los años se han demostrado.

Una de estas teorías fue la presentada por Albert Einstein en 1905: la teoría de la relatividad especial. Gracias a dicha teoría se llegó a comprender el universo y sus elementos de mejor manera, dando paso a descubrimientos increíbles: el microondas, el rayo láser, la nanotecnología,

el GPS, la energía nuclear, la televisión, las cámaras digitales, el refrigerador, el girocompás, el microchip y los viajes a través del tiempo.

Sí, los viajeros en el tiempo ya están entre nosotros. Los astronautas que habitan la Estación Espacial Internacional experimentan el paso del tiempo con mayor lentitud. A esa velocidad, el efecto es minúsculo, pero si aumentamos la velocidad, el efecto implica que algún día los seres humanos podrían viajar miles de años hacia el futuro.

Aplicando lo aprendido

- ◀ Llegó el momento de realizar una serie de situaciones que condensarán lo obtenido y desarrollado a lo largo de este parcial. Puedes apoyarte de los recursos vistos para cada planteamiento y obtención de la solución. No olvides escribir todos los procesos necesarios.
- ◀ En cada una de los incisos obtén la integral de manera que utilices los métodos vistos en esta sesión, así como los teoremas de integración que analizaste en el bloque anterior.

$$1. \int x \sec^2(3x) dx = \frac{1}{3} x \tan(3x) - \frac{1}{9} \ln |\cos(3x)| + C$$

$$2. \int x^2 \sqrt{1-x} dx = -\frac{2}{105} (1-x)^{\frac{3}{2}} (15x^2 + 12x + 8) + C$$

$$3. \int s^2 e^{-3s} ds = -\frac{1}{3} e^{-3s} \left(s^2 + \frac{2}{3} s + \frac{2}{9} \right) + C$$

$$4. \int \frac{t^2 dt}{t+1} = \frac{2}{15} (3t^2 - 4t + 8) \sqrt{t+1} + C$$

$$5. \int \sin(3x) \sin(x) dx = \sin^3(x) \cos(x) + C$$

$$6. \int e^{-t} \cos(\pi t) dt = \frac{e^{-t} [\pi \sin(\pi t) - \cos(\pi t)]}{\pi^2 + 1} + C$$

$$7. \int \sin^3(2x) dx = \frac{1}{24} \cos(6x) - \frac{3}{8} \cos(2x) + C$$

$$8. \int \cos^6\left(\frac{s}{2}\right) ds = \frac{5}{16} s + \frac{15}{32} \sin(s) + \frac{3}{32} \sin(2s) + \frac{1}{96} \sin(3s) + C$$

$$9. \int \sin^3(x) \cos^3(x) dx = -\frac{3}{64} \cos(2x) + \frac{1}{192} \cos(6x) + C$$

$$10. \int \sin(2x) \cos(4x) dx = \frac{1}{2} \cos^2(x) - \frac{1}{12} \cos(6x) + C$$

$$11. \int \frac{\cos^3(x) dx}{1 - \sin(x)} = \sin(x) - \frac{1}{4} \cos(2x) + C$$

$$12. \int \tan^3(3\alpha) \sec(3\alpha) d\alpha = \frac{1}{9} \sec^3(3\alpha) - \frac{1}{3} \sec(3\alpha) + C$$

$$13. \int \frac{dx}{x^2 - 9} = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x-3}{x+3} \right| + C$$

$$14. \int \frac{ds}{s^2 + 7s + 6} = \frac{1}{5} \ln \left| \frac{s+1}{s+6} \right| + C$$

$$15. \int \frac{x}{(x-2)^2} dx = \ln|x-2| - \frac{2}{x-2} + C$$

$$16. \int \frac{x^4}{(1-x)^3} dx = -\frac{1}{2}x^2 - 3x - 6\ln|x-1| - \frac{4}{1-x} + \frac{7}{2} + \frac{1}{2(x-1)^2} + C$$

$$17. \int \frac{2x^3 + x^2 + 4}{x^2 + 4} dx = x + x^2 - 4\ln|4 + x^2| + C$$

$$18. \int \frac{dt}{e^{2t} - 3e^t} = \frac{1}{3e^t} + \frac{1}{9} \ln \left| \frac{e^t - 3}{e^t} \right| + C$$

$$19. \int \frac{\sqrt{25-x^2}}{x} dx = \sqrt{25-x^2} - 5\ln|\sqrt{25-x^2} + 5| + \ln|x| + C$$

$$20. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2 x} + C$$

$$21. \int \frac{x^2 dx}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right) + C$$

$$22. \int \frac{s^2 ds}{\sqrt{s^2 - 16}} = \frac{s}{2} \sqrt{s^2 - 16} + 8\ln|s + \sqrt{s^2 - 16}| + C$$

$$23. \int t^3 \sqrt{a^2 - t^2} dt = -\frac{1}{15}(a^2 - t^2)^{\frac{3}{2}}(2a^2 + 3t^2) + C$$

$$24. \int \frac{d\alpha}{(4\alpha - \alpha^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\alpha - 2}{4\sqrt{4\alpha - \alpha^2}} + C$$

Presentación del proyecto

Organicen al grupo, y a otros grupos de la escuela que puedan interesarse en una explicación audiovisual de la solución de un ejercicio aplicando alguna técnica de integración (de preferencia utilizar algún software matemático como Geogebra o Excel para su explicación). La intención es demostrar que la metodología funciona y permite aplicar las distintas técnicas revisadas, para hacer más eficiente el proceso de integración.

Recuerda que entre algunas de las normas que debes seguir están las siguientes:

- El producto final se entrega y presenta el día y hora acordado con tu docente.
- Todos los integrantes del equipo deben participar y demostrar cuál ha sido la aportación en el mismo.
- Este trabajo será evaluado mediante la rúbrica correspondiente de acuerdo a la ponderación que hayan acordado con tu docente

He incorporado a mi saber

Rúbrica para la evaluación del proyecto

Nivel de logro o desempeño			
Inicial	Básico	Autónomo	Estratégico
Identifico los elementos que cada técnica de integración aporta al proceso de determinación de la primitiva de una función.	Aplico las técnicas de integración, para transformar integrandos, en otros que pueden relacionarse con los teoremas básicos de integración.	Determino la primitiva de una función, aplicando de un modo idóneo, las técnicas de integración.	Promuevo e indago en formas más eficientes para resolver integrales, empleando de modo idóneo, las diversas técnicas de integración.
Comprendo la necesidad de establecer un método que permita emplear de modo eficiente, las técnicas de integración estudiadas en el parcial.	Identifico elementos que nos permiten emplear las técnicas de integración, de un modo sistemático y pertinente.	Determino pasos concretos, que me permiten sistematizar las técnicas de integración de manera óptima, facilitando el proceso de integración.	Analizo la metodología elaborado, buscando mejorarla, para optimizar la forma en que pueden aplicarse las diversas técnicas de integración.
Identifico el uso que puede darse al software recomendado, para resolver integrales.	Empleo el software recomendado, para resolver integrales que requieren técnicas de integración.	Compruebo la aplicación de las técnicas de integración, empleando el software recomendado.	Muestro la forma en que el software recomendado, se emplea para resolver integrales y contrasto lo resultados obtenidos.

La siguiente rúbrica, te servirá para situarte en cuanto al logro de las competencias que se presentaron, como parte de las metas del parcial. Coloca tus logros y áreas de oportunidad.

Rúbrica de Logros y Áreas de Oportunidad de mis Competencias			
Tipo de Competencia	Competencia	Mis Logros	Mis Oportunidades
Genéricas	6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.		
Disciplinares	3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.		
	8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos		

Organizador para el portafolio de evidencias

Actividad de aprendizaje número	Evidencia o producto	No comprendió ni lo resolvió	Comprendió y resolvió parcialmente	Comprendió y resolvió de forma correcta y completa
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				

Autoevaluación

Mediante un análisis objetivo indica el nivel de logro obtenido a lo largo del viaje de este parcial de acuerdo a las competencias declaradas al inicio, así como del objetivo general. Apóyate de las siguientes preguntas, así como de la tabla que se te da posteriormente.

- ¿Cuáles son algunas de las competencias observé difíciles de desarrollar en este parcial?, ¿Por qué?
- ¿Qué logros se vieron truncados durante el desarrollo del parcial?
- ¿Qué mecanismos requieres promover para seguir las líneas de las competencias y/o objetivos establecidos?
- ¿En qué otras facetas de mi contexto podré emplear lo analizado a lo largo de este parcial?

Tercer parcial

Propósito general de la unidad de aprendizaje curricular

- Resolver problemas en contextos intra y extra-matemáticos mediante el uso del cálculo integral.

Contenidos del parcial

- Aplicaciones de la integración
- 14.** Área de una región plana
- 15.** Volúmenes de sólidos de revolución
- 16.** Longitud de una o dos curvas en el plano
- 17.** Aplicación de la integración en áreas como: física, economía y biología

Línea curricular

- Matemáticas

Componente formativo

- Propedéutico
- Ciencias exactas y naturales

Competencias genéricas

- Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas, a partir de métodos establecidos.
- Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.

Atributos

- Define metas y da seguimiento a sus procesos de construcción de conocimiento.
- Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.

Competencias disciplinares básicas

- Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
- Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.

Evidencias

- Solución de problemas donde se aplique el cálculo integral en áreas como: física, economía y biología.
- Elaboración de figuras geométricas en 3D, con las cuales los estudiantes explicarán en plenaria la obtención de su volumen aplicando integrales.

¿Qué vamos a aprender?

Llegamos a la parte final del camino en donde aplicaremos a problemas del contexto los teoremas fundamentales del cálculo así como de la interacción de la integración con diferentes áreas de conocimiento. Es decir, no solo abarcaremos la utilización del proceso de integración al cálculo de áreas de curvas sino que la aplicación se extenderá al cálculo volúmenes, longitudes de arco de curvas, centros de masa, etcétera.

La parte principal de este bloque radica en la evaluación de las integrales definidas. Es aquí donde estableceremos la conexión de los diferentes saberes recorridos en los parciales anteriores y también de los semestres que has cursado.

Recuerda que a lo largo de estos últimos dos semestres deberás de manifestar las competencias genéricas y disciplinares correspondientes, así que es oportuno recordarte que las consideres durante este último escalafón que estás por dar en el bachillerato.

¡Éxito en lo que hagas!

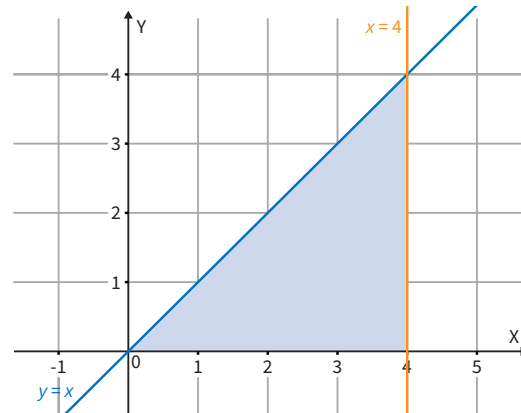


Evaluación diagnóstica

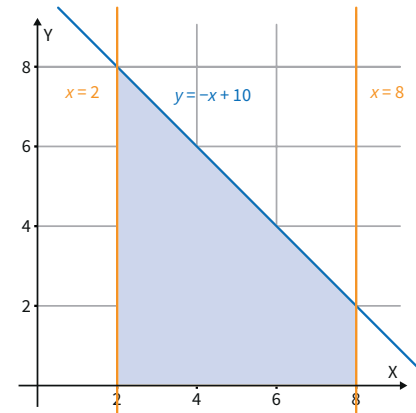
◀ En cada figura identifica lo siguiente con el fin de hallar el área sombreada:

- La función a integrar
- Los límites de integración
- Valor de la integral definida

1.



2.



◀ Utiliza la siguiente lista de cotejo con el objetivo de señalar cuál saber posees o cuál habrá que darle un poco más de énfasis.

Saber	Si	No	Observaciones
Distingo las funciones a integrar de acuerdo a la gráfica representada.			
Identifico los límites de integración de una función que esté representada gráficamente.			
Realizo la integración con los teoremas básicos.			
Aplico el teorema fundamental del cálculo en la determinación de áreas bajo la curva simples.			

Project

Project:	Other uses and volume of a solid of revolution around an oblique line.
Problem:	Search other uses of integrals as well as to know the way to calculate the volume of a solid of revolution around an oblique line.
Length:	(It is determined by the teacher).
Score:	(It is determined by the teacher).
Competences:	G5. Develops innovations and proposes solutions for problems from established methods. M2. Formulates and solves mathematical problems by applying different approaches.
Activities:	<p>It will be necessary that you meet in teams with the number of elements that your teacher considers optimal. From the project, you will be able to interpret different uses of integrals and you will also have to search about the way to calculate the volume of a solid of revolution that is obtained by turning a region of the plane around a line that is not parallel to any of the coordinate axes.</p> <p>Consider the following:</p> <p>The research about the uses of the definite integral and the fundamental theorem of calculus must be taken from trustworthy sources, because of this, the exposition will be presented in front of the class using PowerPoint. It is necessary that your research includes written and explained examples.</p> <p>Do not forget to point out the sources and examples. To demonstrate this process, determine the following volume:</p> <p>The region formed by $y = 9 - x^2$ $y = 4x + 33$ around the straight $4y = 4x + 33$.</p>
Resources:	Student's Book, bibliographic resources, electronic resources, material, projector.
Regulations:	<p>This work must be handed in on the date indicated by the teacher. In case a member of the team is missing, the solution will be provided by the teacher.</p> <p>If necessary, the teacher can add more regulations.</p>

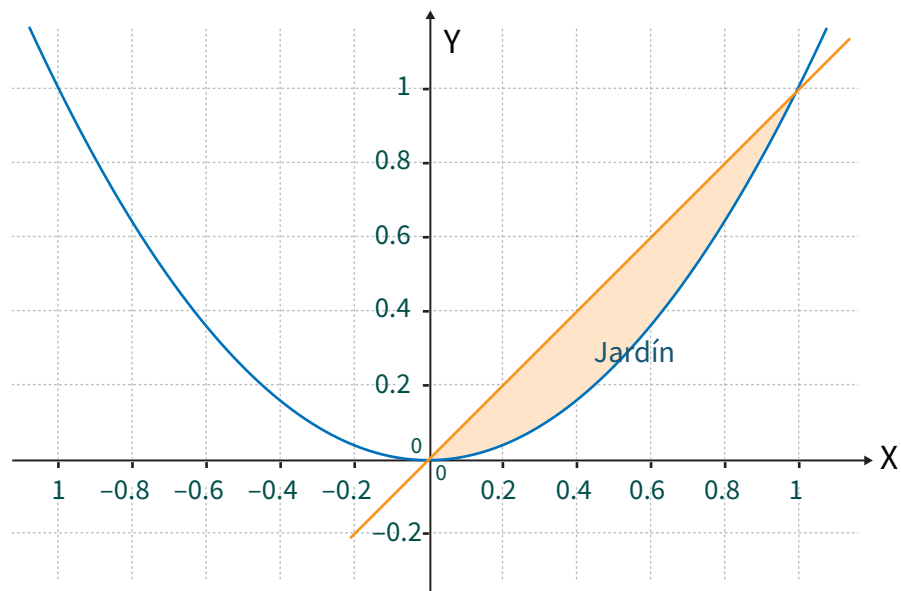


Aplicaciones de la integración

🔥 Actividad detonadora

◀ Para dar inicio consideremos la siguiente situación.

1. Un arquitecto está contemplando desarrollar un proyecto de plaza comercial en donde surge un jardín que tiene una forma muy especial, como se muestra en la imagen.



Vista aérea del jardín del proyecto arquitectónico.



Este arquitecto tiene la responsabilidad de hacerle saber al ingeniero de obra civil del proyecto, el área que contendrá esta jardinera. Algo curioso es que esta jardinera está acotada o delimitada por dos funciones conocidas. Desde el plano arquitectónico se desprende que, vista de la forma anterior, las funciones son $f(x) = x$ para la parte superior y recta; y $g(x) = x^2$ para la parte curva inferior.

Con estos datos el arquitecto se ve en la disyuntiva de cómo calcular el área de la región que ocupará esta jardinera en la obra.

◀ Para darle solución a esta situación:

Reúnete con un compañero para que exploren las posibles soluciones que se le pueden dar al arquitecto e ingeniero, si sólo conocen la aplicación del segundo teorema fundamental del cálculo. Expongan sus escritos y cálculos a tu docente con el fin de validarlos y que observe sus razonamientos. Tomen como escala 1:10 m.

Al final expongan sus interpretaciones, sugerencias y resultados del proceso que siguieron al momento de atacar esta problemática.

Área de una región plana

Previamente hemos considerado que el área A de una región plana comprendida por una curva $y = f(x)$, el eje X y las rectas $x = a$ y $x = b$ se puede determinar con una suma de Riemann que al hacer más pequeños las particiones, es decir, su límite hacia cero, entonces surgió que este límite de la suma de Riemann no es más ni menos que la integral definida $A = \int_a^b f(x)dx$.

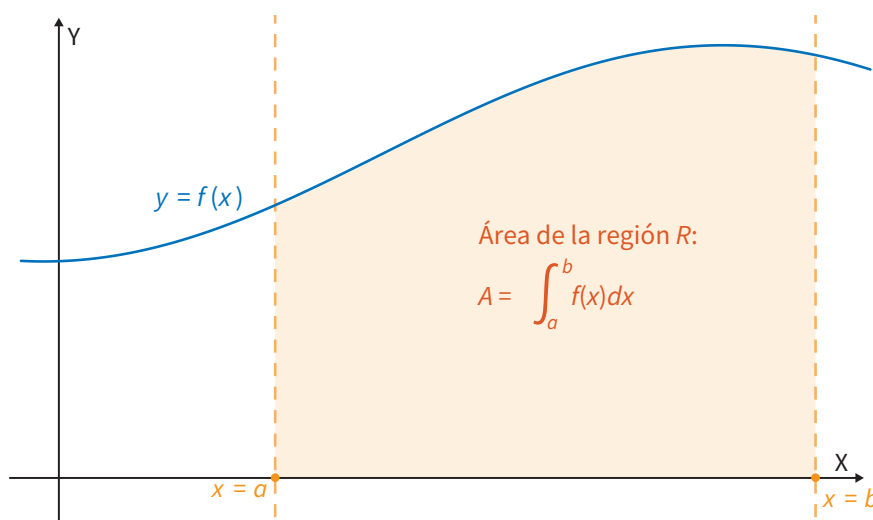


Figura 1.2

El área de la región se determina con la integral definida $A = \int_a^b f(x)dx$.

Áreas por integración y áreas entre curvas

Conforme fuimos avanzando en esta obra nos centrábamos cada vez más en que para una función $f(x) \geq 0$ el área de la región se determinaba por medio de la integral definida con los límites inferior y superior que las rectas del eje X nos determinaban, es decir,

$\int_a^b f(x)dx$ y el valor de esta integral es positivo. Sin embargo, también se tendrá el caso en que $f(x) \leq 0$, por lo tanto, se comprende que el valor de la integral será negativa, o sea $\int_a^b f(x)dx \leq 0$, así que si deseamos determinar el área de esta función que se halla debajo del eje X podemos realizar la integral $-\int_a^b f(x)dx$ con lo cual nos dará positiva.

Para saber más

Si en una integral definida hallamos un área que nos resulta negativa, esto señala que la región se halla debajo del eje X (si la variable es x) o se halla a la izquierda del eje Y (si la variable es y).

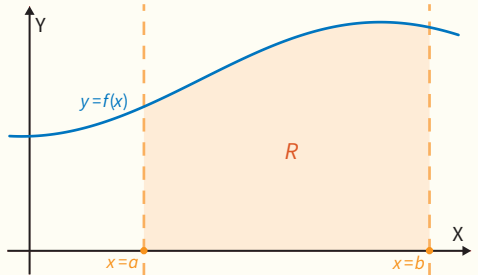
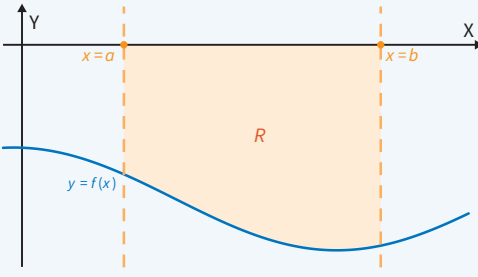
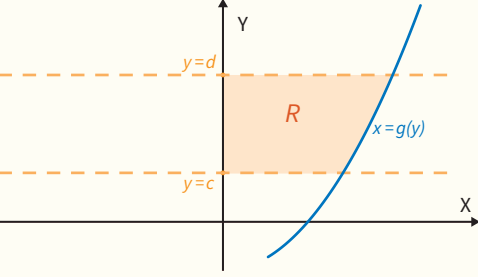
A su vez es posible que tengamos una función $x = g(y)$ al lado derecho del eje Y con los límites $y = c$ y $y = d$ con lo que su integral será $\int_c^d g(y)dy$. Ésta a su vez será positiva si se halla a la derecha del eje Y y negativa si se encuentra al lado izquierdo de este mismo eje.

Si la función respectiva cambia de signo en el intervalo descrito entonces el área correspondiente viene dado por la suma de dos o más integrales definidas.

Cuando nos topamos con regiones de áreas que resultan estar entre las curvas, continuas en $[a, b]$, $y = f(x)$ y $y = g(x)$, con $f(x) \geq g(x)$, y entre las rectas $x = a$ y $x = b$, éstas se determinan con la integral $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx$.

Por el contrario, si se constan de regiones que resulten estar entre las curvas, continuas en $[c, d]$, $x = f(y)$ y $x = g(y)$, con $f(y) \geq g(y)$, y entre las rectas $y = c$ y $y = d$, el área de estas regiones se determinan con la integral $\int_c^d [f(y) - g(y)]dy$.

Toda esta pequeña discusión la resumo en la siguiente tabla:

Región R	Gráfico	Fórmula
Comprendida por $y = f(x) \geq 0$ en $[a, b]$, el eje X y las rectas $x = a$ y $x = b$, con $f(x)$ continua en $[a, b]$.		$\int_a^b f(x)dx > 0$
Comprendida por $y = f(x) \leq 0$ en $[a, b]$, el eje X y las rectas $x = a$ y $x = b$, con $f(x)$ continua en $[a, b]$.		$-\int_a^b f(x)dx < 0$
Comprendida por $x = g(y) \geq 0$ en $[c, d]$, el eje Y y las rectas $y = c$ y $y = d$, con $g(y)$ continua en $[c, d]$.		$\int_c^d g(y)dy > 0$

Región R	Gráfico	Fórmula
Comprendida por $x = g(y) \leq 0$ en $[c, d]$, el eje Y y las rectas $y = c$ y $y = d$, con $g(y)$ continua en $[c, d]$.		$-\int_c^d g(y) dy < 0$
Comprendida por $y = f(x)$, $y = g(x)$, con $f(x) \geq g(x)$ en $[a, b]$, el eje X y las rectas $x = a$ y $x = b$, con $f(x)$ y $g(x)$ continuas en $[a, b]$.		$\int_a^b [f(x) - g(x)] dx$
Comprendida por $x = f(y)$, $x = g(y)$, con $f(y) \geq g(y)$ en $[c, d]$, el eje Y y las rectas $y = c$ y $y = d$, con $f(y)$ y $g(y)$ continuas en $[c, d]$.		$\int_c^d [f(y) - g(y)] dy$

Una vez que he señalado las diversas situaciones en donde podamos calcular áreas de regiones entre una o más gráficas de funciones podemos realizar un pequeño recuento de cómo usar estas fórmulas.

Para determinar la región de un área con las integrales definidas realizamos:

- Una representación gráfica donde se visualice la región en cuestión, esto incluyendo el intervalo que de manera explícita o implícita se describa. Este intervalo nos dará los límites inferior o superior para la integral definida.
- Dibujar un i -ésimo rectángulo de longitud Δx que llamaremos **franja vertical** (o Δy si el i -ésimo rectángulo tiene su base en el eje Y que llamaremos una **franja horizontal**).
- Suponer que el número de rectángulos crece indefinidamente para aplicar el segundo teorema fundamental del cálculo de la forma correspondiente de acuerdo a la tabla anterior.

Nota: para determinar el área de una región que por ejemplo corta al eje X , no necesariamente se ha de recurrir a los i -ésimos intervalos con base Δx o franjas verticales,

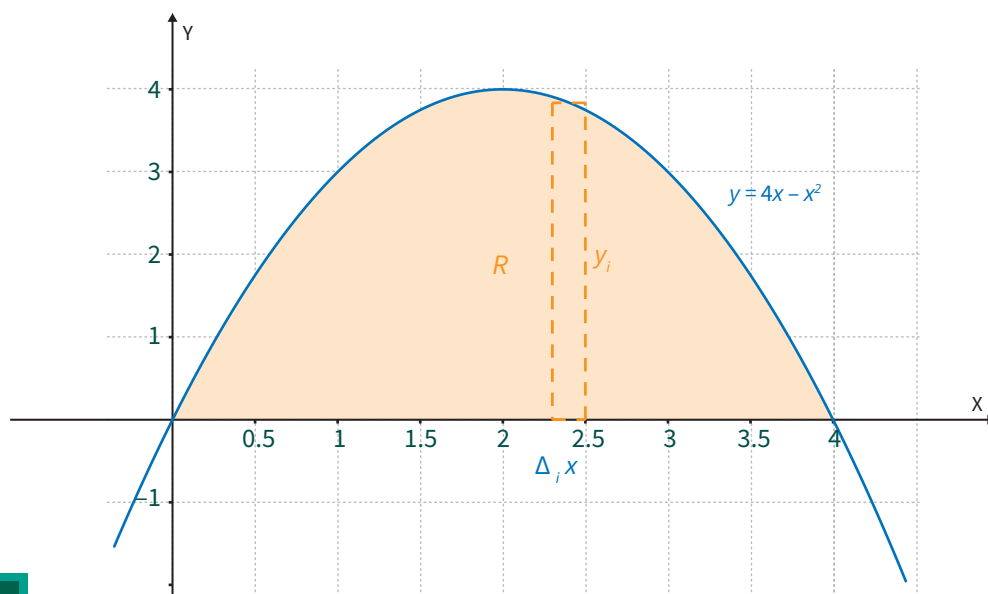
sino también en ocasiones, será posible hacerlo con i -ésimos intervalos de longitud Δy o franjas horizontales. Esto da a entender que una función de variable $y = f(x)$ puede integrarse de la forma $\int_c^d f^{-1}(y)dy$, donde $x = f^{-1}(y)$ es el despeje de la variable x en $y = f(x)$. Esto se señalará más adelante con un ejemplo.

Comencemos a realizar algunos cálculos de áreas para comprender y aplicar mejor estas ideas.

Ejemplo

Calcularemos el área de la región delimitada por la curva $y = 4x - x^2$ y el eje X .

Tenemos la representación de esta curva con sus respectivas intersecciones con el eje X que, al hacer $4x - x^2 = 0$, se obtiene que son $x = 0$ y $x = 4$.



Región delimitada por la curva $y = 4x - x^2$ y el eje X .

Estaremos trabajando con franjas verticales. Notamos que la altura del i -ésimo rectángulo representativo puede considerarse como y_i así que el rectángulo tendrá un área de $\Delta x \cdot y_i$ (base por altura), o sea $y_i \cdot \Delta x$. De modo que si tomamos el límite:

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n y_i \Delta_i x.$$

Pero como $y = 4x - x^2$, entonces el área de ese rectángulo será:

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n y_i \Delta_i x = \int_0^4 y dx = \int_0^4 (4x - x^2) dx.$$

En esta última integral definida se toman los límites inferior y superior como 0 y 4 respectivamente, puesto que en ese intervalo $[0, 4]$ se encuentra la región determinada.

Algo que te podrá servir como método de ubicación en estos casos será considerar que la altura del rectángulo representativo sea y o sea $4x - x^2$ y la base Δx que se “transforma” en dx en la integral definida, por ello esta última tiene la forma $\int_a^b (\text{altura})(\text{base}) = \int_a^b (y)(dx)$.

Prosiguiendo con la integral, esta resultará en lo siguiente de acuerdo al segundo teorema fundamental del cálculo:

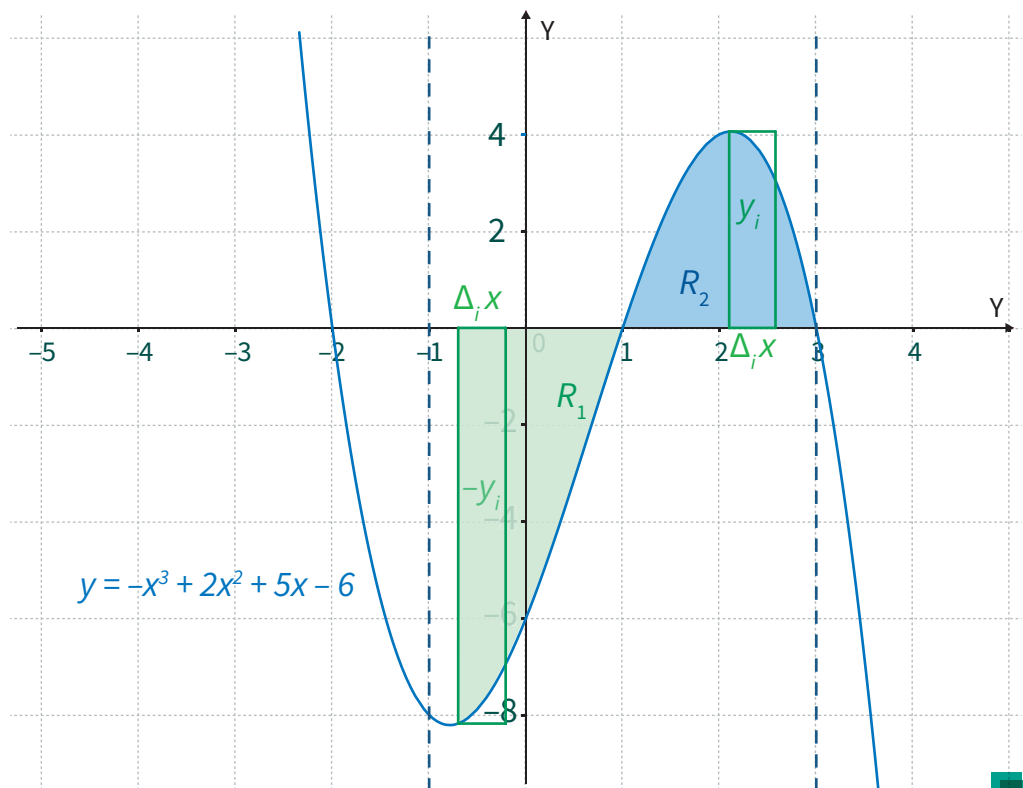
$$\int_0^4 (4x - x^2) dx = \left(2x^2 - \frac{x^3}{3}\right) \Big|_0^4 = \frac{32}{3}.$$

Por tanto el área de la región R será $\frac{32}{3}$.

Ejemplo

Hallaremos el área de la región limitada por la curva $y = -x^3 + 2x^2 + 5x - 6$, el eje X y las rectas $x = -1$ y $x = 3$.

Dibujemos la gráfica con las rectas pertinentes y los rectángulos representativos, ya que como se denotará, será necesario considerar dos regiones.



Representación de la curva $y = -x^3 + 2x^2 + 5x - 6$.

La gráfica muestra que en el intervalo $[-1, 1]$ se tiene $f(x) \leq 0$ y para $[1, 3]$ se contempla que $f(x) \geq 0$, por lo tanto, es necesario dividir la región total en dos regiones R_1 y R_2 , de donde se comprende que el área total A será la suma de las áreas A_1 y A_2 respectivas a las dos regiones descritas.

Para la región R_1 el valor de la altura del rectángulo representativo es $-y$; mientras que para la región R_2 será de y . Entonces las integrales correspondientes quedarán de esta manera:

$$A_1 = \int_{-1}^1 y \, dx = \int_{-1}^1 (-x^3 + 2x^2 + 5x - 6) \, dx,$$

$$A_2 = \int_1^3 y \, dx = \int_1^3 (-x^3 + 2x^2 + 5x - 6) \, dx.$$

Utilizando el segundo teorema fundamental del cálculo estas áreas serán:

$$A_1 = \int_{-1}^1 -(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) \, dx = -\left(\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x\right)\Big|_{-1}^1 = -\left(\frac{37}{12}\right) + \left(\frac{91}{12}\right) = -\frac{32}{3}.$$

$$A_2 = \int_1^3 (-x^3 + 2x^2 + 5x - 6) \, dx = \left(-\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 6x\right)\Big|_1^3 = \left(\frac{9}{4}\right) - \left(-\frac{37}{12}\right) = \frac{16}{3}.$$

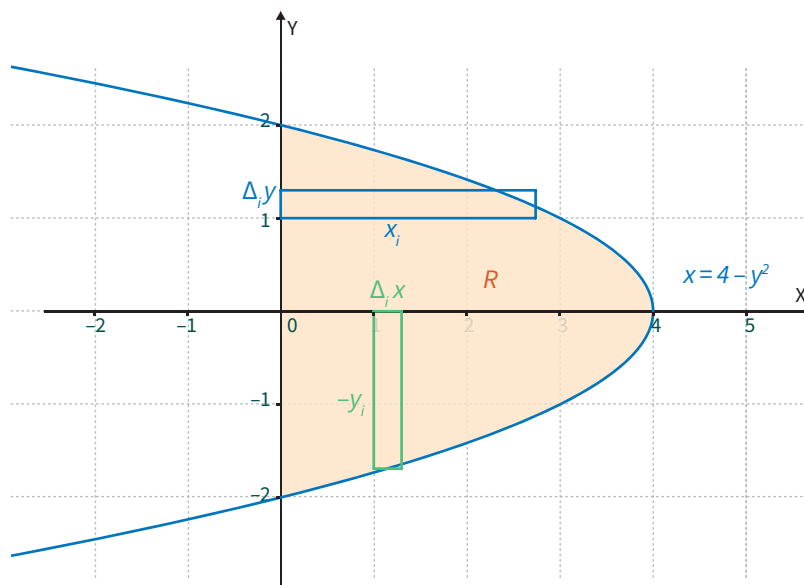
Entonces el área total es $A = A_1 + A_2 = -\frac{16}{3}$.

Ejemplo

Encontraremos el área acotada por la curva $x = 4 - y^2$ y el eje Y utilizando:

- Franjas verticales
- Franjas horizontales

Representaremos en primer lugar la región con sus rectángulos aproximantes para cada uno de los incisos.



Región acotada por la curva $x = 4 - y^2$ y el eje Y.

Notamos que la región es simétrica respecto al eje X, razón por la cual nos va a ahorrar unos pasos para determinar su área.

Considerando a x como variable independiente, la gráfica se compone de dos partes:

$$y = \sqrt{4-x}, \text{ para la parte superior del eje X y}$$

$$y = -\sqrt{4-x}, \text{ para la parte inferior del eje X.}$$

- a.** Debido a la simetría de esta región no es necesario determinar el área hallada en la parte superior del eje X y al mismo tiempo la que se encuentra en la parte inferior del mismo eje. Nos basta calcular cualquiera de ellas y multiplicar el resultado por dos. En esta ocasión vamos a hallar el área que se encuentra en la parte inferior del eje X, por lo tanto, la altura del rectángulo de base Δx será $-y_i$. Notamos también que el intervalo a considerar es $[0, 4]$ en el eje X.

El área está dada al considerar la función $-\sqrt{4-x}$:

$$A = 2 \int_0^4 -(y) dx = 2 \int_0^4 -(-\sqrt{4-x}) dx = 2 \int_0^4 (4-x)^{\frac{1}{2}} dx = \left[-\frac{4}{3}(4-x)^{\frac{3}{2}} \right]_0^4 = [0] - \left[-\frac{32}{3} \right] = \frac{32}{3}.$$

- b.** Para el caso de las franjas horizontales resulta más sencillo ya que al ser simétrica el intervalo $[-2, 2]$ en el eje Y puede resumirse al intervalo $[0, 2]$ y multiplicar por dos al resultado. Con esto la integral será:

$$A = \int_{-2}^2 x dy = 2 \int_0^2 (4-y^2) dy = \left(8y - \frac{2y^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \frac{32}{3}$$

Esto indica que cualquiera de los métodos empleados de manera correcta nos llevará a la solución buscada.

Ejemplo

Calcularemos el área de la región delimitada por las funciones $y^2 = 2x - 2$ y $y = x - 5$ con el uso de:

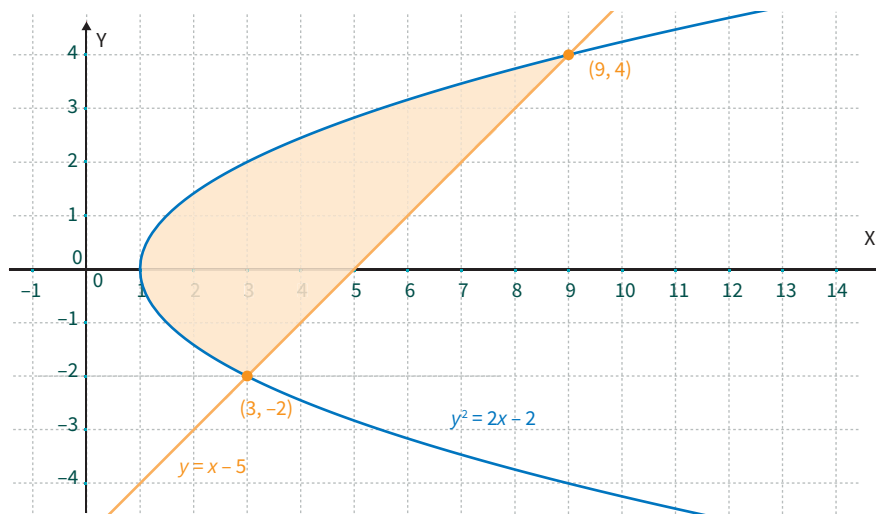
- a.** Franjas verticales
b. Franjas horizontales

En primer lugar determinamos las posibles intersecciones que tengan las funciones. Tras resolver el sistema de ecuaciones que se forma con estas dos, es decir, el sistema:

$$\begin{cases} y^2 = 2x - 2 \\ y = x - 5 \end{cases}$$

Se obtienen las soluciones $(9, 4)$ y $(3, -2)$.

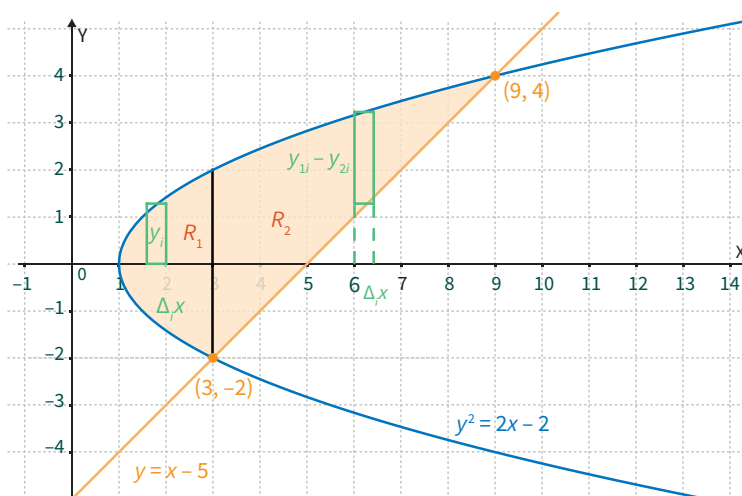
Cuando se comprende a la variable x como la variable independiente, la ecuación $y^2 = 2x - 2$ es equivalente a las ecuaciones $y = \sqrt{2x-2}$ y $y = -\sqrt{2x-2}$ las cuales corresponde a la parte superior e inferior al eje X respectivamente.



Región comprendida entre las funciones $y^2 = 2x - 2$ y $y = x - 5$.

- a. Al usar franjas verticales es necesario dividir la región en dos partes y observar que para la región R_1 la región es simétrica en el eje X, para el intervalo $[1, 3]$ razón por la cual solo obtendremos el área de la parte superior y multiplicamos por dos. Para el intervalo $[3, 9]$ tendremos una resta de funciones ya que su nombramos $y_1 = \sqrt{2x - 2}$ y $y_2 = x - 5$ entonces claramente la altura buscada para el rectángulo aproximante en este intervalo será $y_1 - y_2$.

Todo esto discutido se muestra en la figura:



Área de la región a determinar usando franjas verticales.

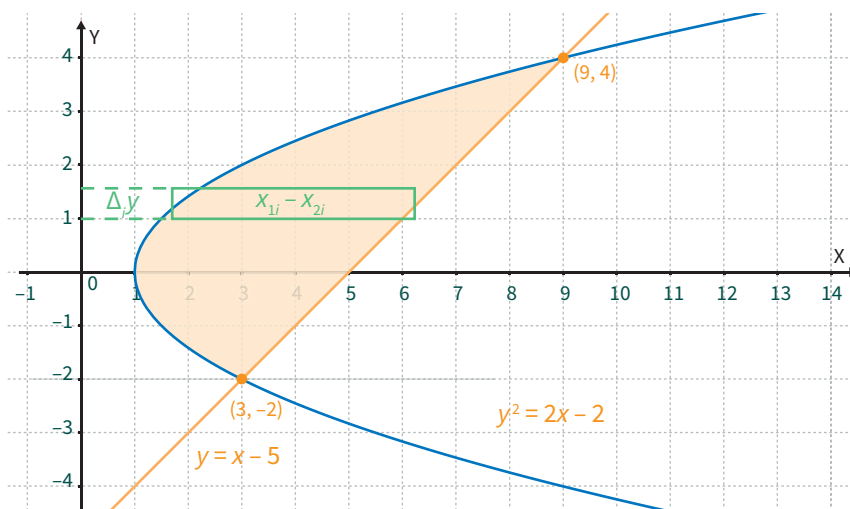
El área para cada región estará dada por:

$$A_1 = 2 \int_1^3 y \, dx = 2 \int_1^3 \sqrt{2x - 2} \, dx = \left[\frac{2}{3} (2x - 2)^{\frac{3}{2}} \right]_1^3 = \frac{16}{3}.$$

El área total de esta región comprendida entre estas dos ecuaciones es de $\frac{16}{3} + \frac{38}{3} = 18$.

$$A_2 = \int_3^9 (y_1 - y_2) dx = \int_3^9 [\sqrt{2x-2} - (x-5)] dx = \int_3^9 [\sqrt{2x-2} - x + 5] dx = \left[\frac{1}{3}(2x-2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^2 + 5x \right]_3^9 = \left(\frac{155}{6} \right) - \left(\frac{79}{6} \right) = \frac{38}{3}.$$

b. Para este caso la representación quedará de acuerdo a la figura:



Área de la región a determinar usando franjas horizontales.

Para saber más

La resta en el integrando $\int (y_1 - y_2) dx$ es equivalente a $\int [f(x) - g(x)] dx$ al considerar a las funciones $y_1 = f(x)$ y $y_2 = g(x)$.

Se trata de una sola región en el intervalo $[-2, 4]$ en el eje Y en donde la altura del rectángulo aproximante es la resta de las alturas de las funciones que denotaremos $x_1 = y + 5$ y $x_2 = \frac{1}{2}(y^2 + 2)$. Con esto el área se calcula así:

$$A = \int_{-2}^4 (x_1 - x_2) dy = \int_{-2}^4 [(y+5) - \frac{1}{2}(y^2+2)] dy = \left(\frac{y^2}{2} + 4y - \frac{y^3}{6} \right) \Big|_{-2}^4 = \left(\frac{40}{3} \right) - \left(\frac{-14}{3} \right) = 18.$$

Tras esto observamos que ambos métodos nos dan el mismo resultado.

La mejor arma para atacar las problemáticas de este tipo es la visualización del mejor trayecto para lograr el objetivo, ya que al notar los datos que se desprenden de la situación podremos dar inicio con el mecanismo de resolución óptimo.

Actividad de aprendizaje 1

◀ Realiza lo que se pide.

- En parejas retomen la actividad mencionada al inicio del parcial y que hablaba sobre el jardín. De manera que puedan determinar el área de la jardinera por medio de los métodos de las franjas verticales y franjas horizontales. Con el fin de comparar los procesos realiza la actividad usando uno de los métodos y que tu compañero lo resuelva con el otro método. Describan a la clase sus experiencias.
- En la siguiente serie de incisos se describen las rectas y curvas que delimitan una región en particular. Halla el área de tales regiones.
 - $y = x^2, x = 2, x = 5, y = 0$.
 - $y = \tan x, x = 0, x = \frac{\pi}{4}$.
 - $y = 2 - x^2, y = -x$.

d. $y = x^3, x = 1, x = 3, y = 0$.

e. $y = 9 - x^2, y = 3 + x$.

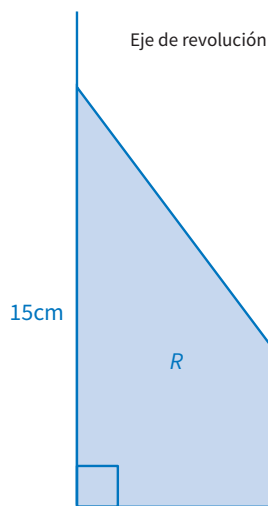
f. $x = 3y^2 - 9, y = 0, y = 1, x = 0$.

g. $x = y^2 + 4y, x = 0$.

- Halla el área acotada por la hipérbola $xy = a^2$, el eje X y las rectas $x = a$ y $x = 2a$.
- Calcula el área de la región limitada por la curva $y^3 = x^2$ y la cuerda que une los puntos $(8, 4)$ y $(-1, 1)$.
- Halla el área de la región delimitada por las gráficas de las funciones $y = x^3$ y $y = 2x - x^2$. Realiza el gráfico correspondiente.
- Un diseñador gráfico requiere determinar el área de una figura en forma de escudo, esta se encuentra delimitada por las funciones $2y^2 = x + 4$ y $x = 2y^2$. Realiza el gráfico correspondiente y halla el área que delimitan las funciones.
- Un carpintero requiere determinar el área de una pieza que delimitan las funciones $y = -x$ y $y = 2 + x^2$. Realiza el gráfico correspondiente y halla el área que delimitan las funciones.

Volúmenes de sólidos de revolución

Recorta un triángulo rectángulo en un cartoncillo con las medidas:



Triángulo rectángulo (región plana) con su eje de revolución.

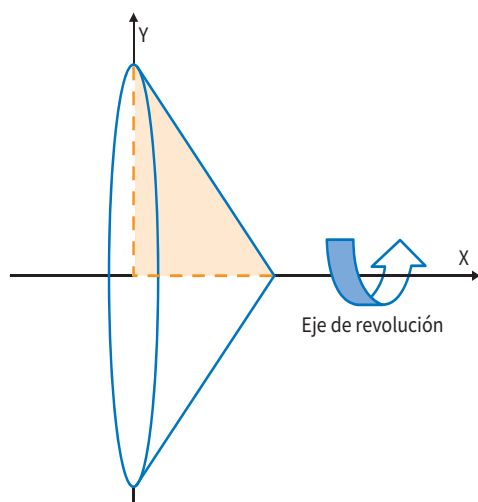
Ahora a este rectángulo, que representa una región plana, pégale una varillita en el cateto que tiene 15 cm de longitud, de forma tal que tenga un excedente de 10 cm aproximadamente. Coloca el excedente de la varilla entre tus palmas y procede a hacer girar esta región tomando como apoyo la varillita o lápiz, tal y como se señala en la figura anterior. Mientras se gira repetidas veces y de manera rápida este cartoncillo notarás algo. Responde:

- ¿Qué forma se observa?
- ¿Puede verse como un volumen?
- Si se tratase de un volumen, ¿cuál sería el volumen de esta forma?
- Si consideras una operación semejante con un semicírculo donde se coloca la varilla verticalmente en el diámetro de ésta, ¿qué forma o volumen se forma al girar la región?, ¿cuál será su volumen?
- Representa gráficamente los volúmenes que se observarían en ambos casos.

Esta actividad nos sugiere que al girar regiones o áreas planas bajo ciertos ejes de rotación podremos generar ciertos volúmenes, por ello para iniciar la parte conceptual de esta sección se define lo que compone un sólido de revolución.

Definición. Un **sólido de revolución**, es un sólido que se genera al girar una región plana en torno a una recta del mismo plano, esta recta se llama **eje de rotación** o **eje de revolución** y puede intersectar o no a la región.

Por ejemplo, si hacemos girar el triángulo rectángulo anterior de forma vertical en torno al cateto menor, podremos observar un sólido de revolución como el siguiente (vamos a considerar el cateto menor como el eje X positivo y el cateto mayor el eje Y):

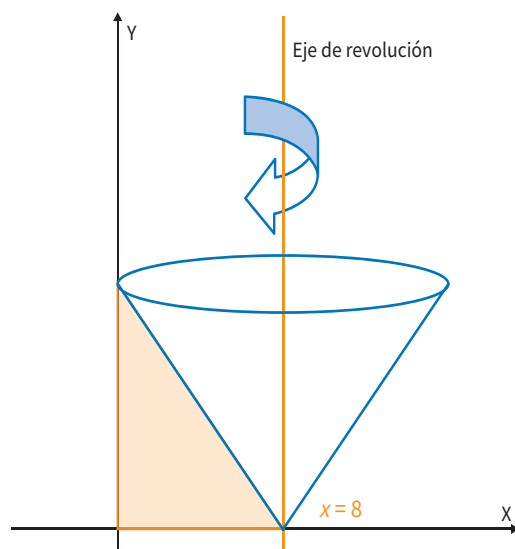


Sólido de revolución cuyo eje de revolución es el cateto menor.

Para saber más

En esta obra emplearemos como ejes de revolución líneas verticales u horizontales. No trataremos las líneas oblicuas como estos ejes.

Sin embargo, si el eje de rotación es la recta vertical paralela al cateto mayor que y que pasa por el ángulo agudo del cateto menor (recta $x = 8$), entonces generaremos un sólido de revolución como se presenta en la figura:



Sólido de revolución cuyo eje es la recta $x = 8$.

Los sólidos de revolución pueden ser generados en diferentes casos, estos son cuando:

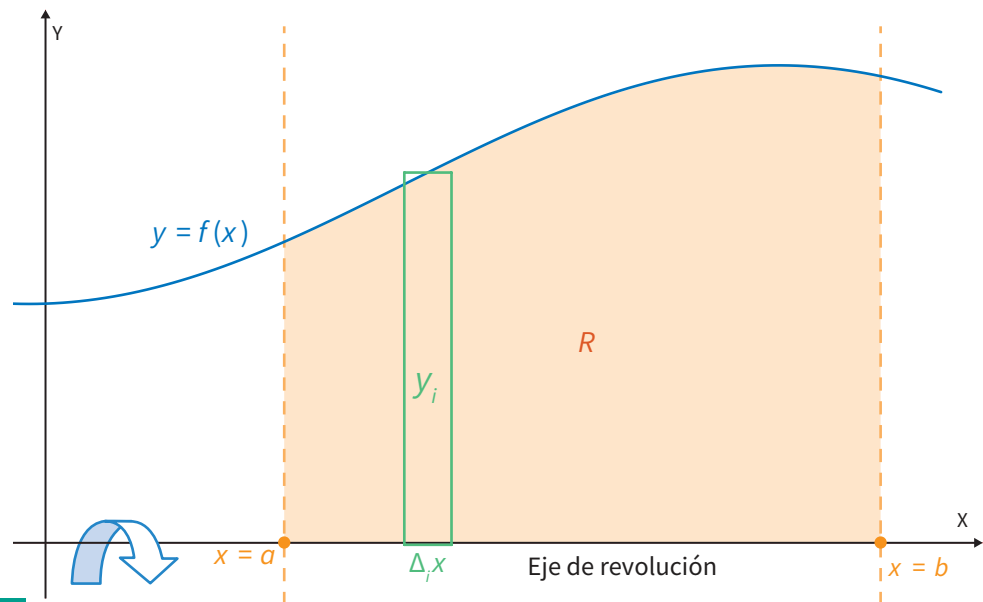
- El eje de revolución forma parte del contorno de la región.
- El eje de revolución no es parte del contorno de la región.

Para determinar de forma exacta el volumen de un sólido de revolución se recurren a métodos específicos que se describen a continuación.

Método de los discos

Este se utiliza cuando el eje de revolución forma parte del contorno de la región y se emplean los pasos:

- Trazar un diagrama indicando el área de la región así como un i -ésimo rectángulo representativo perpendicular al eje de rotación.
- Determinar el volumen del disco producido por la rotación del i -ésimo rectángulo entorno al eje de rotación y la sumar de los n rectángulos de la partición.
- Aplicar el segundo teorema fundamental del cálculo al suponer que los el número de intervalos crece indefinidamente.



Se presenta un ejemplo cuando el eje de revolución forma parte de la región R .

De este modo cuando el eje de revolución o rotación es el eje X y la frontera superior de la región está dada por la curva $y = f(x)$ en el intervalo $[a, b]$, entonces el volumen V del sólido de revolución viene dado por la relación:

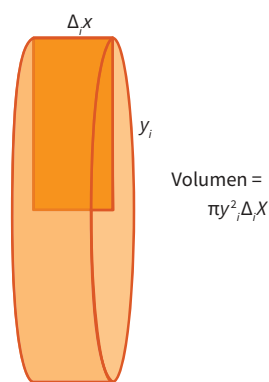
$$V = \int_a^b \pi y^2 dx = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

El valor de π aparece en esta relación ya que si hacemos girar el rectángulo aproximante de altura y_i y base Δx_i entorno a su base (eje X) entonces se generará un cilindro de

altura y_i y área de su base igual a π por radio al cuadrado, es decir, πy_i^2 así que el volumen de este cilindro está dado por $\pi y_i^2 \Delta x$, si tomamos la suma de estos cilindros y hacemos que el número de los rectángulos crezca indefinidamente, se logra llegar a la relación.

De forma similar cuando el eje de revolución es el eje Y, además un lado de la región está dada por la curva $x = g(y)$ en el intervalo $[c, d]$, entonces el volumen del sólido revolución estará dado por:

$$V = \int_c^d \pi x^2 dy = \pi \int_c^d [g(y)]^2 dy.$$

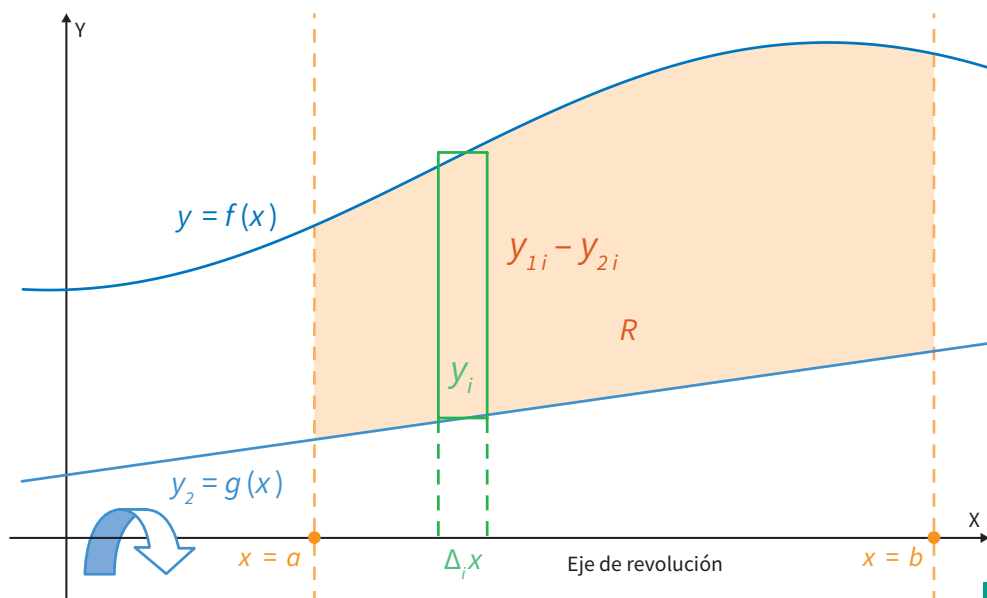


Disco que contiene el volumen de un rectángulo aproximante que gira entorno a la base Δx .

Método de las arandelas

Empleado cuando el eje de revolución no forma parte del contorno de la región. Se siguen los pasos:

- Trazar un diagrama indicando el área de la región así como un i -ésimo rectángulo representativo perpendicular al eje de rotación.
- Determinar la diferencia de los volúmenes de los dos discos producidos por la rotación del i -ésimo rectángulo entorno al eje de rotación y la sumar de los n rectángulos de la partición.
- Aplicar el segundo teorema fundamental del cálculo al suponer que el número de intervalos crece indefinidamente.



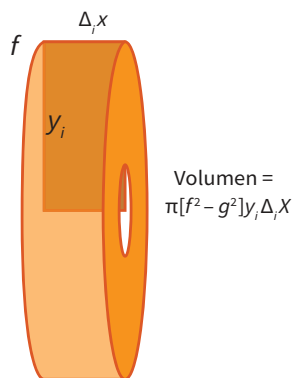
Se presenta un ejemplo cuando el eje de revolución no forma parte de la región R .

Cuando el eje de revolución es el eje X, la frontera de la región en la parte superior es la función $y = f(x)$ y por la parte inferior $y = g(x)$, ambas en el intervalo $[a, b]$, entonces el volumen del sólido de revolución es:

$$V = \pi \int_a^b \{ [f(x)]^2 - [g(x)]^2 \} dx .$$

Análogamente si el eje de rotación es el eje Y, además si el área plana está acotada a la derecha por $x = f(y)$, por la izquierda mediante $x = g(y)$, ambas en el intervalo $[c, d]$, entonces el área del sólido de revolución es:

$$V = \pi \int_c^d \{ [f(y)]^2 - [g(y)]^2 \} dy .$$



Arandela que contiene el volumen de un rectángulo aproximante, que gira entorno a la base Δx .

Método de las capas

Este método es factible cuando es complicado despejar cierta variable para que las franjas sean perpendiculares al eje de revolución, por ello se utilizan franjas paralelas a este eje. Cuando esta franja gira se forma una capa cilíndrica, la cual es un sólido contenido entre cilindros que tienen el mismo centro y el mismo eje. Se siguen estos pasos generales:

- Trazar un diagrama indicando el área de la región así como un i -ésimo rectángulo representativo paralelo al eje de rotación.
- Escribir el volumen de la capa cilíndrica generada al girar el i -ésimo rectángulo aproximante alrededor del eje de revolución y la suma de los n rectángulos de la partición.
- Aplicar el segundo teorema fundamental del cálculo al suponer que el número de intervalos crece indefinidamente.

Cuando el eje de revolución se trata del eje Y, la región está en el primer cuadrante y se halla acotada superiormente por $y = f(x)$ e inferiormente por el eje X en el intervalo $[a, b]$, entonces el volumen estará señalado mediante:

$$V = 2\pi \int_a^b xf(x)dx.$$

Ahora, cuando se trata de que el eje de revolución es el eje X, la región está en el primer cuadrante acotada a la derecha por $x = g(y)$ y a la izquierda por el eje Y en el intervalo $[c, d]$, entonces su volumen será:

$$V = 2\pi \int_c^d yg(y)dy.$$

Se debe recalcar que en la relación $V = 2\pi \int_a^b xf(x)dx$ el valor de la variable x representa la distancia dirigida desde el rectángulo aproximante hacia el eje de revolución (que en este caso es el eje Y). Análogamente en la relación $V = 2\pi \int_c^d yg(y)dy$ el valor de la variable y representa la distancia dirigida medida desde el rectángulo aproximante hacia el eje de revolución (que en este caso es el eje X).

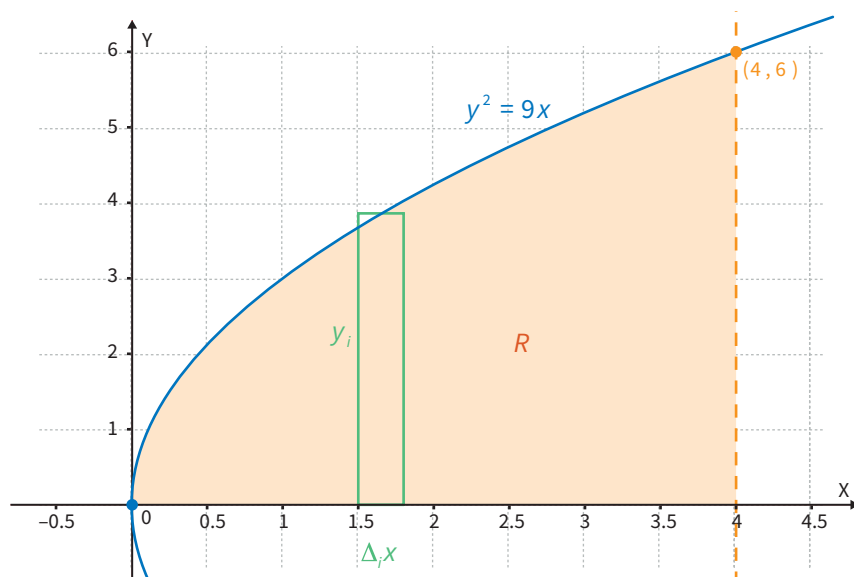
En caso que los ejes de revolución no sean los ejes X o Y, se deben tomar la distancias dirigidas correctas desde los ejes especificados hacia los rectángulos aproximantes respectivos.

Tras señalar estos recursos nos queda buscar aplicaciones en donde podamos poder manos a la obra con estas herramientas matemáticas. Consideraremos un ejemplo para cada uno de los métodos.

Ejemplo

Hallaremos el volumen generado por la región que existe en el primer cuadrante por la parábola $y^2 = 9x$ y la recta $x = 4$.

En primer lugar se tiene la gráfica de esta situación.



Determinación del volumen por medio del método de los discos.

Emplearemos el método de los discos. Se observa que la parte superior de la región que girará alrededor del eje X, es $y = \sqrt{9x}$. Además estaremos considerando el intervalo $[0, 4]$, de forma que el volumen provendrá de:

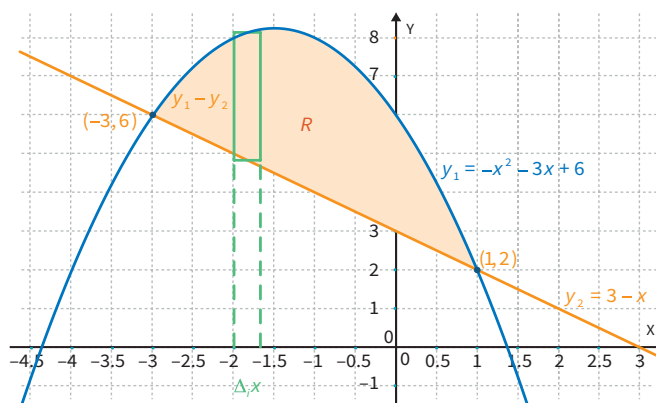
$$V = \int_0^4 \pi y^2 dx = \pi \int_0^4 (\sqrt{9x})^2 dx = \pi \int_0^4 9x dx = \left(\frac{9\pi x^2}{2} \right) \Big|_0^4 = 72\pi.$$

Esto señala que el volumen del sólido es de 72π unidades cúbicas.

Ejemplo

Determinaremos el volumen generado por la región comprendida entre las funciones $y = 3 - x$ y $y = -x^2 - 3x + 6$, al girar en torno al eje X.

Analizando la gráfica de la situación.



Representación de las funciones $y = 3 - x$ y $y = -x^2 - 3x + 6$.

Podemos observar que será abordado mediante el método de las arandelas en donde las funciones serán $f(x) = -x^2 - 3x + 6$ y $g(x) = 3 - x$, además esta integración será en el intervalo $[-3, 1]$:

$$V = \pi \int_{-3}^1 [(-x^2 - 3x + 6)^2 - (3 - x)^2] dx = \pi \int_{-3}^1 (x^4 + 6x^3 - 4x^2 - 30x + 27) dx.$$

Que al integrar y evaluar obtenemos:

$$V = \pi \left(\frac{x^5}{5} + \frac{3x^4}{2} - \frac{4x^3}{3} - 15x^2 + 27x \right) \Big|_{-3}^1 = \pi \left[\left(\frac{371}{30} \right) - \left(-\frac{1071}{10} \right) \right] = \frac{1792\pi}{15}.$$

En resumen, el volumen del sólido de revolución es de $\frac{1792}{15}\pi$ unidades cúbicas.

Ejemplo

Resolveremos el ejemplo anterior si la región gira alrededor de la recta $x = 2$.

La figura anterior señala la región y el eje de revolución. Al emplear el mismo rectángulo aproximante del ejemplo anterior se tiene que este es paralelo al eje de revolución, así

que estamos en momento de usar el método de las capas. En este caso el eje de revolución no es el eje Y, pero es uno paralelo a él, o sea la recta $x = 2$. Por tanto hemos de determinar el valor de la distancia entre la recta $x = 2$ y el rectángulo aproximante.

Notando la figura se concluye que la distancia dirigida horizontalmente desde el eje Y a la recta $x = 2$, es de dos unidades y la distancia dirigida desde el eje Y hacia el rectángulo aproximante es de $-x$ unidades. Así que la distancia entre este rectángulo y el eje de revolución será $2 - x$ unidades.

Por otra parte la altura del rectángulo aproximante está dada por la diferencia de ordenadas de las funciones respectivas, es decir $(-x^2 - 3x + 6) - (3 - x)$.

Entonces el método de las capas y los elementos de la figura nos sugieren realizar las siguientes operaciones:

$$V = 2\pi \int_{-3}^1 [(-x^2 - 3x + 6) - (3 - x)](2 - x) dx = 2\pi \int_{-3}^1 (x^3 - 7x + 6) dx .$$

Finalmente tras manejos aritméticos y el uso del segundo teorema fundamental del cálculo se tiene que:

$$V = 2\pi \left(\frac{x^4}{4} - \frac{7x^2}{2} + 6x \right) \Big|_{-3}^1 = 2\pi \left[\left(\frac{11}{4} \right) - \left(-\frac{117}{4} \right) \right] = 64\pi .$$

En resumen el volumen del sólido de revolución calculado por el método de las capas es de 64π unidades cúbicas.

Actividad de aprendizaje 2

◀ Realiza lo que se pide.

- Representa una situación en donde se observe un volumen calculado por el método de las capas.
- Relacionado a la situación de la jardinera presentada al inicio de este parcial, calcula, con el método apropiado, el volumen del sólido de revolución que resulta de hacer girar la región señalada en torno:
 - Al eje X
 - Al eje Y
 - A la recta $x = 1$
 - A la recta $y = 1$
- En parejas hallen dos funciones que, acotadas bajo ciertas circunstancias, tengan regiones que al girar bajo ciertos ejes de revolución formen volúmenes parecidos a:
 - trompos
 - balones de fútbol americano
 - Propongan fórmulas y situaciones particulares para determinar sus volúmenes.
- Determina el volumen del sólido que se genera alrededor de cada una de las rectas que cortan a la curva correspondiente.
 - $X = 3; y = 4x - x^2$
 - $x = 4; y^2 = x^3$
 - $y = -4; y = 4 + 6x - 2x^2$

5. Las curvas $x = 5 - y^2$ y $y^2 = 4x$ se intersecan. Calcula el volumen que se genera al hacer girar la región descrita alrededor del eje:

a. X

b. Y

Evidencia de aprendizaje 1

◀ En equipos, realiza lo que se te pide, entregando tus resultados al profesor para su evaluación.

1. Mediante el uso de integrales, determina el volumen de los cuerpos geométricos y las funciones que los generan:

a. Esfera

b. Prisma rectangular

c. Cono truncado

d. Cilindro

Longitud de una o dos curvas en el plano

Si se tiene una función $y = f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ y la derivada $f'(x)$ continua en ese mismo intervalo, entonces la longitud del arco desde el punto $A(a, f(a))$ al punto $B(b, f(b))$ viene dado por

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

Similarmente, si se tiene la curva $x = g(y)$, en el intervalo $[c, d]$, y la derivada $x = g'(y)$, continua en ese intervalo, entonces la longitud del arco desde el punto $A(g(a), a)$ al punto $B(g(b), b)$ dado por:

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy.$$

Consideremos ejemplos ilustrativos para aterrizar los conceptos y fórmulas presentadas.

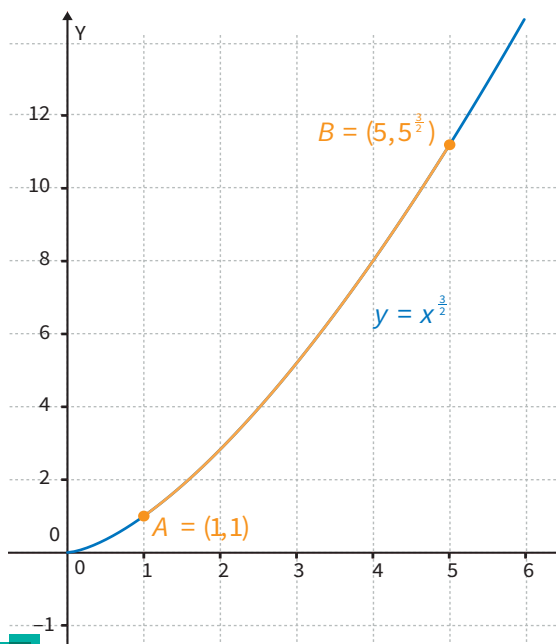
Ejemplo

Determinaremos la longitud del arco de la curva $y = x^{3/2}$ en el intervalo $[1, 5]$ del eje X.

La situación se presenta a continuación.

Usaremos claramente la relación $L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$ de donde calculamos los elementos faltantes, en este caso $\frac{dy}{dx}$, es decir, la derivada de la variable función respecto a la variable x :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}.$$



Longitud de arco AB de la función $y = f(x)$.

Por lo que:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \frac{9}{4}x.$$

Entonces la relación será:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_1^5 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \int_1^5 \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{1}{2}} dx.$$

Utilizando el teorema fundamental del cálculo llegaremos a que el valor buscado es:

$$L = \left. \frac{8}{27} \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}} \right|_1^5 = \frac{8}{27} \left[\left(\frac{49}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{13}{4}\right)^{\frac{3}{2}} \right] \approx 10.9676.$$

Por lo tanto la longitud del arco AB vale 10.9676 unidades.

Ejemplo

Encontraremos el valor de la longitud del arco de la parábola $x = y^2$ desde el punto $(0, 0)$ al $(1, 1)$.

Vemos que será más sencillo derivar la ecuación respecto a la variable y de modo que estaremos utilizando la relación $L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy$ en el intervalo $[0, 1]$ del eje Y .

Calculamos lo pedido:

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = (2y)^2 = 4y^2.$$

Entonces:

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 4y^2} dy.$$

Reordenando el integrando logramos llegar al resultado:

$$L = \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{1 + (2y)^2} 2dy = \left. \left(\frac{y}{2} \sqrt{1 + 4y^2} + \frac{1}{4} \ln \left| 2y + \sqrt{1 + 4y^2} \right| \right) \right|_0^1 = \frac{1}{2} \sqrt{5} + \frac{1}{4} \ln |2 + \sqrt{5}| \approx 1.4789.$$

Actividad de aprendizaje 3

◀ Aplicando las propiedades de la integral definida, calcula la longitud de arco de cada una de las siguientes funciones en el intervalo dado (de ser necesario realiza la representación gráfica).

1. $x = \sqrt{4 - y^2}$, en $-1 \leq y \leq 1$.
2. $y = x^{\frac{3}{2}}$, en $0 \leq x \leq 4$.
3. $(y - 1)^2 = 4x^3$, del punto $(0, 1)$ al punto $(1, 3)$.

Para saber más

Cuando trates con funciones implícitas puedes optar por la derivada implícita que requieras determinar según cuál de las dos relaciones estés utilizando.

Aplicación de la integración en áreas como: física, economía y biología

Valor promedio de una función

Para saber más

Esto equivale a dividir el área de la región entre el valor de la longitud de su base.

Cuando nos piden determinar el valor promedio de una cantidad finita de datos simplemente realizamos la suma de ellos y dividimos el resultado entre el total de ellos. Sin embargo cuando pretendemos calcular el promedio de los valores infinitos de una función f nos vemos en ciertas dificultades. Primero que nada hemos de observar sobre qué intervalo deseamos hallar dicho promedio. Para ello se da la siguiente definición.

Definición. Si una función $y = f(x)$ es definida en el intervalo $[a, b]$ entonces el **valor promedio de f** o la **ordenada media de f** , se describe por:

$$f_{med} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Dados estos elementos podemos considerar el ejemplo:

Ejemplo

Obtendremos el valor promedio de:

- La parábola $y = 4 - x^2$ en el intervalo $[-2, 2]$
- La función $y = x^2 + 1$ en $[-1, 2]$
- Una semicircunferencia de radio r

En cada caso evitaré dar pormenores del método de integración, así como sus pasos algebraicos que ya se han analizado a lo largo de la obra.

- Al ser simétrica la función respecto al eje Y podemos ahorrarnos pasos:

$$f_{med} = \frac{1}{2 - (-2)} \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^2 (4 - x^2) dx = \frac{1}{2} \left(4x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \frac{8}{3}.$$

- $f_{med} = \frac{1}{2 - (-1)} \int_{-1}^2 (x^2 + 1) dx = \frac{1}{3} \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_{-1}^2 = 2.$

- La función de la semicircunferencia de radio r puede a modo sencillo $x^2 + y^2 = r^2$, o sea $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, por tanto la ordenada media se determina como sigue en el intervalo $[-r, r]$ o por ser simétrica el doble del obtenido en el intervalo $[0, r]$, es decir:

$$f_{med} = \frac{2}{r - (-r)} \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = \frac{1}{r} \left(\frac{x}{2} \sqrt{r^2 - x^2} + \frac{r^2}{2} \arctan \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \right) \Big|_0^r = \frac{\pi r}{4}.$$

Trabajo

Se ha visto en estudios anteriores de física que el trabajo T se define como el producto de la fuerza F requerida para mover un objeto a una distancia d . Es decir:

$$T = F \cdot d.$$

En el sistema métrico internacional la fuerza se mide en Newton (N), y la distancia en metros (m). Por lo tanto el trabajo se da en $\text{kg} \cdot \text{m}$ que en términos apropiados equivale a un Joule (J).

Si el objeto a mover está sobre el eje horizontal en dirección positiva desde a hacia b de manera que en cada punto x de ese intervalo una fuerza $f(x)$ actúa sobre el objeto, en donde además f es continua en ese mismo intervalo, entonces el trabajo realizado sobre el objeto desde a hacia b es

$$T = \int_a^b f(x) dx.$$

Ejemplo

Si una partícula está localizada a una distancia horizontal de x metros del origen, y una fuerza dada por la función $y = x^2 + 3x$, en Newtons, actúa sobre ella, ¿qué trabajo se requerirá para moverla 3 metros a partir del metro $x = 2$?

Debemos comprender primero que estamos tratando con intervalos del eje X , de manera que si queremos mover el objeto 3 m a partir del metro 2, esto indica que necesitamos llegar al metro 5, o sea el intervalo en cuestión será $[2, 5]$. La función de la fuerza está ya dada de forma el trabajo será:

$$T = \int_a^b f(x) dx = \int_2^5 (x^2 + 3x) dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} \right) \Big|_2^5 = \frac{141}{2}$$

El trabajo realizado es de $\frac{141}{2}$ J.

Ejemplo

Una fuerza de 50 N es requerida para mantener un resorte estirado horizontalmente unos 4 cm de su posición natural de 10 cm medido desde el origen. ¿Cuánto trabajo se requiere para estirar ese mismo resorte de 14 a 18 cm?

En primer lugar estamos aplicado la ley que se analiza en Física y se conoce como la ley de Hooke. Esta ley afirma que la fuerza necesaria para mantener un resorte estirado x unidades de su posición natural es proporcional a esa distancia, es decir $f(x) = kx$, donde k es una constante de proporcionalidad positiva que la determinamos con los primeros datos conocidos del resorte.

Para saber más

Recuerda que la fuerza o peso de un objeto puede medirse a partir de su masa mediante $F = mg$, donde $g = 9.8 \text{ m/s}^2$. Además $N = \text{kg} \cdot \text{m/s}^2$, o sea un Newton es la cantidad de fuerza requerida para mover un objeto de un kilogramo a una aceleración de un metro entre segundo al cuadrado.



Se presenta un ejemplo cuando el eje de revolución no forma parte de la región R .

Como sabemos ahora que la fuerza para mantener un resorte estirado una cantidad x a partir de su posición natural es $f(x) = kx$, podemos sustituir el valor de $x = 4 \text{ cm} = 0.04 \text{ m}$ y de $f = 50 \text{ N}$ en la relación anterior para determinar el valor de k , es decir:

$$50 = f(0.04) = k(0.04)$$

$$k = \frac{50}{0.04} = 1250.$$

Por tanto la fuerza para este caso en particular es de $f(x) = 1250x$.

Finalmente, basándonos en esta función de la fuerza requerida y el intervalo en metros en cuestión que se trata de $[0.14, 0.18]$, podremos determinar el valor del trabajo requerido, esto es

$T = \int_{0.14}^{0.18} 1250x \, dx = 625x^2 \Big|_{0.14}^{0.18} = 8$ Lo cual indica que al estirar el resorte desde 14 a 18 cm se realizará un trabajo de 8 J.

Fuerza de presión hidrostática

Conforme un buzo se sumerge más y más en el fondo del mar, él experimenta un “peso” cada vez mayor sobre todo su cuerpo. Este “peso” al que se refieren los buzos se conoce como **presión hidrostática** y es cada vez mayor conforme se está más profundo de la superficie, esto debido a que el peso del agua se incrementa.

A modo general la presión se define como la fuerza aplicada sobre una unidad de superficie o área, es decir la presión equivale a la fuerza que actúa perpendicularmente a una superficie entre el área sobre la que se distribuye dicha fuerza. En términos matemáticos $P = \frac{F}{A}$.

En hidrostática la presión P de un líquido es la fuerza por unidad cuadrada de área ejercida por el peso del líquido.

De manera que si la densidad del líquido en cuestión se denota por ρ , entonces la presión ejercida por el líquido en un punto hallado a una profundidad de h unidades debajo de la superficie del líquido será dado por:

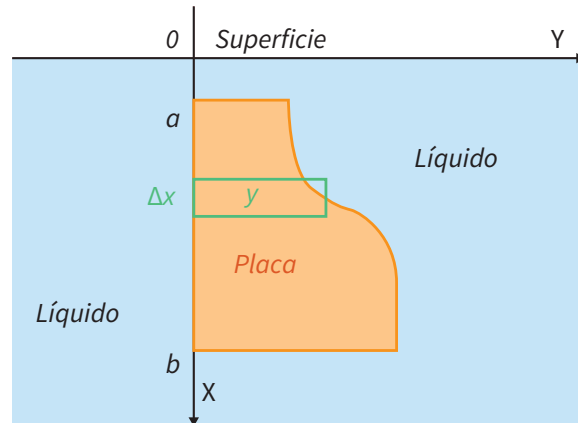
$$P = \rho h.$$

Si introducimos una placa, de área A , de forma paralela a la superficie del líquido de dentro de éste y representamos como F a la fuerza ejercida por el líquido sobre la parte superior de la placa, entonces esto se escribe:

$$F = P \cdot A = \rho h A.$$

El principio de Pascal indica que la presión ejercida en un punto del interior del líquido es la misma en todas las direcciones. En el sistema internacional de medida se representa la presión en N/m^2 que se llaman pascales, es decir $1 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ Pa}$.

Sin embargo cuando se sumerge la placa de manera vertical podremos adoptar como el eje X positivo al contenido desde la superficie del líquido hacia la profundidad de tal; y al eje Y positivo como la línea horizontal sobre la superficie que va hacia la derecha. De forma gráfica se tiene:



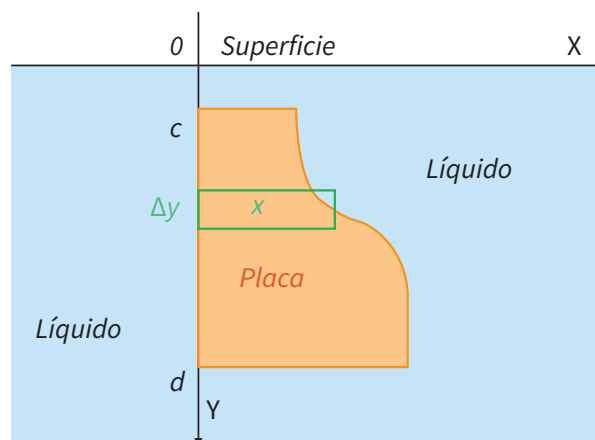
Representación de la placa sumergida de forma vertical en un líquido.

Nota cómo se toman los rectángulos aproximantes. Con este precedente se indica que:

Si una placa se sumerge verticalmente en un líquido de densidad ρ , además la longitud de la placa a una profundidad de x unidades debajo la superficie es de $f(x)$ unidades, donde f es continua en $[a, b]$ y $f \geq 0$ en $[a, b]$, entonces la fuerza F ejercida por la presión del líquido sobre la placa será de

$$F = \rho \int_a^b xy \, dx = \rho \int_a^b xf(x) \, dx$$

También podría considerarse una función del tipo $x = g(y)$ como el de la figura:



Representación de la placa sumergida en un líquido.

Con ello la relación para determinar su fuerza de presión es:

$$F = \rho \int_c^d yx \, dy = \rho \int_c^d yg(y) \, dy$$

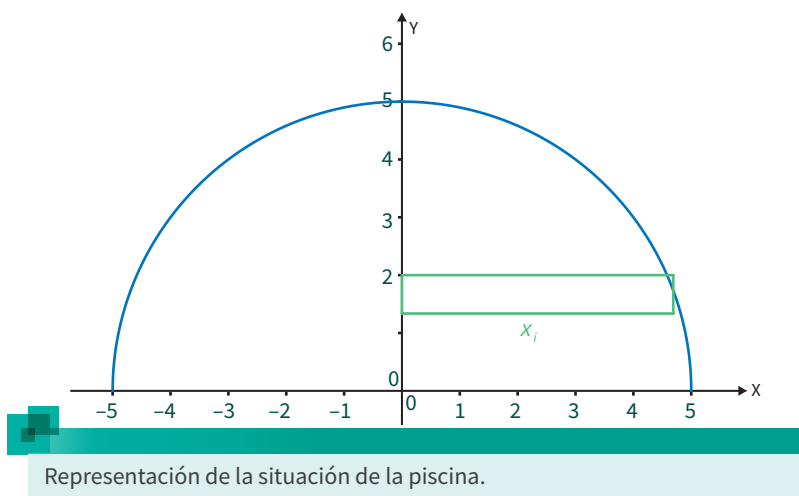
Aquí la profundidad se representa con la variable y .

Apliquemos esto a dos ejemplos ilustrativos.

Ejemplo

Determinaremos la fuerza que se notará en el fondo de una piscina de forma semicircular de 10 m de diámetro cuando está lleno de agua. Para esto debes saber que la densidad del agua es de 9810 N/m^3 .

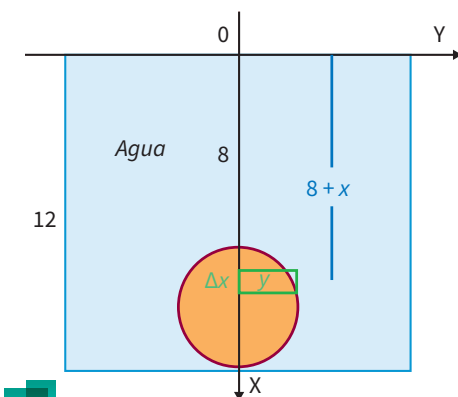
Colocamos la ecuación de manera que esté centrado en los ejes, por ello la ecuación será $x^2 + y^2 = 5^2$, de donde $y = \sqrt{25 - x^2}$ que abarca el intervalo $[0, 5]$. Gráficamente:



La profundidad será x y la altura $2y$ pues es simétrica respecto al eje X . La fuerza será entonces:

$$F = \rho \int_a^b xy \, dx = 9810 \int_0^5 2x \sqrt{25 - x^2} \, dx = 19620 \int_0^5 x(25 - x^2) \, dx = -4905(25 - x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^5 = 817500.$$

La fuerza ejercida será de 817 500 N.



Ejemplo

Si un recipiente de forma cilíndrico circular recto con base 2 m de radio se coloca de lado (acostado) en el fondo de un tanque lleno de agua de 12 m de profundidad, ¿cuál es la fuerza ejercida por el agua sobre un extremo del recipiente?

Nuestra situación se presenta a continuación de forma gráfica.

La circunferencia quedará centrada en el punto $C(10, 0)$ por lo que su ecuación será $(x - 10)^2 + y^2 = 4$, es decir:

$$f(x) = \sqrt{4 - (x - 10)^2}.$$

Además la altura del rectángulo es y metros multiplicado por dos en el intervalo $[8, 12]$. La profundidad es $8 + x$ metros por lo tanto la fuerza es:

$$F = 2\rho \int_8^{12} (8+x)\sqrt{4-(x-10)^2} dx = 313920 \int_8^{10} \sqrt{4-(x-10)^2} dx + 39240 \int_8^{10} x\sqrt{4-(x-10)^2} dx$$

Aplicando técnicas de integración con sumo cuidado se obtiene el resultado pedido, la fuerza de la presión del agua es de $F = 2\,114\,300$ N.

Momento y centro de masa

Si te dan un plato y deseas balancearlo horizontalmente con un palillo sin que este caiga requiere mucho más que habilidad para colocar en el punto apropiado el palillo. Tal como suceden con los *discos chinos*.

Sin embargo si te dan una figura plana irregular cómo descubrirías el punto en dónde colocarías la varillita y esta mantenga horizontalmente el plano de forma horizontal sin que este caiga.

Nuestro objetivo entonces es determinar ese punto P del plano en donde este se balancee horizontalmente, ese punto se denomina **centro de gravedad, centro de masa**. Para un plano homogéneo ese punto se conoce como **centroide** de la región que conforma el plano. Es decir si se tratase de un plano circular entonces su centroide coincidiría con su centro de gravedad. Lo mismo ocurriría con un plano rectangular.

En el caso de un área plana el centroide se representa con las coordenadas (\bar{x}, \bar{y}) .



El **momento** de un área plana respecto a una recta L se representa por M_L y se determina con el producto del área por la distancia dirigida de su centroide a esa recta.

Por tanto se proceder a determinar el momento de un área plana con respecto a un eje de coordenadas de la siguiente manera:

- Representar el área señalando una rectángulo aproximante.
- Multiplicar el área del rectángulo por la distancia que existe de su centroide al eje en cuestión y suponer que el número de rectángulos aproximantes crece indefinidamente para aplicar el segundo teorema fundamental del cálculo.

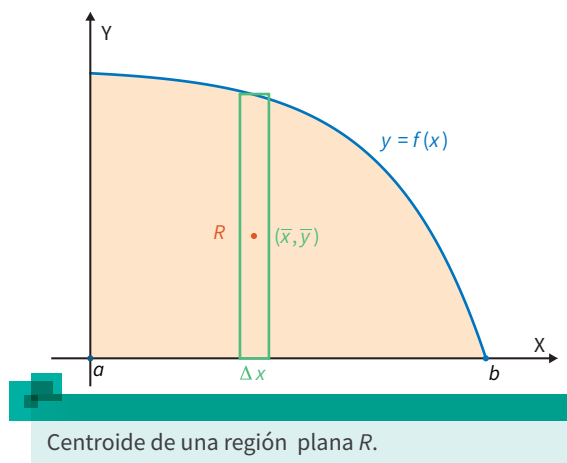
Entonces si poseyéramos una región plana con área A y su centroide (\bar{x}, \bar{y}) , entonces los momentos M_x y M_y respecto a los ejes coordenados X y Y respectivamente serán:

$$M_x = A\bar{y}.$$

$$M_y = A\bar{x}.$$

De esto se intuye que para determinar el centroide de una región cuando se conocen sus momentos respecto a los ejes coordenados se puede calcular con los despejes de las fórmulas anteriores, es decir:

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{M_y}{A}, \frac{M_x}{A} \right).$$



Recordando que un área de una región puede verse como la integral definida en el intervalo señalado, es decir $A = \int_a^b f(x) dx$, podremos describir estas relaciones mediante integrales:

$$M_x = \frac{1}{2} \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

$$M_y = \int_a^b x f(x) dx$$

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{\int_a^b x f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx}, \frac{\frac{1}{2} \int_a^b [f(x)]^2 dx}{\int_a^b f(x) dx} \right)$$

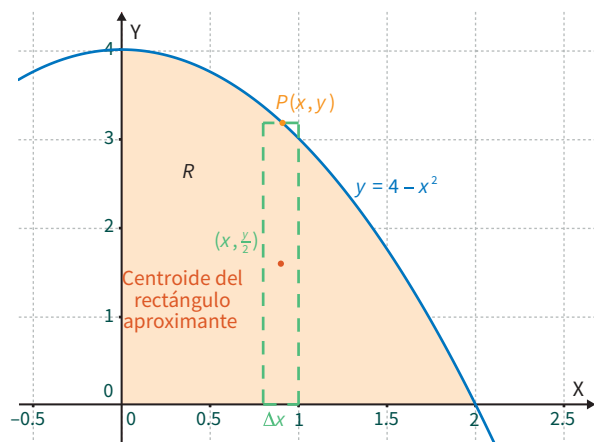
Cabe señalar que estas relaciones se pueden ajustar cuando la región está determinada por una función $x = g(y)$ sobre el intervalo $[c, d]$ del eje Y.

Ejemplo

Encontraremos, con las relaciones vistas anteriormente, los momentos con respecto a los ejes coordenados del área plana acotada en el primer cuadrante por la función $f(x) = 4 - x^2$.

Una representación con los elementos correspondientes es la que se muestra en la figura de la página siguiente.

Las relaciones a utilizar son $M_x = \frac{1}{2} \int_a^b [f(x)]^2 dx$ y $M_y = \int_a^b xf(x)dx$, en donde claramente el intervalo es $[0, 2]$.



Un rectángulo aproximante y su centroide de la función $f(x) = 4 - x^2$ en el primer cuadrante.

Se tiene:

$$M_x = \frac{1}{2} \int_a^b [f(x)]^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^2 (4 - x^2)^2 dx = \frac{128}{15}.$$

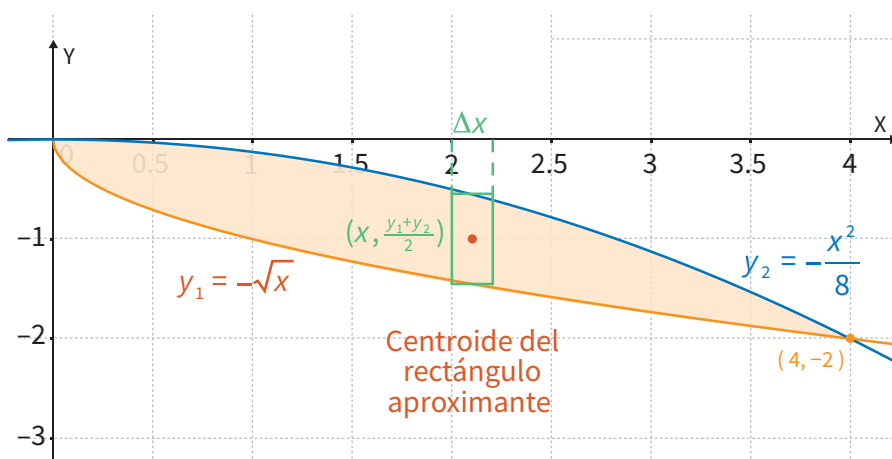
$$M_y = \int_a^b xf(x)dx = \int_0^2 x(4 - x^2)dx = 4.$$

Y así los momentos respecto a los ejes X e Y son $M_x = \frac{128}{15}$ y $M_y = 4$ respectivamente.

Ejemplo

Obtendremos el centroide de la región comprendida por las curvas $y = -\sqrt{x}$ y $y = -\frac{x^2}{8}$.

En primer lugar bosquejamos la situación.



Un rectángulo aproximante y su centroide de la función $f(x) = 4 - x^2$ en el primer cuadrante.

Notamos que la altura del rectángulo aproximante consta de la resta de las alturas respectivas de las ordenadas de las funciones; más sin embargo esto no representa el punto medio de la altura del rectángulo aproximante. Al tratarse del punto medio necesitamos el promedio de las alturas involucradas por ello sumamos el valor de las respectivas ordenadas y dividimos entre dos. Con el fin de hallar el centroide es necesario calcular el valor del área de la región en el intervalo $[0, 4]$ y así utilizar la relación $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{M_y}{A}, \frac{M_x}{A}\right)$.

El área será:

$$A = -\int_a^b (y_1 - y_2) dx = -\int_0^4 (-\sqrt{x} - (-\frac{x^2}{8})) dx = \int_0^4 (\sqrt{x} - \frac{x^2}{8}) dx = \frac{8}{3}.$$

Los momentos son:

$$M_x = \frac{1}{2} \int_a^b (y_1 + y_2) 2 dx = \frac{1}{2} \int_0^4 (-\sqrt{x} - \frac{x^2}{8})^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^4 (\sqrt{x} + \frac{x^2}{8})^2 dx = \frac{-12}{5}.$$

$$M_y = \int_a^b x(y_1 - y_2) dx = \int_0^4 x(\sqrt{x} - \frac{x^2}{8}) dx = \frac{24}{5}.$$

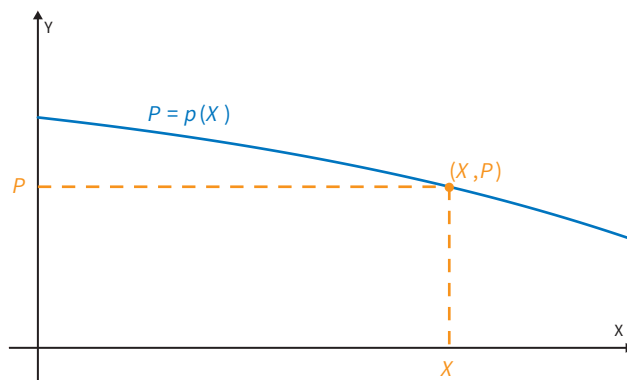
Luego entonces el centroide es

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{M_y}{A}, \frac{M_x}{A}\right) = \left(\frac{\frac{24}{5}}{\frac{8}{3}}, \frac{\frac{-12}{5}}{\frac{8}{3}}\right) = \left(\frac{9}{5}, \frac{-9}{10}\right).$$

Finalizo esta obra con algunas aplicaciones del cálculo integral a otras facetas descritas al inicio de la sesión. En este caso sobre economía y biología. No carece de sentido reiterar que existen muchas más aplicaciones que no podremos abarcar, más sin embargo en tu proyecto de bloque se enfatiza este hecho.

Excedente del consumidor

Una **función de demanda** $p(x)$ es el precio que una compañía tiene que cargar a sus artículos para poder vender X cantidad de esos artículos disponible. Básicamente si se venden grandes cantidades de producto, los precios de estos bajan, de manera que la función de demanda tiene que ser decreciente. La representación de esta función se conoce como curva de demanda. Si X representa la cantidad de artículos disponibles para venta entonces $P = p(x)$ indica el precio de venta de los artículos. Esto se muestra en la siguiente curva de demanda.



Curva de demanda $p(x)$.

Los economistas describen la integral

$$\int_0^x [p(x) - P] dx .$$

Como el **excedente del consumidor** para el producto. Esto representa la cantidad de dinero ahorrado por los consumidores al adquirir los artículos al precio P , correspondiente a la demanda X de estos productos.

Notemos un ejemplo aplicativo.

Ejemplo

Hallaremos el excedente del consumidor cuando el nivel de venta requerido es de 800 artículos sabiendo además que la función de demanda para estos productos está dado por $p = 1200 - \frac{x}{5} - \frac{x^2}{10000}$ en pesos.

Hemos de conocer primero el precio correspondiente a los 800 artículos, esto es

$$p(800) = 1200 - \frac{800}{5} - \frac{(800)^2}{10000} = 976 .$$

Por tanto nuestra integral quedará ordenada de esta forma

$$\int_0^x [p(x) - P] dx = \int_0^{800} [1200 - \frac{x}{5} - \frac{x^2}{10000} - 976] dx = \int_0^{800} (224 - \frac{x}{5} - \frac{x^2}{10000}) dx = 98133.33 \text{ pesos.}$$

Gasto cardiaco

Nuestro maravilloso cuerpo tiene un complejo ritmo incansable de trabajo, muestra de ello es el sistema cardiovascular en donde el principal elemento es el corazón. Mediante este la sangre regresa al cuerpo a través de las venas y se introduce en el ventrículo derecho de donde es bombeada hacia los pulmones a través de las arterias pulmonares con el fin de oxigenarla. Esta regresa ya oxigenada hacia el ventrículo izquierdo mediante las venas pulmonares

y desde aquí se bombea hacia el resto del cuerpo a través de la aorta. Entonces se define que el **gasto cardiaco** es el volumen de sangre que bombea el corazón y que pasa a través de la aorta en una unidad de tiempo. Es decir, la razón de flujo de sangre a través de la aorta.

Con el fin de medir el gasto cardiaco se emplea el método de dilución de tinta. Esto consiste básicamente en inyectar una tipo de tinta al ventrículo derecho del corazón y observar la concentración del flujo de esta que pasa por la aorta en tiempos específicos sobre un intervalo de tiempo $[0, t]$.

Si $c(t)$ representa la concentración de la tinta en el tiempo t entonces el gasto cardiaco está dado por



$$G = \frac{A}{\int_0^T c(t) dt}$$

En donde la cantidad de tinta inyectada A es conocida y la integral puede ser aproximada por las lecturas de concentración de la tinta.

Te proporciono un ejemplo.

Ejemplo

Un paciente tiene problemas cardiacos y se somete a una medición de gasto cardiaco. Se le inyecta 5 mg de tinta especial en su ventrículo derecho y se observa la concentración de la tinta (en miligramos por litro) en la aorta a intervalos de un segundo. Los datos arrojados se muestran en la siguiente tabla.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$c(t)$	0	0.4	2.8	6.5	9.8	8.9	6.1	4	2.3	1.1	0

Estima el gasto cardiaco de este paciente mediante la aproximación con el método de la regla de Simpson.

En este caso en particular se tiene que $A = 5$, $\Delta t = 1$ y $T = 10$. Para calcular la integral de concentración se usará la regla de Simpson como se pide:

$$\int_0^T c(t) dt = \int_0^{10} c(t) dt \approx \frac{1}{3}[0 + 4(0.4) + 2(2.8) + 4(6.5) + 2(9.8) + 4(8.9) + 2(6.1) + 4(4) + 2(2.3) + 4(1.1) + 0].$$

De donde:

$$\int_0^{10} c(t) dt \approx 41.87.$$

Luego entonces el gasto cardiaco de este paciente será:

$$G = \frac{A}{\int_0^T c(t) dt} \approx \frac{5}{41.87} \approx 0.1194.$$

Esto da a entender que el gasto cardiaco aproximado es de 0.1194 L/s.

La estadística también se conecta con el cálculo integral bajo ciertos parámetros como por ejemplo en el análisis de un comportamiento aleatorio. Además muchos fenómenos aleatorios tales

como pruebas de aptitud o pesos y medidas de individuos de una población homogénea, son modelados mediante una distribución normal. Esto está íntimamente ligado al cálculo también.

En resumen tras documentarte con la amplia gama de aplicaciones directas del cálculo integral te estás abriendo paso a lo que las matemáticas ofrece a los que se aventuran en conocerla.

Actividad de aprendizaje 4

◀ Realiza lo que se pide.

- Calcula el valor promedio de las siguientes funciones en el intervalo dado:
 - $y = \sin x$, en $0 \leq x \leq \pi$
 - $y = x^3 - x + 3$, en $0 \leq x \leq 4$
- Un cuerpo es arrojado de un globo aerostático que se halla a una altura de 180 m y que se encuentra viajando a una velocidad de 15 m/s. La trayectoria parabólica que describe el objeto arrojado es $y = 180 - \frac{x^2}{45}$, en donde el valor de la variable x representa la distancia horizontal recorrida por el objeto, mientras que la variable y indica la altura del mismo. Calcula la distancia recorrida por ese objeto desde el momento en que es soltado hasta que toca al suelo.
- En una ciudad la temperatura después de t horas a partir de las 9 am se propone mediante el modelo $T(t) = 50 + 14 \sin \frac{\pi t}{12}$. Si esta temperatura está dada en °F, obtén el promedio de estas temperaturas desde las 9 am hasta las 9 pm.
- La fuerza de atracción de la tierra para un cuerpo de α kilopodios situado a una distancia de d km desde el centro de la tierra es, $F = \frac{16000000\alpha}{2.2d^2}$. Si el radio terrestre es de 6400 km, halla el trabajo realizado contra la fuerza de gravedad para mover un cuerpo de un kilopodio desde la superficie terrestre hasta un punto situado a 1000 km arriba de la superficie.
- Hallar el trabajo realizado contra la fuerza de gravedad para elevar un cohete de 10 toneladas métricas de peso hasta una altura de 300 km sobre la superficie terrestre.
- Encuentra los momentos M_x y M_y y el centroide de un cuarto de circunferencia en el tercer cuadrante si la densidad es 2.
- La función de demanda para cierto artículo es $p(x) = \frac{450}{x+8}$. Halla el excedente del consumidor cuando el precio de venta es de \$10.
- Determina el gasto cardiaco de un paciente que tras inyectarle 8 mg de tinta se observan las siguientes mediciones de concentración de tinta cada dos segundos. Usa la regla de Simpson.

t	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
$c(t)$	0	2.4	5.1	7.8	7.6	5.4	3.9	2.3	1.6	0.7	0

Evidencia de aprendizaje 2

◀ Individualmente resuelve las siguientes situaciones y evalúa tus resultados realizando una lista de cotejo.

1. Una partícula se mueve a lo largo del eje X por una fuerza que mide $\frac{10}{(x+1)^2}$ kg en un punto de x m del origen. Determina el trabajo al mover el cuerpo del origen hasta una distancia de 9 m.
2. Para estirar un resorte, que en estado natural es de 10 cm, una longitud de 2.5 mm, se requiere una fuerza de 25 kilopodios. Determina el trabajo realizado para alargarlo de 11 cm hasta 22 cm.
3. Dos partículas se repelen mutuamente con una fuerza inversamente proporcional a la distancia que las separa. Supón que una de ellas está fija en un punto (2, 0), con ello determina el trabajo necesario para desplazar a la otra ubicada en el punto (-3, 0) hasta el origen.
4. La forma de un tanque en su parte inferior tiene la forma de la región acotada por las curvas $y = \frac{x^2}{2}$ y $y = 12$ dadas en pies. Halla la fuerza de la presión hidrostática en el fondo del tanque si es llenado con gasolina (la densidad de la gasolina es 42 lb/ft³).
5. Una piscina es de 20 m de ancho y 40 m de largo con su parte inferior en forma de plano inclinado de forma que la parte más honda es de 9 m y la menos honda es de 3 m. Si esta piscina se llena de agua determina la fuerza de la presión hidrostática en:
 - a. La parte más honda.
 - b. La parte menos profunda.



Recurso digital

Aquí puedes encontrar el video “**Línea del tiempo del cálculo infinitesimal**”, que continúa la historia relacionada con el inicio del cálculo infinitesimal.

La historia del término función

El concepto de función como objeto matemático independiente, susceptible de ser estudiado por sí solo, apareció hasta los inicios del cálculo en el siglo XVII. René Descartes, Isaac Newton y Gottfried Leibniz concibieron la idea de función como la dependencia entre dos cantidades variables. Leibniz, en particular, acuñó los términos función, variable, constante y parámetro. La notación $f(x)$ fue utilizada por primera vez por Alexis Claude Clairaut y por Leonhard Euler, en 1736, en los *Commentarii de San Petersburgo*.

En 1837 Dirichlet propuso la definición moderna de función numérica como una correspondencia cualquiera entre dos conjuntos de números, que asocia a cada número en el primer conjunto un único número del segundo.

Durante el siglo XIX Julius Wilhelm Richard Dedekind, Karl Weierstrass, Georg Cantor, partiendo de un estudio profundo de los números reales, desarrollaron la teoría de funciones, siendo esta teoría independiente del sistema de numeración empleado. Con el desarrollo de la teoría de conjuntos, en los siglos XIX y XX surgió la definición actual de función, como una correspondencia entre dos conjuntos de objetos cualesquiera, no necesariamente numéricos.

Aplicando lo aprendido

◀ Realiza lo que se pide.

- Halla el área que se encuentra entre las dos curvas $f(x) = 6x - x^2$ y $g(x) = x^2 - 2x$.
- Determina el área de la región que ocupa la curva $y^2 = x^2(1 - x^2)$ en el primer y cuarto cuadrante.
- Calcula el área de la región que se encuentra acotada en la parte superior por la curva $x^2 + y^2 = 25$ y en la parte inferior por la recta $y = 3$.
- Dos círculos $x^2 + y^2 = 4x$ y $x^2 + y^2 = 4$ se intersecan. Obtén el área de la región que resulta de esta intersección.
- En el segundo cuadrante se obtiene una región que es acotada por la curva $y^2 = 4x^4 + x^5$. Calcula el área de esa región.
- En la siguiente serie de incisos se describe una región en particular limitada por curvas. Halla el área de tales regiones.
 - $y = x^2 - 4, y = 8 - 2x^2$
 - $y = 4x^2, y = x^4 - 4x^2$
 - $y = e^x, y = e^{-x}, x = 0, x = 2$
 - $x = 12/y, x = 1, x = e^2, y = 0$
 - $y = 1/(x^2 + 1), x = 1, x = -1, y = 0$
- Demuestra que la fórmula del volumen de una esfera de radio r es igual a $V = \frac{4\pi r^3}{3}$.
- Utiliza el método apropiado para determinar el volumen de cada una de las regiones especificadas en torno al eje o recta de revolución señalado.
 - $x^2 - y^2 = 16, y = 0, x = 8$; eje Y
 - $y = 4x^2, x = 0, y = 16$; eje X
 - $y = x^3, x = 0, y = 8$; recta $x = 2$
 - $x = 9 - y^3, x - y - 7 = 0$; recta $x = 4$
 - $y = x^2 - 5x + 6, y = 0$; eje Y
 - Dentro de $x = 9 - y^2$, entre $x - y - 7 = 0$ y $x = 0$; recta $y = 3$
 - Un arco de $y = \text{sen}(3x)$; eje X
 - Primer arco de $y = e^x \text{sen } x$; eje X
 - $y = 2x^3, 2x - y + 4 = 0$; recta $x = 2$

Presentación del proyecto

Es momento de dar a conocer lo que has trabajado a lo largo de este parcial, a saber, tu producto del proyecto.

Recuerda que entre algunas de las normas que debes seguir están las siguientes:

- El producto final se entrega y presenta el día y hora acordado con tu docente.
- Todos los integrantes del equipo deben participar y demostrar cuál ha sido la aportación en éste.
- Este trabajo será evaluado mediante la rúbrica correspondiente de acuerdo a la ponderación que hayan acordado con tu docente.

He incorporado a mi saber

Rúbrica para la evaluación del proyecto

Nivel de logro o desempeño			
Inicial	Básico	Autónomo	Estratégico
Ocasionalmente describo facetas en las ciencias, en donde sea aplicable la integral definida como medio de resolución de una problemática.	Describo algunas facetas correctas en las ciencias, en donde sea aplicable la integral definida como medio de resolución de una problemática.	Describo diferentes facetas en las ciencias, en donde sea aplicable la integral definida como medio de resolución de una problemática.	Describo diferentes y variadas facetas en las ciencias, en donde sea aplicable la integral definida como medio de resolución de una problemática.
Represento con ciertos errores la gráfica del área y volumen generado por una o más curvas, según sea el caso y según sea el eje de rotación. Empleo las fórmulas y métodos de forma incorrecta al momento de determinar las áreas y volúmenes de revolución de curvas que se me proporcionen. Aplico con errores las integrales definidas requeridas con el fin de resolver situaciones relacionadas a las ciencias experimentales o sociales, de la forma hipotética.	Represento de forma básica la gráfica el área y volumen generado por una o más curvas, según sea el caso y según sea el eje de rotación. Empleo las fórmulas y métodos de forma inconsistente al momento de determinar las áreas y volúmenes de revolución de curvas que se me proporcionen. Aplico con ciertos errores las integrales definidas requeridas con el fin de resolver situaciones relacionadas a las ciencias experimentales o sociales, ya sean hipotéticas o reales.	Represento adecuadamente y de forma gráfica el área y volumen generado por una o más curvas, según sea el caso y según sea el eje de rotación. Empleo las fórmulas correctamente así como algunos de los métodos para determinar las áreas y volúmenes de revolución de curvas que se me proporcionen. Aplico las integrales definidas requeridas con el fin de resolver situaciones relacionadas a las ciencias experimentales o sociales, que sean hipotéticas.	Represento adecuadamente y de forma gráfica el área y volumen generado por una o más curvas, según sea el caso y según sea el eje de rotación. Empleo las fórmulas correctamente así como los métodos apropiados para determinar las áreas y volúmenes de revolución de curvas que se me proporcionen. Aplico las integrales definidas requeridas con el fin de resolver situaciones relacionadas a las ciencias experimentales o sociales, ya sean hipotéticas o reales.

Nivel de logro o desempeño			
Inicial	Básico	Autónomo	Estratégico
Mantengo ocasionalmente una actitud positiva frente a las dificultades que se presentan al equipo o de forma individual. Reflexiono con errores sobre la aplicación de las integrales en diversas áreas pero no sobre su utilidad en ellas.	Mantengo y reflejo ocasionalmente una actitud positiva frente a las dificultades que se presentan al equipo o de forma individual. Reflexiono ocasionalmente sobre la aplicación de las integrales en diversas áreas pero no sobre su utilidad en ellas.	Mantengo siempre una actitud positiva frente a las dificultades que se presentan al equipo o de forma individual. Reflexiono ocasionalmente sobre la aplicación de las integrales en diversas áreas así como de su utilidad en ellas.	Mantengo y reflejo siempre una actitud positiva frente a las dificultades que se presentan al equipo o de forma individual. Reflexiono continuamente sobre la aplicación de las integrales en diversas áreas así como de su utilidad en ellas.

La siguiente rúbrica, te servirá para situarte en cuanto al logro de las competencias que se presentaron, como parte de las metas del parcial. Coloca tus logros y áreas de oportunidad.

Rúbrica de Logros y Áreas de Oportunidad de mis Competencias			
Tipo de Competencia	Competencia	Mis Logros	Mis Oportunidades
Genéricas	5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas, a partir de métodos establecidos.		
	7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.		
Disciplinares	2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.		
	6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.		

Organizador para el portafolio de evidencias

Actividad de aprendizaje número	Evidencia o producto	No comprendió ni lo resolvió	Comprendió y resolvió parcialmente	Comprendió y resolvió de forma correcta y completa
1	Determinación de áreas entre rectas y curvas o entre curvas.			
2	Determinación de sólidos de revolución con los diferentes métodos.			
3	Obtención de la longitud de arco de una función dado el intervalo.			
4	Aplicación de la integral definida en diferentes áreas como la física, biología y economía.			

Autoevaluación

Mediante un análisis objetivo indica el nivel de logro obtenido a lo largo del viaje de este parcial de acuerdo a las competencias declaradas al inicio, así como del objetivo general. Apóyate de las siguientes preguntas, así como de la tabla que se te da posteriormente.

- ¿Cuáles son algunas de las competencias observé difíciles de desarrollar en este parcial?, ¿Por qué?
- ¿Qué logros se vieron truncados durante el desarrollo del parcial?
- ¿Qué mecanismos requieres promover para seguir las líneas de las competencias o objetivos establecidos?
- ¿En qué otras facetas de mi contexto podré emplear lo analizado a lo largo de este parcial?
- ¿Qué mecanismos requieres promover para seguir las líneas de las competencias o objetivos establecidos?
- ¿En qué otras facetas de mi contexto podré emplear lo analizado a lo largo de este parcial?

◀ Coloca una X en donde corresponda y describe lo solicitado con el corazón en la mano.

Criterio	Difícilmente	En ocasiones	Siempre
Representa las diversas situaciones donde se deba determinar el área entre funciones de modo que me sirva para calcular el valor de la misma.			

Criterio	Difícilmente	En ocasiones	Siempre
Empleo los diversos métodos para hallar el valor del sólido de revolución en función de la situación de que se trate.			
Determino las longitudes de arco no sin antes representar la situación hipotética o real de que se trate.			
Utilizo las diversas aplicaciones de la integral definida en ramas como la física, biología, economía entre otras.			
Logros alcanzados:	Aspectos a mejorar:		

- ◀ Registra tus evidencias y evalúa, socializando en el grupo de compañeros y con tu docente. Observa que hay dos renglones para cada evidencia, esto es para que la evalúes, después de haberla mejorado.

Evidencia	Autoevaluación	Coevaluación	Heteroevaluación
Solución de problemas donde se aplique el cálculo integral en áreas como: física, economía y biología.			
Elaboración de figuras geométricas en 3D, con las cuales los estudiantes explicarán en plenaria la obtención de su volumen aplicando integrales.			



Bibliografía

- Caballero C., Arquímedes, Lorenzo Martínez C. y Jesús Bernárdez G. (2005). *Iniciación al cálculo diferencial e integral* (_7.ª ed.). México: Esfinge.
- Casteleiro Villalba, José Manuel (2012). *¿Es fácil integrar?: manual autodidáctico*. Madrid: ESIC.
- — y Rafael Paniagua Gómez-Álvarez (2002). *Cálculo integral*. Madrid: ESIC.
- Cruz Hernández, Lorenzo Loreto, Brenda Alejandra Jiménez Robledo y María Dolores Gabriela Meza Puesto (2009). *Elementos de cálculo integral*. México: Limusa.
- Engler, Adriana et al. (2007). *El cálculo integral*. Santa Fe, Argentina: Universidad Nacional del Litoral.
- Flores Espinoza, Rubén et al. (2008). *Fundamentos del cálculo*. Hermosillo, Sonora: Garabatos.
- González Urbaneja, Pedro Miguel (2008). *Arquímedes y los orígenes del cálculo integral*. Madrid: Nivola.
- Piskunov, N. S. (2014). *Cálculo diferencial e integral*. México: Limusa.
- Sadosky, Manuel y Rebeca C. de Guber (2004). *Elementos de cálculo diferencial e integral*. Buenos Aires: Alsina.
- Soto Apolinar, Efraín (2010). *Cálculo integral*. México. Recuperado el 30 de octubre de 2015 de <<http://www.aprendematematicas.org.mx/obras/AMDGB6.pdf>>.
- Thompson, Silvanus P. y Martin Gardner (2012). *Cálculo diferencial e integral*. México: McGraw-Hill.
- Zorzoli, Gustavo, María José Bianco y Roberto García (2004). *Aprendiendo cálculo diferencial e integral con Microsoft Excel*. Buenos Aires: Omicron System.

El presente libro es una herramienta para optimizar el desempeño de los docentes y el aprovechamiento académico de los estudiantes en Educación Media Superior.

El enfoque didáctico del libro da sentido a las intenciones de formación que este nivel tiene para el joven, ya que convierte el conocimiento en una herramienta útil a lo largo de la vida, así como pone énfasis en que el alumno articule conocimientos, destrezas y habilidades, a fin de que al terminar sus estudios esté capacitado para asumir una postura crítica y reflexiva ante los fenómenos de su entorno, ya sea para continuar su vida escolar o incorporarse al ámbito laboral y social con seguridad.

La secuencia didáctica propuesta en este libro implica tres momentos. En el inicio, el alumno podrá ver las metas de aprendizaje, desarrollará sus habilidades socioemocionales y leerá un texto que lo introducirá al tema del parcial. En el desarrollo, encontrará la teoría y las actividades colaborativas necesarias para alcanzar los aprendizajes esperados, además de otras secciones que fomentarán el uso de las TIC, el amor por su país y el conocimiento interdisciplinario. Finalmente, cada parcial cierra con un apartado de evaluación, tanto sumativa como formativa, donde se proponen herramientas útiles para valorar las nuevas competencias del joven.



www.bookmart.com.mx

Lada nacional sin costo
01 800 101 63 48



ISBN: 978-607-743-746-8



9 786077 437468